

5

O caso al -admissível

Finalmente, consideramos aplicações al -admissíveis. Seja $F_{al} = A - f_{al}$, onde a não linearidade é descrita por uma matriz diagonal de entradas diagonais $f_{al,i}(\cdot)$ com parâmetros assintóticos a e b . Fixado um ortante \mathcal{O} com padrão de sinais $s_1 s_2 \dots s_n$, vamos novamente designar por $D^{\mathcal{O}}$ a matriz diagonal com entradas $D_{ii}^{\mathcal{O}} = a$ se $s_i < 0$ e $D_{ii}^{\mathcal{O}} = b$ se $s_i > 0$. A aplicação F_{al} é não ressonante se todas as matrizes $A - D^{\mathcal{O}}$, junto com seus menores principais (isto é, as matrizes obtidas removendo linhas e colunas de mesmos índices de $A - D^{\mathcal{O}}$), são inversíveis.

Neste capítulo, mostramos que a equação $F_{al}(u) = y - tp$, $p > 0$, possui exatamente 2^n soluções para $t > 0$ suficientemente grande desde que a não linearidade f_{al} seja assintoticamente linear e convexa. Veremos ainda que há exatamente uma solução em cada ortante de \mathbb{R}^n . Analogamente ao caso superlinear, para demonstrar tais fatos, utilizaremos uma homotopia $H_{al} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H_{al}(\tau, u) = \tau F_{al}(u) + (1 - \tau)F_{pl}(u)$ que faz a deformação entre os casos pl -admissível e al -admissível possuindo os mesmos parâmetros assintóticos a e b .

Lema 5.1 *Sejam os parâmetros a e b tais que F_{al} é não ressonante. Então a homotopia $H_{al} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H_{al}(\tau, u) = \tau F_{al}(u) + (1 - \tau)F_{pl}(u)$ é própria.*

Demonstração:

Suponha por absurdo que a sequência $z^k = H_{al}(\tau^k, u^k)$ seja limitada, mas $|(\tau^k, u^k)| \rightarrow \infty$. Passando para uma subsequência, podemos supor que os vetores normalizados (tome a norma sup, por exemplo) $u^k/|u^k|$ converjam para um vetor unitário u^* . Visto que $H_{al}(\tau, u) = Au - (\tau f_{al} + (1 - \tau)f_{pl})$ temos que dividindo $H_{al}(\tau^k, u^k) = z^k$ por $|u^k|$ obtemos

$$A \frac{u^k}{|u^k|} - \left[\dots, \frac{\tau^k f_{al,i}(u_i^k) + (1 - \tau^k) f_{pl,i}(u_i^k)}{|u^k|}, \dots \right]^T = \frac{z^k}{|u^k|} \quad (5-1)$$

o que leva a

$$A \frac{u^k}{|u^k|} - \left[\dots, \frac{\tau^k f_{al,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right) + (1 - \tau^k) f_{pl,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right)}{|u^k|}, \dots \right]^T = \frac{z^k}{|u^k|} \quad (5-2)$$

Fazendo $|u^k| \rightarrow \infty$ temos que $\frac{z^k}{|u^k|} \rightarrow 0$. Se a coordenada $u_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_i^k}{|u^k|}$ é negativa, nula ou positiva teremos, respectivamente,

$$\frac{\tau^k f_{al,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right) + (1 - \tau^k) f_{pl,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right)}{|u^k|} \rightarrow au_i^*,$$

$$\frac{\tau^k f_{al,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right) + (1 - \tau^k) f_{pl,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right)}{|u^k|} \rightarrow 0 = au_i^*$$

e

$$\frac{\tau^k f_{al,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right) + (1 - \tau^k) f_{pl,i} \left(\frac{u_i^k}{|u^k|} |u^k| \right)}{|u^k|} \rightarrow bu_i^*.$$

