

3

O caso sl -admissível

Neste capítulo, mostramos que a equação $F_{sl}(u) = y - tp$, $p > 0$, possui exatamente 2^n soluções para $t > 0$ suficientemente grande. Mas ainda, tais soluções se distribuem de maneira bastante regular nas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}(F_{sl})$. Com efeito, veremos que há exatamente uma solução em cada ortante de \mathbb{R}^n . Para demonstrar tais fatos, utilizaremos a homotopia $H_{sl} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H_{sl}(\tau, u) = \tau Au - f_{sl}(u)$ que deforma a aplicação original num modelo simplificado: em $\tau = 0$ a homotopia H_{sl} se reduz somente a parte não linear $-f_{sl}$. Daí, alguns fatos provados para $H_{sl}(0, \cdot)$ serão transferidos, via homotopia, para a aplicação $F_{sl} = H_{sl}(1, \cdot)$.

Lema 3.1 *A homotopia $H_{sl} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H_{sl}(\tau, u) = \tau Au - f_{sl}(u)$ é uma aplicação própria.*

Aqui, não é necessário que f_{sl} tenha coordenadas $f_{sl,i}$ convexas.

Demonstração:

Vamos mostrar que $H_{sl}(\tau, u)$ vai a infinito quando (τ, u) vai. Suponha por absurdo que a sequência $z^k = H_{sl}(\tau^k, u^k)$ seja limitada, mas $(\tau^k, u^k) \rightarrow \infty$. Então

$$\tau^k A \frac{u^k}{|u^k|} - \frac{f_{sl}(u^k)}{|u^k|} = \frac{z^k}{|u^k|}$$

e, assim, $\frac{f_{sl}(u^k)}{|u^k|} = \tau^k A \frac{u^k}{|u^k|} - \frac{z^k}{|u^k|}$ é limitada, contrariando a superlinearidade das coordenadas de f_{sl} . \square

3.1

Faixas e a cruz

No que segue, descreveremos uma região do domínio que contém o conjunto crítico $\mathcal{C}(F_{sl})$. A i -ésima *faixa de espessura* $\alpha > 0$ é

$$\mathfrak{F}_\alpha^i = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid |u_i| < \alpha\}.$$

Definimos ainda a *cruz de espessura* α , denotada por \mathcal{X}_α , por $\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{F}_\alpha^i$.

Proposição 3.2 *Existe $\alpha > 0$ tal que os conjuntos críticos $\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}(H_{sl}(\tau, \cdot))$ estão contidos na cruz \mathcal{X}_α para todo $\tau \in [0, 1]$.*

Demonstração:

Para simplificar vamos escrever $f = f_{sl}$. Para $\tau \in [0, 1]$ fixo,

$$DH_{sl}(\tau, u) = \tau A - \text{Diag}(f'(u)). \quad (3-1)$$

Os elementos da diagonal de $DH_{sl}(\tau, u)$ são $DH_{sl}(\tau, u)_{ii} = \tau A_{ii} - f'_i(u_i)$. Pelo Teorema de Gershgorin os autovalores de $DH_{sl}(\tau, u)$ estão contidos na união dos discos

$$|z - (\tau A_{ii} - f'_i(u_i))| \leq R_i(\tau), \quad \text{onde} \quad R_i(\tau) = \tau \sum_{j \neq i} |A_{ij}|. \quad (3-2)$$

Defina $R^* = \max_{i, \tau \in [0, 1]} (R_i(\tau)) = \max_i (R_i(1))$. Assim $u \in \mathcal{C}_\tau$ é tal que

$$|\tau A_{ii} - f'_i(u_i)| \leq R^* \quad \text{para algum } i.$$

ou, equivalentemente, $\tau A_{ii} - R^* \leq f'_i(u_i) \leq \tau A_{ii} + R^*$. Fazemos então

$$|f'_i(u_i)| \leq \max_{i, \tau \in [0, 1]} (|\tau A_{ii} - R^*|, |\tau A_{ii} + R^*|) < \max_i |A_{ii}| + R^*. \quad (3-3)$$

