4
O caso $p\ell$-admissível

Queremos estudar aplicações $a\ell$-admissíveis, mas para isso é muito conveniente considerar antes o caso $p\ell$-admissível,

$$F_{p\ell}(u) = Au - f_{p\ell}(u), \text{ onde } f_{p\ell,i}(x) = bx^+ - ax^- \text{ e}$$

$$x^+ = \max(x, 0),\ x^- = \max(-x, 0).$$

Aplicações $p\ell$-admissíveis são homogêneas, no sentido que $F_{p\ell}(tu) = tF_{p\ell}(u)$, para $t > 0$. Isso traz simplificações ao problema e faz com que possamos esperar que aplicações $F_{p\ell}$ descrevam bem o comportamento assintótico de aplicações $F_{a\ell}$.

Lembramos que $F_{p\ell}$ é apenas suave (linear!) quando restrita a cada ortante, e contínua em todo seu domínio. Estamos interessados no caso *não ressonante*, quando $DF_{p\ell}$ é inversível no interior de cada ortante.

Lema 4.1 *Uma aplicação $p\ell$-admissível não ressonante é própria.*

Demonstração:
Em cada ortante, $F_{p\ell}$ é linear inversível, logo leva infinito a infinito. $\square$

4.1
Contando soluções de $F_{p\ell}(u) = y - tp$, $p > 0$ e $t \gg 0$

Os resultados a seguir indicam a possibilidade de um grande número de pré-imagens da forma $F_{p\ell}^{-1}(w)$, $w = y - tp < 0$, $p > 0$ e $t > 0$ suficientemente grande.

Proposição 4.2 *Sejam A uma matriz simétrica e $w < 0$. Então existem constantes a_0 e b_0 tais que se $a < a_0$ e $b_0 < b$ a imagem de $F_{p\ell} = A - f_{p\ell}$, para $f_{p\ell,i}(x) = bx^+ - ax^-$, está no semi-espaço $\mathcal{H}_w = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, w\rangle > 0\}$.*

A escolha de a_0 e b_0 apropriados depende de w e não é uniforme a medida que w se aproxima da fronteira do ortante positivo.

A *base canônica de um ortante* $\mathcal{O}$ é o subconjunto de $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ que gera $\mathcal{O}$ com coordenadas positivas. Por exemplo, para o ortante de $\mathbb{R}^5$ cujos pontos interiores têm sinais $(+,+,-,+,-)$, sua base canônica é $\{e_1, e_2, -e_3, e_4, -e_5\}$.

Demonstração:

Em cada ortante $\mathcal{O}$, $F_{p\ell}$ é igual à transformação linear $F_{p\ell}^{\mathcal{O}} = A - D^{\mathcal{O}}$, onde $D^{\mathcal{O}}$ é uma matriz diagonal que na entrada jj vale a se os pontos no interior de $\mathcal{O}$ têm j-ésima coordenada negativa ou b caso contrário. Vamos usar a notação $D^{\mathcal{O}} = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, onde cada d_j pode ser a ou b.

É claro que o resultado segue se mostrarmos que, para cada ortante $\mathcal{O}$, $F_{p\ell}^{\mathcal{O}}$ leva a base canônica de $\mathcal{O}$ para $\mathcal{H}_w$.

Vamos supor inicialmente que $d_j = a$. Então

$$F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(-e_j) = -[A - \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, \underbrace{a}_{d_j}, \ldots, d_n)]e_j = ae_j - Ae_j$$

e assim $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(-e_j), w\rangle = aw_j - \langle Ae_j, w\rangle$. Logo, para ter $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(-e_j), w\rangle > 0$, basta que $a < \dfrac{\langle Ae_j, w\rangle}{w_j}$. Escolhamos então $a_0 = \min\limits_j \left\{ \dfrac{\langle Ae_j, w\rangle}{w_j} \right\}$.