Tomando o limite em (5-2)

$$Au^* - (d_1 u_1^*, d_2 u_2^*, \dots, d_n u_n^*)^T = (A - \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n))u^* = 0,$$

onde cada entrada d_i pode ser igual a a ou b e, portanto, concluímos que $u^* \neq 0$ está no núcleo da matriz $A - D$, onde D é a matriz diagonal que possui elementos diagonais iguais aos valores a ou b . Isso contradiz a hipótese de não ressonância. \square

Como descrito na Seção 2.3, o conjunto crítico de uma aplicação $p\ell$ -admissível não ressonante $H_{al}(0, \cdot)$ está contido na união dos hiperplanos coordenados, logo numa cruz de espessura nula. Para cada $\tau \in [0, 1)$ a aplicação $H_{al}(\tau, u) = \tau F_{al}(u) + (1 - \tau) F_{pl}(u)$ deixa de ser diferenciável sobre os hiperplanos coordenados. Definimos o conjunto crítico de $H_{al}(\tau, \cdot)$ como a união dos hiperplanos coordenados com os pontos u para os quais a jacobiana $DH_{al}(\tau, \cdot)$ não é inversível.

A próxima proposição garante a existência de uma cruz \mathcal{X}_α que contém todos os conjuntos críticos de $H_{al}(\tau, \cdot)$ para $\tau \in [0, 1]$.

Proposição 5.2 *Existe $\alpha > 0$ tal que os conjuntos críticos $\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}(H_{al}(\tau, \cdot))$ estão contidos na cruz \mathcal{X}_α para todo $\tau \in [0, 1]$.*

Demonstração:

Claramente, qualquer cruz contém os hiperplanos coordenados. Para um

ponto u no interior de um ortante \mathcal{O} , temos

$$DH_{al}(\tau, u) = A - D^{\mathcal{O}} + \tau(D^{\mathcal{O}} - \tilde{D}^{\mathcal{O}}),$$

onde $D^{\mathcal{O}} = \text{Diag}(d_i)$, $d_i = a$ ou $d_i = b$, dependendo do padrão de sinais do ortante \mathcal{O} , e $\tilde{D}^{\mathcal{O}} = \text{Diag}(f'_{al,1}(u_1), f'_{al,2}(u_2), \dots, f'_{al,n}(u_n))$. Pela ressonância, a matriz $A - D^{\mathcal{O}}$ é inversível e, portanto, também o são as matrizes suficientemente próximas à ela. Assim, para N suficientemente grande, $\sup_i |u_i| > N$ implica que $DH_{al}(\tau, u)$ é inversível. Logo, tome $\alpha = N$.

□

5.1

Outra construção do conjunto crítico de F_{al}

O conjunto crítico da aplicação superlinear $\tilde{F}_{sl}(u) = Au - u^2/2$ é

$$\mathcal{C}(\tilde{F}_{sl}) = \{u \mid \det(A - \text{Diag}(u_1, u_2, \dots, u_n)) = 0\}.$$

Já o conjunto crítico de $F_{al}(u) = Au - f_{al}(u)$ é

$$\mathcal{C}(F_{al}) = \{u \mid \det(A - \text{Diag}(f'_{al,1}(u_1), f'_{al,2}(u_2), \dots, f'_{al,n}(u_n))) = 0\}.$$

Se supusermos que cada coordenada $f_{al,i}$ da não linearidade é estritamente convexa, por exemplo, a função $f'_{al,i} : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ é um homeomorfismo, ou mesmo um difeomorfismo se $f_{al,i}$ é de classe C^2 , com $f''_{al,i} > 0$. Vamos supor essas hipóteses por conveniência.