Pelo Lema 2.1, $|f'_i| \rightarrow \infty$. Assim, uma cota em $|f'_i(u_i)|$ implica na existência de $\alpha > 0$ tal que para $|u_i| < \alpha$. \square

Exemplo 3.3: Consideremos a aplicação $F_{sl} = A_n - f_{sl}$ onde $f_{sl} = (g, g, \dots, g)$, $g(x) = x^2$ e

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a desigualdade (3-3) se torna

$$|2x| \leq 4 \iff |x| \leq 2$$

e, portanto, o conjunto crítico de F_{sl} está contido em \mathcal{X}_3 . A Figura 3.1 exhibe $\mathcal{C}(F_{sl}) \subset \mathcal{X}_3$ para a matriz A_2 . Já na Figura 2.1 do capítulo anterior temos $\mathcal{C}(F_{sl})$ para a matriz A_3 .

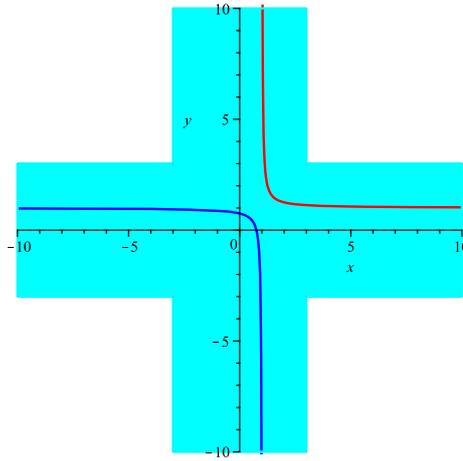


Figura 3.1: $\mathcal{C}(F_{sl}) \subset \mathcal{X}_3$ para A_2

□

O número de pré-imagens $F_{sl}^{-1}(w)$, $w \in \mathbb{R}^n$, depende muito da geometria da imagem do conjunto crítico por F_{sl} . Vamos mostrar a seguir que certa classe de semirretas eventualmente abandona a imagem por H_{sl} de cruzes.

Proposição 3.4 *Sejam $H_{sl} = \tau A - f_{sl}$ e $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ uma cruz com faixas de espessura α . Considere a semirreta $r(t) = y - tp$, $t > 0$, onde $p > 0$ e $\|p\|_\infty = 1$. Então existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > t_0$, temos*

$$r(t) \notin \bigcup_{\tau \in [0,1]} H_{sl}(\tau, \mathcal{X}_\alpha).$$

Aqui a convexidade de f_{sl} não é necessária.

Demonstração:

Novamente vamos escrever $f = f_{sl}$. Suponha, por absurdo, que existam seqüências $u^k \in \mathcal{X}_\alpha$, $\tau^k \in [0, 1]$ e $t^k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\tau^k Au^k - f(u^k) = y - t^k p, \tag{3-4}$$

com $t^k = \|\tau^k Au^k - f(u^k) - y\|_\infty \rightarrow \infty$. Visto que pelo Lema 3.1 a homotopia H_{sl} é própria temos $u^k \rightarrow \infty$ também. Em particular, $t^k/|u^k|_\infty \rightarrow \infty$, pela superlinearidade de f . Extraindo uma subsequência, se necessário, podemos supor que $|u_i^k| \leq \alpha$ para algum índice fixo i . Dividindo Equação (3-4) acima por t^k e igualando a i -ésima coordenada

$$\frac{(\langle \tau^k Au^k, e_i \rangle - f_i(u_i^k) - y_i)/|u^k|_\infty}{t^k/|u^k|_\infty} = p_i. \tag{3-5}$$

Os três termos no numerador são limitados, o denominador vai a infinito quando $k \rightarrow \infty$: $p_i = 0$, contradição. □

Pela proposição acima temos, em particular, que a classe de semirretas, $r(t) = y - tp$, $t > 0$, onde $p > 0$ e $\|p\|_\infty = 1$ abandona a imagem por F_{sl} de cruces.