Da mesma forma, se $d_j = b$, obtemos $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(e_j), w\rangle = \langle Ae_j, w\rangle - bw_j$, e garantimos que $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(e_j), w\rangle > 0$ se tomarmos $b_0 = \max\limits_j \left\{ \dfrac{\langle Ae_j, w\rangle}{w_j} \right\}$. □

Corolário 4.3 *Seja $F_{p\ell}$ como na proposição acima e suponha ainda que A possua um autovetor $\phi > 0$ associado ao autovalor λ. Então se $a < \lambda < b$ as imagens por $F_{p\ell}^{\mathcal{O}} = A - \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de cada ortante $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ estão contidas no semi-espaço Ω dado por*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, -\phi\rangle > 0\}.$$

Demonstração:

Como na proposição anterior, se $d_j = a$ obtemos $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(-e_j), \phi\rangle = (a - \lambda)\phi_j$. Logo, se $a < \lambda$ concluímos que $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(-e_j), \phi\rangle < 0$. Se $d_j = b$, $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(e_j), \phi\rangle = (\lambda - b)\phi_j$. Logo, se $b > \lambda$ concluímos que $\langle F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(e_j), \phi\rangle < 0$. □

Mais do que um corolário, o último resultado é um escólio da proposição. As últimas figuras do Capítulo 2 fornecem exemplos.

Assim, o número de soluções $F_{p\ell}(u) = w$, $w = y - tp < 0$, $p > 0$ e $t > 0$ suficientemente grande, é no máximo 2^n no caso não ressonante. No teorema seguinte, apresentamos hipóteses que garantem a existência desse número máximo de soluções. Na verdade, a demonstração do teorema independe da proposição acima.

Teorema 4.4 *Seja A uma matriz real e simétrica. Existem constantes $a_0 < 0 < b_0$ tais que, para $a < a_0$ e $b > b_0$, o número de soluções da aplicação $p\ell$-admissível $F_{p\ell}(u) = w$, $w = y - tp < 0$, $p > 0$ e $t > 0$ suficientemente grande, é igual a 2^n. Mais ainda, existe exatamente uma solução no interior de cada ortante $\mathcal{O}$ e para tais parâmetros a e b, $F_{p\ell}$ é não ressonante.*

Demonstração:
Tomemos dois números a e b tais que $a < \min\{A_{ii}\}$ e $\max\{A_{ii}\} < b$. Queremos mostrar que, para $a < a_0$ e $b > b_0$, a imagem do interior de cada ortante $\mathcal{O}$ pela aplicação correspondente $F_{p\ell}^{\mathcal{O}}$ contém w. Ou, equivalentemente, que w é uma combinação linear positiva das imagens dos vetores da base canônica de cada ortante.

Seja $G^{\mathcal{O}}$ a matriz cujas colunas são as imagens por $F_{p\ell}^{\mathcal{O}}$ dos vetores da base de $\mathcal{O}$. Defina $s_j = -1$ se $d_j = a$ ou $s_j = 1$ se $d_j = b$. Logo as colunas de $G^{\mathcal{O}}$ são $G_j^{\mathcal{O}} = s_j F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(e_j) = s_j[A - \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]e_j = s_j[Ae_j - d_j e_j]$, e a diagonal de $G^{\mathcal{O}}$ é formada por $G_{jj}^{\mathcal{O}} = s_j[A_{jj} - d_j]$. Se $d_j = a$ então $G_{jj}^{\mathcal{O}} = a - A_{jj} < 0$ pois $a < \min\{A_{ii}\}$. Analogamente, se $d_j = b$ então $G_{jj}^{\mathcal{O}} = A_{jj} - b < 0$ pois $\max\{A_{ii}\} < b$. Portanto, a diagonal de $G^{\mathcal{O}}$ possui todas as entradas estritamente negativas. Pelo Teorema de Gershgorin, já que as posições fora da diagonal não dependem de a e b, existem constantes $a_1 < 0$ e $b_1 > 0$ tais que, para $a < a_1$ e $b > b_1$, a matriz $G^{\mathcal{O}}$ seja inversível. De fato,

$$\mathrm{sgn}(\det(G^{\mathcal{O}})) = (-1)^n. \tag{4-1}$$

Mostraremos que existem constantes a_0 e b_0 tais que para $a < a_0$ e $b > b_0$ a solução $x^{\mathcal{O}}$ do sistema $G^{\mathcal{O}}x = w$ é estritamente positiva. Pela regra de Cramer, $x^{\mathcal{O}}$ é dado por