Proposição 5.3 *Seja $\tilde{F}_{sl}(u) = Au - u^2/2$. Suponha $f_{al,i}$, $i = 1, \dots, n$ suaves, estritamente convexas tais que $f'_{al,i} : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ sejam difeomorfismos. Então o difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow (a, b)^n$,*

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((f'_{al,1})(x_1), (f'_{al,2})(x_2), \dots, (f'_{al,n})(x_n)),$$

é um homeomorfismo entre o conjunto crítico $\mathcal{C}(F_{al})$ e a interseção do conjunto crítico $\mathcal{C}(\tilde{F}_{sl})$ com a caixa $(a, b)^n$. Se $\mathcal{C}(\tilde{F}_{sl}) \cap (a, b)^n$ é uma união de superfícies, Ψ passa a ser um difeomorfismo entre $\mathcal{C}(F_{al})$ e $\mathcal{C}(\tilde{F}_{sl}) \cap (a, b)^n$.

A construção permite obter inclusões de $\mathcal{C}(F_{al})$ em faixas de maneira simples.

Proposição 5.4 *Com a notação da proposição acima, suponha que o fecho \mathcal{C}_f de $\mathcal{C}(\tilde{F}_{s\ell}) \cap (a, b)^n$ (na caixa $[a, b]^n$) não contém nenhum vértice de $[a, b]^n$. Então existe uma cruz contendo $\mathcal{C}(F_{al})$.*

A condição é necessária e suficiente, como se vê pela demonstração. Se F_{al} é não ressonante, a hipótese é automaticamente satisfeita: existe uma cruz contendo $\mathcal{C}(F_{al})$.

Demonstração:

Seja $p \in \mathcal{C}(\tilde{F}_{s\ell})$ na fronteira da caixa, $p_n \in \mathcal{C}(\tilde{F}_{s\ell})$ no interior, convergentes a p . Então $\Phi^{-1}(p_n) \in \mathcal{C}(F_{al})$, indo para infinito. Se p não for um vértice da caixa $[a, b]^n$, é porque alguma coordenada de p difere de a e b — a mesma coordenada dos pontos $\Phi^{-1}(p_n)$ então é uniformemente limitada. O resultado agora segue por compacidade. \square

O exemplo seguinte ilustra uma situação ressonante, onde conjuntos críticos não estão em cruces.

Exemplo 5.5: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(cujo espectro é $\{\approx 3.438, \approx 7.562\}$) e a não linearidade $f = (f_1, f_2)$, onde

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{38x \arctan(x) - 19 \ln(1 + x^2) + 65x\pi}{7\pi}.$$

Então $f'_i : \mathbb{R} \rightarrow (\frac{46}{7} \approx 6.571, 12)$ é um difeomorfismo. Na Figura 5.2 exibimos o conjunto crítico de $F_{al} = A - f$ que é dado pela função

$$y(x) = -\tan \left[\frac{\pi(13\pi + 23 \arctan(x))}{2(15\pi + 19 \arctan(x))} \right].$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$, nenhuma cruz pode conter $\mathcal{C}(F_{al})$.

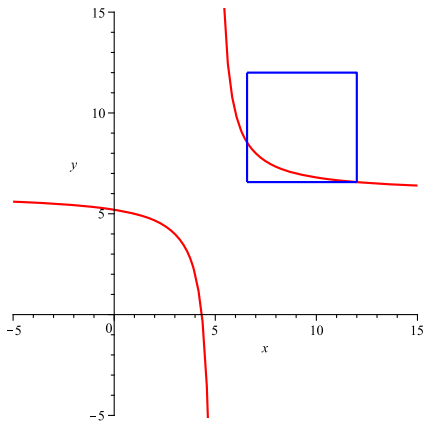


Figura 5.1: $\mathcal{C}(\tilde{F}_{sl}), \tilde{F}_{sl}(u) = Au - (u_1^2, u_2^2)^T$