A Figura 3.2 exhibe $F_{sl}(\mathcal{X}_3)$ para F_{sl} dada no exemplo anterior: aqui $y = 0$. Note o comportamento distinto da imagem das duas curvas críticas. A curva azul é a imagem de uma curva crítica que só tem dobras, e por isso a cruz só se em contra de um lado dela. A curva crítica vermelha é a imagem de uma curva crítica contendo uma cúspide e o comportamento de uma faixa em torno dela seria um pouco diferente, mas não se nota ao considerarmos a imagem da cruz, um conjunto mais largo.

No Apêndice 6.2 são descritos conjuntos convexos dados por equações simples, os *bolsões*, que contêm a imagem de cruces, $F_{sl}(\mathcal{X}_\alpha)$.

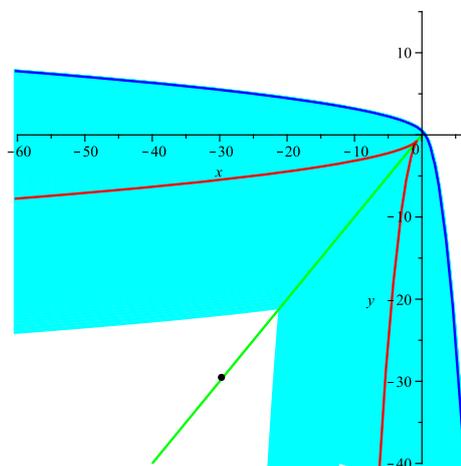


Figura 3.2: $F_{sl}(\mathcal{C}(F_{sl})) \subset F_{sl}(\mathcal{X}_3)$

3.2

Soluções de $F_{sl}(u) = y - tp$, $p > 0$ e $t \gg 0$, e seus índices

Considere o problema $\tilde{F}_{sl}(u) = Au - \tilde{f}(u) = \hat{w}$, $\tilde{f}(u) = (u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2)$ e $\hat{w} < 0$. É de se esperar que se a norma de \hat{w} for suficientemente grande, o número de soluções de $\tilde{F}_{sl}(u) = \hat{w}$ seja o mesmo de $\tilde{f}(u) = -\hat{w}$, que é 2^n . Com efeito, esse é um modelo simplificado do caso *sl*-admissível e o teorema seguinte se encarrega em provar o caso geral. A ideia é contar o número de soluções de $F_{sl}(u) = y - tp$ usando a homotopia H_{sl} que preserva o número de 2^n soluções no decurso do tempo $\tau = 0$ até $\tau = 1$.

Lema 3.5 *Seja $F_0(u) = H_{sl}(0, u) = -f_{sl}(u)$. Existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$ o número de soluções da equação $F_0(u) = y - tp$, $p > 0$, é 2^n , uma em cada ortante de \mathbb{R}^n .*

Demonstração:

Escreva $f = f_{sl}$. Neste caso, $DF_0(u) = -\text{Diag}(f'_1(u_1), \dots, f'_n(u_n))$ e essa matriz deixa de ser inversível somente quando algum elemento diagonal é nulo. Para cada f_i isso ocorre exatamente em um número real, devido a convexidade de f_i . Desta forma, o conjunto crítico $\mathcal{C}(F_0)$ consiste da união de hiperplanos paralelos aos hiperplanos coordenados.

