

# 1

## Introdução

O ponto de partida deste trabalho foi considerar a discretização por diferenças finitas do *problema de Dirichlet não linear*

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = -\Delta u - f(x, u) = h, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado com fronteira Lipschitz e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é suave satisfazendo certas condições de crescimento. É especialmente interessante considerar o caso  $h = -t\phi$ , onde  $\phi$  é o autovetor positivo associado ao menor autovalor de  $-\Delta$  com condições de Dirichlet em  $\Omega$  e  $t > 0$ .

A discretização desse operador nos conduz ao estudo da aplicação

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto Au - f(u) \end{aligned} \quad (1-1)$$

onde a matriz  $A$  é simétrica e positiva definida (os detalhes, familiares entre analistas numéricos, se encontram no Apêndice 6.4) e

$$f(u) = (f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n))^T.$$

As hipóteses sobre as coordenadas  $g = f_i$  fazem parte da teoria elíptica habitual: às vezes,  $g$  é superlinear, às vezes assintoticamente linear, às vezes apenas contínua e linear sobre os números negativos e positivos. Grande parte dos resultados tratam de funções  $f_i$  convexas. Sob essas condições, a EDP  $\mathcal{F}(u) = -t\phi$  é uma linha de pesquisa ativa nos últimos trinta anos, dando origem a diversos resultados de multiplicidade de soluções, além de conjecturas indicando áreas de pesquisa pouco entendidas. Nosso interesse original era justamente buscar mais compreensão geométrica sobre a chamada conjectura de Lazer-McKenna [LMcK], que cota por baixo o número de soluções, para  $t$  grande, em termos do número de autovalores de  $-\Delta$  que estejam na imagem de  $f'$  — vamos supor nessa introdução, para simplificar, que  $f(x, u) = f(u)$  e  $f$  é estritamente convexa.

A conjecture diz que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^1$  e se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \mu \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \nu$$

com  $\mu < \lambda_1 < \nu$ ,  $\nu \notin \sigma(-\Delta)$  e o intervalo  $(\mu, \nu)$  contendo ao menos os  $k + 1$  autovalores de  $-\Delta$  em  $\Omega$  contando a multiplicidade, então a equação

$$\begin{cases} -\Delta u - f(u) = -t\phi_1 - v, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem ao menos  $2(k + 1)$  soluções para  $t > 0$  suficientemente grande. Aqui  $\Omega$  é um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi_1$  é a autofunção positiva correspondente ao primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  e  $v \in L^2(\Omega)$ .

Quando  $f$  é convexa e o fecho da imagem de  $f'$  não contém nenhum dos autovalores de  $\Delta$ , Hammerstein [HAM] e Dolph [DOL] mostraram que  $\mathcal{F}(u) = -\Delta u - f(u)$  é um difeomorfismo entre dois espaços de funções apropriados. É fácil demonstrar as contrapartidas discretas desse resultado: o mais importante, talvez, é perceber que o que torna o resultado verdadeiro não tem nada a ver com o laplaciano.

Da mesma forma, quando o fecho da imagem de  $f'$  só contém o menor autovalor de  $-\Delta$ , encontramos os resultados seminais de Ambrosetti-Prodi [AP], imediatamente amplificados por Manes-Micheletti [MM] e maravilhosamente geometrizados por Berger e Podolak [BP]: nesse caso,  $\mathcal{F}$  é uma dobra global entre dois espaços de funções, e assim alguns valores têm duas pré-imagens, outros não estão na imagem e existe um hiperplano (topológico) na imagem consistindo de pontos com uma única pré-imagem. Mais uma vez, os resultados estendem naturalmente para a situação discreta, e a participação do laplaciano é mínima.

Vários autores consideraram mutações dos casos anteriores: interações com um único autovalor, não necessariamente o primeiro, ou a interação com os primeiros  $k$  autovalores (o contexto da conjectura de Lazer-McKenna). Falta intuição, e provavelmente a análise numérica sugerida em [CAL] pode ajudar.

Outra classe abundante de resultados se relaciona com o comportamento assintótico das pré-imagens, isto é, as soluções de  $-\Delta u - f(u) = -t\phi$ , onde  $\phi$  é o autovetor positivo de  $-\Delta$  associado ao menor autovalor  $\lambda_1$  (o *ground state*) e  $t \gg 0$ . Entre vários autores (Lupo [LSS], Ruf [RUF]), ressaltam para esse trabalho os resultados de Costa, Figueiredo e Srikanth [CFS] e os de Solimini [SOL]. Combinando resultados desses autores, foi demonstrada a conjectura para dimensão 1: a equação  $-u'' - f(u) = -t\phi$ ,  $u(0) = u(\pi) = 0$

tem exatamente  $2k$  soluções, para  $t \gg 0$  e  $f$  convexa tal que o fecho da imagem de  $f'$  contém os primeiros  $k$  números quadrados positivos (isto é, os  $k$  menores autovalores do operador segunda derivada com condições de Dirichlet em  $[0, \pi]$ ).

Aqui, entretanto, a pergunta é — o que acontece quando a não linearidade interage com muitos autovalores, possivelmente com todos? Nada mais diferente do que a conjectura de Lazer-McKenna nos leva a pensar. O resultado mais interessante deste trabalho é o Teorema 5.11, descrito a seguir. Um *ortante* em  $\mathbb{R}^n$  é uma componente conexa (aberta) obtida após a remoção dos pontos tendo alguma coordenada nula. Em particular, há  $2^n$  ortantes em  $\mathbb{R}^n$ , dados pelos sinais de cada coordenada de seus pontos.