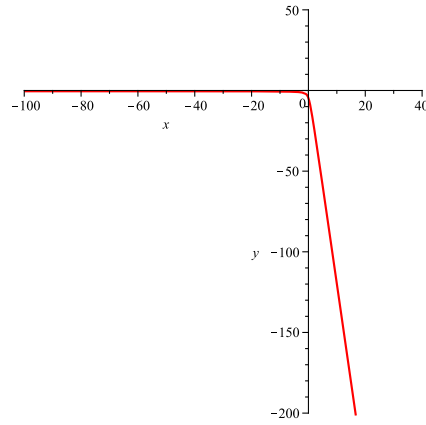


Figura 5.2: $\mathcal{C}(F_{al})$

□

5.2

Contando soluções de $F_{al}(u) = y - tp, p > 0$ e $t \gg 0$

Lema 5.6 *Sejam F_{al} e F_{pl} aplicações não ressonantes com parâmetros assintóticos a e b , associadas pela homotopia $H_{al} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H_{al}(\tau, u) = \tau F_{al}(u) + (1 - \tau)F_{pl}(u)$. Seja $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ uma cruz com faixas de espessura α e $p > 0$ tal que toda solução de $F_{pl}(u) = -p$ somente possui entradas não nulas. Considere a semirreta $r(t) = y - tp$ e $t > 0$. Então existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > t_0$, temos*

$$r(t) \notin H_{al}(\tau, \mathcal{X}_\alpha), \forall \tau \in [0, 1].$$

Demonstração:

Começamos seguindo os passos do Lema 5.1. Suponha por absurdo que existe $\tau^k \in [0, 1], t^k \rightarrow \infty$ e $u^k \in \mathcal{X}_\alpha \cap \mathcal{O}$ para algum ortante \mathcal{O} tal que

$$\frac{1}{|u^k|} H_{al}(\tau^k, u^k) = \frac{r(t)}{|u^k|} = \frac{y - tp}{|u^k|}.$$

Pelo Lema 5.1, H_{al} é própria, logo $u^k \rightarrow \infty$ e então podemos supor que $u^k/|u^k| \rightarrow u^*$. Visto que a sequência de u^k 's estão numa cruz, existe alguma coordenada i em que u_i^k é uniformemente limitada, portanto, $u_i^* = 0$.

Fazendo $k \rightarrow \infty$ o membro esquerdo se torna:

$$(A - \text{Diag}(d_1, \dots, d_n))u^*, \quad \text{onde } d_i = a, b \text{ ou } a,$$

dependendo se u_i^* é negativo, positivo ou nulo. A convergência do membro direito implica que $t^k/|u^k| \rightarrow c \geq 0$. Assim,

$$(A - \text{Diag}(d_1, \dots, d_n))u^* = (A - D^{\mathcal{O}})u^* = -cp, \quad p > 0.$$

Se $c > 0$, a equação acima garante que u^* possuindo alguma coordenada nula é solução de $F_{pl}(u^*) = -cp$, então, por homogeneidade, $u = u^*/c$ é solução de $F_{pl}(u) = -p$, uma contradição. Se $c = 0$, temos $(A - D^{\mathcal{O}})u^* = 0$ com $u^* \neq 0$, o que contradiz a hipótese de ressonância. \square

As próximas duas proposições garantem que semirretas $r(t) = y - tp$, $p > 0$, abandonam a imagem de cruces quando t é suficientemente positivo, para a homotopia $H_{al}(\tau, u) = \tau F_{al}(u) + (1 - \tau)F_{pl}(u)$ e alguma das hipóteses abaixo é satisfeita:

- (I) $a < \lambda_1$ é suficientemente pequeno e $b > \lambda_n$ é suficientemente grande;
- (II) a matriz A é de Stieltjes, $a < \lambda_1$ e $b > \lambda_n$ é suficientemente grande.