Para t suficientemente positivo, a convexidade e a superlinearidade de cada f_i garantem que cada uma das equações $f_i(x) = -(y_i - tp_i) > 0$ possui exatamente duas soluções, com sinais contrários. Deste modo, para t suficientemente positivo, a equação $F_0(u) = y - tp$, $p > 0$, tem exatamente 2^n soluções, uma em cada ortante de \mathbb{R}^n . \square

Teorema 3.6 *Seja $F_{sl}(u) = Au - f_{sl}(u)$ sl -admissível. Então existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$ o número de soluções da equação $F_{sl}(u) = y - tp$, $p > 0$, é 2^n .*

Demonstração:

Escreva $H = H_{sl}$ e $f = f_{sl}$. Desejamos determinar o número de soluções de

$$H(1, u) = F_{sl}(u) = Au - f(u) = y - tp. \quad (3-6)$$

Pela Proposição 3.2, todos os conjuntos críticos $\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}(H(\tau, \cdot))$ estão contidos numa cruz \mathcal{X}_α . Pela Proposição 3.4, existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$, $\hat{w} = y - tp$ é valor regular de H_τ para todo τ em $[0, 1]$, uma vez que $H(\mathcal{X}_\alpha)$ contém todos os valores críticos. Portanto, todo $u \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $H(\tau, u) = \tau Au - f(u) = \hat{w}$ se encontra fora da cruz \mathcal{X}_α , garantindo que $DH_\tau(u(\tau))$ é inversível. Assim, faz sentido derivar a equação $H_\tau(u(\tau)) = \hat{w}$ em termos de τ ,

$$Au(\tau) + \tau Au'(\tau) - f'(u(\tau))u'(\tau) = 0 \quad (3-7)$$

que leva a

$$u'(\tau) = -[\tau A - f'(u(\tau))]^{-1} Au(\tau) = -[DH_\tau(u(\tau))]^{-1} Au(\tau). \quad (3-8)$$

O Lema 3.5 os permite definir $\Omega = [-f]^{-1}(\hat{w}) = \{s_i \mid i = 1, 2, \dots, 2^n\}$, o conjunto de soluções para $\tau = 0$, onde cada uma delas pertence a um ortante de \mathbb{R}^n . Para cada $s \in \Omega$ mostraremos que existe uma única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(\tau) = -[DH_\tau(u(\tau))]^{-1} Au(\tau) \\ u(0) = s \end{cases} \quad (3-9)$$

Para mostrar que as equações têm solução para todo $\tau \in [0, 1]$, basta mostrar a estimativa a priori $[DH_\tau(u(\tau))]^{-1} A \in \mathcal{M}_n(L_{loc}([0, 1], \mathbb{R}))$ ([CL]). Há duas

dificuldades a considerar. A primeira é a possibilidade da inversa não estar bem definida, o que já foi evitado porque os \hat{w} 's são valores regulares de cada H_τ . Além disso, poderíamos ter soluções da equação diferencial indo para infinito — isso não ocorre porque a homotopia H é própria.

Até aqui temos que o número de soluções da equação $F_{s\ell}(u) = \hat{w}$ é menor ou igual a 2^n , pois condições iniciais s distintas (pertencentes ao conjunto Ω , $\#\Omega = 2^n$) podem resultar em mesmos pontos finais $u(1)$ em soluções do PVI (3-9). Para mostrar que $\#F_{s\ell}^{-1}(\hat{w}) < 2^n$ não ocorre, vamos reparametrizar o PVI (3-9) fazendo

$$\tau = 1 - \hat{\tau}, \quad \hat{\tau} \in [0, 1], \quad y(\hat{\tau}) = u(1 - \hat{\tau}) \quad \text{e} \quad y'(\hat{\tau}) = -u'(1 - \hat{\tau}).$$

Daí,

$$\begin{cases} y'(\hat{\tau}) = [DH_{1-\hat{\tau}}(u(1 - \hat{\tau}))]^{-1} Au(1 - \hat{\tau}) \\ y(0) = u(1) \end{cases} \quad (3-10)$$

Se para $s_1, s_2 \in \Omega$, com $s_1 \neq s_2$, tivermos os mesmos pontos finais $u(1)$ nas soluções correspondentes do PVI (3-9) entraremos em contradição devido a unicidade da solução do PVI (3-10). Portanto, $\#F_{s\ell}^{-1}(\hat{w}) = 2^n$. \square