$$x_j^{\mathcal{O}} = \frac{\det(G^{\mathcal{O},j})}{\det(G^{\mathcal{O}})} \tag{4-2}$$

onde $G^{\mathcal{O},j}$ é a matriz obtida de $G^{\mathcal{O}}$ substituindo a j-ésima coluna por w. Assim, as posições diagonais de $G^{\mathcal{O},j}$ são de três tipos: $a - A_{ii}$, $A_{ii} - b$, para $i \neq j$ ou w_j. Para os dois primeiros tipos, podemos escolher a e b grandes o suficiente em módulo para que o monômio correspondente ao produto das entradas das diagonais domine todos os outros na expansão do determinante de $G^{\mathcal{O},j}$. Mais: todas as entradas diagonais ainda são negativas. Assim

$$\mathrm{sgn}\, x_j^{\mathcal{O}} = \mathrm{sgn}\, \frac{\det(G^{\mathcal{O},j})}{\det(G^{\mathcal{O}})} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1,$$

logo todas as coordenadas de $x_j^{\mathcal{O}}$ são positivas. Daí, segue também as soluções de $F_{p\ell}(u) = w$ estão cada uma no interior de um ortante. Escolhendo a e b de forma que os cálculos acima sejam efetuáveis para cada ortante $\mathcal{O}$, garante-se a não ressonância de $F_{p\ell}$. □

Em [CFS] os autores mostram que o problema

$$\begin{aligned} -u'' &= f_{p\ell}(u) - \operatorname{sen}(x) \quad \text{em} \quad (0,\pi) \\ u(0) &= u(\pi) \;=\; 0 \end{aligned}$$

com $f_{p\ell}(u) = bu^+ - au^-$, para $a < \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k < b < \lambda_{k+1}$ tem exatamente $2k$ soluções. Aqui $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, são os autovalores do problema livre $-p'' = \lambda p$ em $(0,\pi)$, $p(0) = p(\pi) = 0$. Para k pequeno, o resultado é compatível com a chamada conjectura de Lazer-McKenna [LMcK], ao aumentar k, o número de soluções essencialmente dobra sempre que um novo autovalor interage com a não linearidade.

Considere a matriz

$$A_n = (n+1)^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n\times n} .$$

proveniente da discretização por diferenças finitas do operador $-D^2$ num intervalo particionado por n pontos. Quando a dimensão é $n = 15$, os autovalores de A_{15} estão entre $\lambda_1 \approx 0.03843$ e $\lambda_{15} \approx 3.96157$. Analisamos uma família de aplicações $p\ell$-admissíveis $F_{p\ell}^k(u) = A_{15}u - f_{p\ell}^k(u)$ para não linearidades $f_{p\ell}^k$ dados pelos parâmetros

$$a = a_k = \frac{\lambda_1}{2}, \quad b_k = \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}, \; k = 1, \ldots, 14 \text{ and } b_{15} = \frac{\lambda_{15} + \lambda_1}{2}.$$

Assim, quando k aumenta por 1, um novo autovalor interage com$f_{p\ell}^k$. Pela homogeneidade, o número de soluções de $F_{p\ell}^k(u) = -t\phi_1$, onde ϕ_1 é o autovetor normalizado associado à λ_1, é independente de $t > 0$ e dado por

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
# sols	2	4	6	8	12	12	22	24	26	100	286	634	972	1320	2058

4.2 Matrizes de Stieltjes

No Apêndice 6.4 observamos que discretizações por diferenças finitas do laplaciano com condições de Dirichlet dão origem a matrizes de *Stieltjes*, matrizes simétricas positivas definidas que possuem entradas fora da diagonal não positivas. Nesta seção supomos que a matriz A é uma matriz de Stieltjes.