Proposição 5.7 *Sejam F_{al} e F_{pl} aplicações admissíveis com parâmetros assintóticos a e b , associadas pela homotopia usual H_{al} . Sejam $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ uma cruz com faixas de espessura α e a semirreta $r(t) = y - tp$, $t > 0$ e $p > 0$. Se $a < \lambda_1$ é suficientemente pequeno e $b > \lambda_n$ é suficientemente grande, então existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > t_0$, temos*

$$r(t) \notin H_{al}(\tau, \mathcal{X}_\alpha), \forall \tau \in [0, 1].$$

Demonstração:

Pelo Teorema 4.4 obtemos parâmetros a e b satisfazendo as hipóteses acima e tais que F_{al} e F_{pl} são não ressonantes. Portanto, a equação $(A - D^{\mathcal{O}})u = -cp$, $p > 0$, possui somente soluções com todas as entradas não nulas. Agora, basta aplicar o Lema 5.6 acima. \square

Proposição 5.8 *Sejam $F_{al} = A - f_{al}$ e $F_{pl} = A - f_{pl}$ aplicações admissíveis com parâmetros assintóticos a e b , associadas pela homotopia usual H_{al} . Sejam $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ uma cruz com faixas de espessura α e a semirreta $r(t) = y - tp$, $t > 0$ e $p > 0$. Se a matriz A é de Stieltjes, $a < \lambda_1$ e $b > \lambda_n$ é suficientemente grande, então existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > t_0$, temos*

$$r(t) \notin H_{al}(\tau, \mathcal{X}_\alpha), \forall \tau \in [0, 1].$$

Demonstração:

Esta demonstração é análoga à da proposição anterior, porém devemos aplicar o Teorema 4.6. \square

A seguir, apresentamos a versão discreta do Teorema 1 de [SOL]: para $t > 0$ suficientemente grande, próximo a cada solução de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_{p\ell}(u) + \phi & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

existe uma única solução de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_{al}(u) + t\phi & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado com fronteira suave e $\phi \in L^2(\Omega)$.

Proposição 5.9 *Sejam $F_{al} = A - f_{al}$ al -admissível não ressonante e f_{al} com funções coordenadas tais que $f'_{al,i} : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ são difeomorfismos. Então existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$ o problema $F_{al}(u) = -tp$, com $p > 0$, possui ao menos o mesmo número de soluções do problema $F_{p\ell}(u) = Au - bu^+ + au^- = -p$.*

Demonstração:

É claro que $F_{p\ell}$ também é não ressonante. Seja u^* uma solução de $F_{p\ell}(u) = -p$. Como tais soluções são pontos regulares, por estarem no interior de ortantes, pelo Teorema da Função Inversa existe $\epsilon > 0$ tal que $F_{p\ell}$ é um homeomorfismo entre $B_\epsilon(u^*)$ e $F_{p\ell}(B_\epsilon(u^*))$. Em particular, $\text{dist}(F_{p\ell}(\partial B_\epsilon), -p) = \delta \neq 0$ e $\text{deg}(F_{p\ell}, B_\epsilon, -p) = \pm 1$. Além disso, $\text{dist}(F_{p\ell}(\partial B_{t\epsilon}(tu^*)), -tp) = t\delta$, para $t > 0$, por homogeneidade de $F_{p\ell}$ e $\text{deg}(F_{p\ell}, B_{t\epsilon}(tu^*), -tp) = \pm 1$. Escreva

$$F_{p\ell} = F_{al}(x) + r(x), \text{ onde } r(x) = f_{al}(x) - f_{p\ell}(x) = f_{al}(x) - b(x)^+ + a(x)^-.$$

Assim $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{r(tu^*)}{t} = 0$ e existe t_0 para o qual, se $t > t_0$ e $|p| \in [|u^*| - \epsilon, |u^*| + \epsilon]$ então $|r(tp)| < t\delta/2$. Para esses valores de t , então,

$$\text{deg}(F_{al}, B_{t\epsilon}(tu^*), -tp) = \text{deg}(F_{p\ell}, B_{t\epsilon}(tu^*), -tp) \neq 0.$$

\square

Corolário 5.10 *Seja $F_{al} = A - f_{al}$ não ressonante, associado a uma matriz de Stieltjes A com menor autovalor λ_1 e f_{al} com funções coordenadas estritamente*

convexas. Para $a < \lambda_1$ e b suficientemente grande existe $t_0 > 0$ tal que o problema $F_{al}(u) = -tp$ possui ao menos 2^n soluções para todo $t > t_0$.