Como no caso contínuo, tanto para equações diferenciais ordinárias quanto parciais, a equação admite uma formulação variacional, o que permite a atribuição de um *índice de Morse*, definido a seguir, para cada solução. Consideremos o funcional $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle \hat{f}(u), \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{w}, u \rangle$$

onde $\hat{f}' = f$ e $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]$. Como $\nabla\Phi(u) = F_{s\ell}(u) - \hat{w}$, $u \in \mathbb{R}^n$ é solução de $F_{s\ell}(u) = \hat{w}$ se, e somente se, u é ponto crítico do funcional Φ , ou seja, $\nabla\Phi(u) = 0$. Mais ainda, como visto no Teorema 3.6, para $\hat{w} < 0$ com norma suficientemente grande toda solução u da equação $F_{s\ell}(u) = \hat{w}$ é tal que $\det DF_{s\ell}(u) \neq 0$, isto é, $\det D^2\Phi(u) \neq 0$. Portanto, toda solução u de $F_{s\ell}(u) = \hat{w}$ é ponto crítico não-degenerado de Φ . O índice de Morse de u é o número de autovalores negativos de $D^2\Phi(u)$. Vamos calcular os índices de Morse das 2^n pré-imagens de \hat{w} .

Nas componentes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}(F_{s\ell})$, o índice de Morse de $DF_{s\ell}(\cdot)$ permanece constante. De fato, a hessiana de Φ é a jacobiana de $F_{s\ell}$, $D^2\Phi = DF_{s\ell}$ e assim o determinante de $D^2\Phi(u)$ só pode passar por zero (e assim, mudar o número de autovalores negativos) se passar por um ponto crítico u de $F_{s\ell}$. As componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}(F_{s\ell})$ são denotadas por $\mathcal{R}_\ell, \ell = 0, \dots, n$ consistindo de pontos regulares com o mesmo número ℓ de autovalores negativos de $DF_{s\ell}$.

Por outro lado, cada uma das componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}_\alpha$ está contida num ortante distinto de \mathbb{R}^n e cada uma delas tem uma solução de $H(0, u) = \hat{w}$. A homotopia, como vimos, descreve curvas de soluções que se mantêm em $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}_\alpha$. Assim, a equação original também tem uma solução em cada ortante de \mathbb{R}^n . Mais, o argumento de deformação também permite concluir que o índice de Morse de cada solução de $H(1, \cdot)$ é o mesmo das soluções de $H(0, \cdot)$: o índice então é dado pelo número de autovalores negativos associado ao ortante onde está a solução. Demonstramos o resultado a seguir.

Teorema 3.7 *Seja $p > 0$ e $F_{sl} = A - f_{sl}$ sl -admissível. Então existe $t_0 > 0$ tal que, para $t > t_0$ a equação $F_{sl}(u) = y - tp$ tem exatamente uma solução em cada ortante de \mathbb{R}^n . O índice de cada solução é o número de suas coordenadas negativas. Existem exatamente $\binom{n}{k}$ soluções de $F_{sl}(u) = y - tp$ com índice de Morse k .*

3.3

Rotação das imagens das componentes críticas

Sejam $n = 3$ e $F_{sl}(u) = 0.01 A_3 u - (u_1^2, u_2^2, u_3^2)^T$. Para simplificar as figuras de $\mathcal{C}(F_{sl})$ e $F_{sl}(\mathcal{C}(F_{sl}))$ usaremos a não linearidade al -admissível pois a situação superlinear é muito parecida.

O conjunto crítico $\mathcal{C}(F_{sl})$ é composto por três componentes. Na Figura 3.3, representamos uma aproximação da segunda componente crítica $\mathcal{C}_2(F_{sl})$, muito similar à componente crítica intermediária que vimos na Figura 2.1. O que nos interessa agora é visualizar a imagem das três componentes críticas. Na verdade, a imagem das componentes inferior e superior não é surpreendente: elas são mapeadas difeomorficamente em superfícies de \mathbb{R}^n . O que é mais significativo é a imagem da componente intermediária, exibida na Figura 3.4: ela dá duas voltas ao redor do vetor $(-1, -1, -1)$, mostrado em destaque.