Lema 4.5 *Seja $A = L+U$ uma matriz de Stieltjes onde L é triangular inferior e U é triangular superior com entradas diagonais nulas. Então a solução do sistema $Ax = b$, $b > 0$, é um vetor positivo.*

Demonstração:
Aplicando o método de Gauss-Seidel à equação $(L+U)x = b$ obtemos a iteração

$$Lx^{k+1} = -Ux^k + b$$

que é convergente para qualquer x^0 pois a matriz A é simétrica positiva definida (Teorema 10.1.2 em [GvL]). Seja x^∞ esse valor limite. Em particular, tomemos x^0 igual ao vetor nulo. Na fórmula de recorrência acima, se $x^k \geq 0$ temos $-Ux^k + b > 0$ pois $b > 0$ e $-Ux^k \geq 0$ (porque A é uma matriz de Stieltjes). Assim, definindo $p^k = -Ux^k + b$, as coordenadas de x^{k+1} são determinadas pelo processo de substituição progressiva (começando pela primeira coordenada) pois L é triangular inferior. Agora, a diagonal de L é estritamente positiva (pois A é positiva definida) e suas outras entradas são não positivas, assim a solução x^{k+1} de $Lx^{k+1} = p^k > 0$ também é positiva. Como as coordenadas de x^{k+1} são dadas por

$$x_i^{k+1} = \frac{(-Ux^k + b)_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} x_j^{k+1}}{L_{i,i}}$$

vemos que x^∞ é estritamente positivo. De fato, $x_i^\infty \geq \dfrac{b_i}{L_{i,i}}$. □

Teorema 4.6 *Seja A uma matriz de Stieltjes, com autovalores extremos λ_1 e λ_n, $a < \lambda_1$. Então, existe $b_0 > \lambda_n$ para o qual a equação $F_{p\ell}(u) = w$, $w = y - tp < 0$, $p > 0$ e $t > 0$ suficientemente grande, tem exatamente 2^n soluções para todo $b > b_0$. Mais ainda, existe exatamente uma solução no interior de cada ortante $\mathcal{O}$ e para tais parâmetros a e b, $F_{p\ell}$ é não ressonante.*

O argumento da demonstração parece mais flexível do que aquele empregado na seção anterior: em vez de depender da regra de Cramer para encontrar soluções em cada ortante, elas são alcançadas por uma iteração.

Demonstração:
Vamos introduzir outra notação para a aplicação $F_{p\ell}^{\mathcal{O}}$ que representa F no ortante $\mathcal{O}$. Lembramos que $D^{\mathcal{O}}$ é a matriz diagonal com entradas diagonais dadas por a ou b, dependendo dos sinais das coordenadas dos pontos no interior de $\mathcal{O}$. Seja $E^{\mathcal{O}}$ a matriz cujas colunas são os vetores da base do ortante $\mathcal{O}$ na ordem natural — $E^{\mathcal{O}}$ é uma matriz diagonal com entradas diagonais iguais a ± 1, com sinais negativos exatamente quando a posição diagonal correspondente de $D^{\mathcal{O}}$ vale a. Para facilitar a notação, introduzimos também a matriz de permutação P com a propriedade que $\tilde{D}^{\mathcal{O}} = PD^{\mathcal{O}}P^{-1}$ e $\tilde{E}^{\mathcal{O}} = PE^{\mathcal{O}}P^{-1}$ são da forma

$$\tilde{D}^{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} aI_k & 0 \\ 0 & bI_\ell \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}^{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_\ell \end{bmatrix}.$$

onde $k+\ell = n$. Existem várias matrizes P com essa propriedade, uma qualquer serve. É fácil ver que $u \in \operatorname{int} \mathcal{O}$ se e somente se $u = E^{\mathcal{O}}q$, para algum $q > 0$.

Portanto, resolver $F_{p\ell}^{\mathcal{O}}(u) = w$, para $u \in \operatorname{int} \mathcal{O}$, é equivalente a resolver $(A - D^{\mathcal{O}})E^{\mathcal{O}}q = w$ para $q > 0$, que por sua vez é equivalente a $(\tilde{A} - \tilde{D}^{\mathcal{O}})\tilde{E}^{\mathcal{O}}\tilde{q} = \tilde{w}$ onde $\tilde{D}^{\mathcal{O}}$ e $\tilde{E}^{\mathcal{O}}$ já foram definidos, $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{q} = Pq$ e $\tilde{w} = Pw$. A situação é completamente análoga à inicial: $\tilde{D}^{\mathcal{O}}$ continua diagonal, com a's e b's dispostos como mostrado acima, $\tilde{A}$ é uma matriz de Stieltjes, $\tilde{q} > 0$ e $\tilde{w} < 0$. Mais um passo: multiplicando por $\tilde{E}^{\mathcal{O}}$, somos levados a resolver