Demonstração:

É só combinar o Teorema 4.6 com o resultado acima. \square

Em [CFS] os autores mostram que o problema

$$\begin{aligned} -u'' &= f_{pl}(u) - \text{sen}(x) \quad \text{em } (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

com $f_{pl}(u) = bu^+ - au^-$, para $a < \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < b < \lambda_{k+1}$ tem exatamente $2k$ soluções. Aqui $\lambda_i = i^2$, $i = 1, 2, \dots$, são os autovalores do problema livre $-p'' = \lambda p$ em $(0, \pi)$, $p(0) = p(\pi) = 0$. Em seguida, como consequência do Teorema 1 em [SOL], deduzem que existe $t_0 > 0$ tal que o problema abaixo também possui exatamente $2k$ soluções para todo $t > t_0$

$$\begin{aligned} -u'' &= f_{al}(u) - t \text{sen}(x) \quad \text{em } (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

com $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{al,i}(x) = a$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{al,i}(x) = b$.

Para obter uma contrapartida discreta, falta mostrar que $F_{al}(u) = y - tp$ como acima tem *exatamente* 2^n soluções para t suficientemente grandes. Esse é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 5.11 *Sejam A uma matriz simétrica e a e b números reais satisfazendo alguma das duas hipóteses abaixo:*

(I) $a < \lambda_1$ é suficientemente pequeno e $b > \lambda_n$ é suficientemente grande;

(II) a matriz A é de Stieltjes, $a < \lambda_1$ e $b > \lambda_n$ é suficientemente grande.

Então para qualquer aplicação al -admissível $F_{al}(u) = Au - f_{al}(u)$ com parâmetros assintóticos a e b , existe $t_0 > 0$ tal que a equação $F_{al}(u) = y - tp$, $t > t_0$, $p > 0$, possui exatamente 2^n soluções. Mais ainda, existe exatamente uma solução no interior de cada ortante \mathcal{O} .

O argumento habitual, tentar inverter a correspondência entre soluções de $F_{pl}(u) = y - tp$ e $F_{al}(u) = y - tp$ descrita na proposição acima, não funciona: é necessário identificar aonde se encontram os conjuntos críticos.

Demonstração:

É uma questão de justapor as técnicas desenvolvidas até agora. Vamos novamente considerar a homotopia $H_{al} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H_{al}(\tau, u) =$

$\tau F_{al}(u) + (1 - \tau)F_{pl}(u)$ onde as não linearidades possuem os mesmos comportamentos assintóticos, o que garante não ressonância ao longo de toda a homotopia para as aplicações $F_\tau(\cdot) = H_{al}(\tau, \cdot)$ associadas.

O argumento geométrico que cota conjuntos críticos por uma cruz apresentado na Proposição 5.2 obtém uma mesma cruz \mathcal{X}_α para todas as F_τ . Note que a situação extrema, $\tau = 0$, tem seu conjunto crítico cotado por uma cruz de espessura zero, uma vez que o conjunto crítico de uma aplicação $p\ell$ -admissível está contido na união dos hiperplanos coordenados.

Agora, de acordo com as Proposições 5.7 e 5.8, existe t_0 tal que, para $t > t_0$, as semirretas $r(t) = y - tp$, $p > 0$, estão fora da imagem da cruz \mathcal{X}_α , e logo deixam de encontrar as imagens de todos os conjuntos críticos das aplicações F_τ .

Finalmente, estamos nas condições do argumento de deformação usado no Teorema 3.6: as soluções da equação $F_\tau(u) = y - tp$, para t suficientemente grande e $\tau \in [0, 1]$, consistem apenas de valores regulares, por estarem fora da cruz que contém os pontos críticos de cada aplicação da homotopia. Assim, cada aplicação da família tem exatamente uma solução por ortante, cada uma delas com o índice de Morse dado pelo número de coordenadas negativas em seu ortante. \square