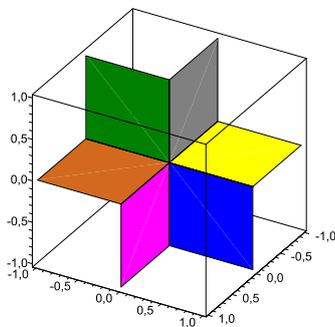


Figura 3.3: $\mathcal{C}(F_{sl})$

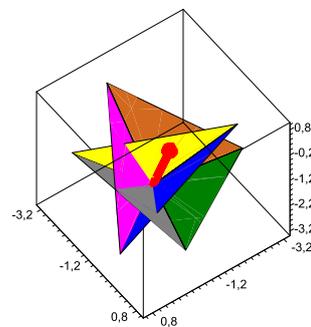


Figura 3.4: $F_{sl}(\mathcal{C}(F_{sl}))$

Vamos estudar com mais detalhe o fenômeno de rotação das imagens das componentes críticas. Seja $F_{s\ell} = A - f$ $s\ell$ -admissível com o espectro de A simples e f estritamente convexa. Pelo que foi visto na Proposição 2.3, $\mathcal{C}(F_{s\ell})$ é composto por n subconjuntos $\mathcal{C}_k, k = 1, \dots, n$, que são gráficos de funções contínuas $\gamma_k : p^\perp \rightarrow \mathbb{R}, p > 0$. É claro que os \mathcal{C}_k 's e os \mathcal{R}_ℓ 's se entrelaçam. Consideremos os semi-espacos topológicos fechados

$$\mathcal{U}_\ell = \bigcup_{i=0}^{\ell} \overline{\mathcal{R}_i} \tag{3-11}$$

e, para dar homogeneidade à notação, vamos definir também $\mathcal{U}_n = \mathbb{R}^n$. Observe que $\partial\mathcal{U}_\ell = \mathcal{C}_{\ell+1}$ para $\ell = 0, \dots, n - 1$.

Como $F_{s\ell}$ é própria, podemos estendê-la continuamente à esfera $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, obtendo uma função $\tilde{F}_{s\ell}$. Estamos interessados em calcular o grau topológico em relação a um ponto muito negativo das restrições de $\tilde{F}_{s\ell}$ às esferas $\mathcal{U}_\ell \cup \{\infty\}$, o que, por propriedade é igual ao grau de $F_{s\ell}$ em relação a \mathcal{U}_ℓ .

Mais precisamente, seja \hat{w} um ponto regular especificado pelo Teorema 3.7, com 2^n soluções. Queremos

$$\deg(\tilde{F}_{s\ell}, \mathcal{U}_\ell \cup \{\infty\}, \hat{w}) = \deg(F_{s\ell}, \mathcal{U}_\ell, \hat{w}) = \sum_{q \in F_{s\ell}^{-1}(\hat{w}) \cap \mathcal{U}_\ell} \text{sgn}(\det(DF_{s\ell}(q))).$$

Note que \hat{w} não tem pré-imagens na fronteira de \mathcal{U}_ℓ : na demonstração do Teorema 3.6, vimos que a homotopia $H_{s\ell}$ descreve curvas de soluções que se mantêm em $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}_\alpha$. Em cada \mathcal{R}_ℓ temos exatamente $\binom{n}{\ell}$ soluções cujo sinal de $\det(DF_{s\ell}(\cdot))$ em cada uma dessas soluções é $(-1)^{n+\ell}$. Logo, os graus acima são somatórios de números binomiais com os devidos sinais:

$$\deg(F_{s\ell}, \mathcal{U}_\ell, \hat{w}) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} = (-1)^{n+\ell} \binom{n-1}{\ell}.$$