$$\tilde{E}^{\mathcal{O}}(\tilde{A} - \tilde{D}^{\mathcal{O}})\tilde{E}^{\mathcal{O}}\tilde{q} = (\tilde{E}^{\mathcal{O}}\tilde{A}\tilde{E}^{\mathcal{O}} - \tilde{E}^{\mathcal{O}}\tilde{D}^{\mathcal{O}}\tilde{E}^{\mathcal{O}})\tilde{q} = \tilde{E}^{\mathcal{O}}\tilde{w}.$$

Vamos escrever esta equação em blocos matriciais (note que $\tilde{E}^{\mathcal{O}}$ e $\tilde{D}^{\mathcal{O}}$ comutam, e $\tilde{E}^{\mathcal{O}} = (\tilde{E}^{\mathcal{O}})^{-1}$):

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 - aI_k & -Q \\ -Q^T & \tilde{A}_2 - bI_\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix}. \tag{4-3}$$

Todas as entradas de Q são não positivas.

O sistema em blocos é equivalente a

$$\begin{cases} (\tilde{A}_1 - aI_k)\tilde{q}_1 &= \quad Q\tilde{q}_2 - \tilde{w}_1 \\ (\tilde{A}_2 - bI_\ell)\tilde{q}_2 &= Q^T\tilde{q}_1 + \tilde{w}_2. \end{cases} \tag{4-4}$$

Da segunda equação,

$$\tilde{q}_2 = (\tilde{A}_2 - bI_\ell)^{-1}(Q^T\tilde{q}_1 + \tilde{w}_2) \tag{4-5}$$

e, substituindo na primeira,

$$(\tilde{A}_1 - aI_k)\tilde{q}_1 = Q(\tilde{A}_2 - bI_\ell)^{-1}(Q^T\tilde{q}_1 + \tilde{w}_2) - \tilde{w}_1. \tag{4-6}$$

Fazendo $b \to \infty$, $\tilde{q}_1$ converge para a solução $\tilde{q}_1^\infty$ de $(\tilde{A}_1 - aI_k)\tilde{q}_1^\infty = -\tilde{w}_1$,

$$\tilde{q}_1^\infty = (\tilde{A}_1 - aI_k)^{-1}(-\tilde{w}_1). \tag{4-7}$$

Como $a < \lambda_1$ e os autovalores de $\tilde{A}_1$ são cotados inferiormente por λ_1, por entrelaçamento (Teorema 4.3.8 em [HOR]), a matriz $\tilde{A}_1 - aI_k$ é positiva definida, assim como $(\tilde{A}_1 - aI_k)^{-1}$. Em particular, $\tilde{q}_1$ é limitado quando $b \to \infty$. Para b suficientemente grande, a série de Neumann $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ (Teorema 17.2 em [LAX2]) dá

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2 &= -\frac{1}{b}\left(I_\ell + \frac{\tilde{A}_2}{b} + O(b^{-2})\right)(Q^T\tilde{q}_1 + \tilde{w}_2) \\ &= -\frac{1}{b}(Q^T\tilde{q}_1 + \tilde{w}_2) + O(b^{-2}) \end{aligned} \tag{4-8}$$

Na última igualdade usamos o fato que $\tilde{q}_1$ é limitado em $b > \lambda_n$.

Como $\tilde{A}_1 - aI_k$ é uma matriz de Stieltjes, pelo Lema 4.5 acima, vemos que o vetor $\tilde{q}_1^\infty$ possui todas as coordenadas estritamente positivas. Como Q^T possui todas as entradas não positivas, temos que para $b > 0$ suficientemente grande, $\tilde{q}_2 > 0$. Finalmente, escolhendo-se a e b de forma que os cálculos acima sejam efetuáveis para cada ortante $\mathcal{O}$, garante-se a não ressonância de $F_{p\ell}$. $\square$