**Teorema** *Sejam  $A$  uma matriz simétrica e  $a$  e  $b$  números reais satisfazendo alguma das duas hipóteses abaixo:*

- (I)  *$a < \lambda_1$  é suficientemente negativo e  $b > \lambda_n$  é suficientemente grande;*
- (II) *a matriz  $A$  é positiva, com entradas fora da diagonal não positivas,  $a < \lambda_1$  e  $b > \lambda_n$  é suficientemente grande.*

*Então existe  $t_0 > 0$  tal que a equação  $F_{al}(u) = y - tp$ ,  $t > t_0$ ,  $p > 0$ , possui exatamente  $2^n$  soluções, uma no interior de cada ortante de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $F_{al} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $F_{al}(u) = Au - f(u)$  com  $f(u) = (f_1(u_1), \dots, f_n(u_n))^T$ , e cada  $f_i$  é suave, estritamente convexa, com comportamento assintótico dado por*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_i(x)}{-x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_i(x)}{x} = b, \quad a < b.$$

Uma matriz  $A$  com as características listadas acima é conhecida como *matriz de Stieltjes*.

Experimentos apresentados no Capítulo 4 mostram que existe algo semelhante a uma transição de fase no número de pré-imagens, a medida que o parâmetro  $b$  vai superando mais autovalores de  $A$  — no princípio, o número acompanha o crescimento em progressão aritmética do tipo Lazer-McKenna, mas parece existir um salto para o modo exponencial quando certa fração do espectro é superada.

Há muito pouco a se guardar da situação contínua: do laplaciano, restam as propriedades listadas no teorema para a matriz  $A$ , que aliás são satisfeitas pelas discretizações habituais do laplaciano. Quanto ao *ground state*  $\phi$ , não há nada de especial nele, qualquer vetor positivo tem propriedades semelhante, talvez para comportamento assintótico mais tardio.

Para demonstrar o resultado, são necessários vários passos intermediários. Mais do que uma sequência de lemas preparatórios, a demonstração final segue de uma sequência de escólios, isto é, argumentos apresentados em demonstrações de proposições mais simples. Assim, a aplicação  $F_{al}(u) = Au - f_{al}(u)$  com não linearidade assintoticamente linear descrita acima, e estudada em detalhe no Capítulo 5, é aproximada por  $F_{pl}(u) = Au - f_{pl}(u)$ , onde a derivada das coordenadas de  $f_{pl}$  só toma dois valores,  $a$  e  $b$ , respectivamente sobre números negativos e positivos. Esse caso, a não linearidade linear por partes, é tratado no Capítulo 4. No Capítulo 3, estuda-se o caso superlinear  $F_{sl}(u) = Au - f_{sl}(u)$ , que por sua vez tem uma simplificação fundamental, a eliminação da parte linear.

Talvez o exemplo mais simples seja justamente a função  $u \in \mathbb{R}^n \rightarrow G(u)$  dada por

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto -(u_1^2, \dots, u_n^2),$$

para a qual é claro que a equação  $G(u) = -p$  tem  $2^n$  soluções para qualquer vetor  $p$  de coordenadas estritamente positivas. Geometricamente, a situação é clara: o domínio é dobrado  $n$  vezes, sobrepondo-se  $2^n$  vezes sobre o ortante negativo. O conjunto crítico consiste da união dos hiperplanos coordenados, onde dobras ocorrem.

Ao perturbar  $G$  por uma transformação linear, obtendo uma função própria  $F_{sl}$ , o conjunto crítico se desdobra genericamente em  $n$  componentes, cada uma associada à possibilidade de um dos autovalores (ordenados) da Jacobiana se anular. O que resta do efeito de dobra-sobre-dobra responsável pela grande quantidade de pré-imagens para a escolha  $-p$  é o seguinte fato geométrico: cada subconjunto crítico associado ao anulamento do  $i$ -ésimo autovalor da jacobiana, é levado por  $F_{sl}$  a uma de  $n$  superfícies de tal forma que a  $k$ -ésima superfície circunda um ponto de coordenadas muito negativas  $\binom{n-1}{k-1}$  vezes, o que pode ser formalizado com argumentos de teoria de grau, como será visto na Seção 3.3.

Assim, a razão da abundância de pré-imagens é topológica, e em princípio muito robusta. Isso leva a hipóteses mais flexíveis, nas quais argumentos de deformação, combinados com o estudo do conjunto crítico e sua imagem, continuam passíveis de aplicação de maneira uniforme no parâmetro da deformação.

Em retrospecto, talvez esse tipo de resultado mereça um contexto diferente. Para fins de análise numérica, por exemplo, não surpreende que um operador diferencial não linear seja mal apreendido por suas discretizações a medida que avançamos em alta frequência — fenômenos desse tipo são conhecidos já no caso linear. Por outro lado, existem situações em Matemática Física em

que operadores tridiagonais, por exemplo, aproximam operadores com espectro contínuo em intervalos fechados. Um resultado como o teorema acima mostra que essas aproximações de alta dimensão são muito sensíveis a perturbações assintoticamente lineares, com variação dramática de geometria com pequenas alterações da perturbação.