

6 Apêndice

6.1 Definições e fatos básicos

Definição 6.1 *Uma equação diferencial parcial é semi-linear se possui a forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

onde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a função incógnita.

Teorema 6.2 (Teorema de Gershgorin) *Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $R_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$. Então todos autovalores de A estão na união dos n discos*

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}.$$

Mais ainda, se a união de k discos formam uma região conexa disjunta dos outros $n - k$ discos, então há precisamente k autovalores de A nesta região.

6.2 Bolsões

O conjunto crítico de uma função admissível genérica está dentro de uma cruz. Bolsões cotam as imagens dos conjuntos críticos. Mais precisamente, uma região convexa que contém a imagem de uma faixa por uma aplicação sl -admissível é um *bolsão*.

Teorema 6.3 *Sejam $F_{sl} = A - f$ sl -admissível e $g \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ tal que existem constantes $k_1 > 0$, k_2 , η e $\tilde{M} > 0$ com*

$$g \left(f \left(\sum_{i=1}^n c_i z_i \right) + \eta \right) \leq k_1 \sum_{i=1}^n f(z_i) + k_2, \quad \forall z = (z_1, \dots, z_n). \quad (6-1)$$

Então, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $|x_i| \leq M$ existem constantes $a_i < 0$, b_i e $\eta \geq 0$ tais que

$$a_i g(f(-X_i) + \eta) + b_i \geq \sum_{j \neq i}^n X_j \quad (6-2)$$

onde X_i é a i -ésima coordenada de $F_{sl}(x)$, isto é, $X_i = \langle A_i, x \rangle - f(x_i)$.

Demonstração:

Temos a desigualdade

$$\sum_{j \neq i}^n X_j \leq \theta_i \sum_{j \neq i}^n [-f(x_j)] + \tilde{b} \quad (6-3)$$

Aplicando f em $-X_i$ temos:

$$f(-X_i) = f(-\langle A_i, x \rangle + f(x_i))$$

como f é superlinear, existe uma constante $\eta \geq 0$ tal que para $f(z) + \eta$ positivo para todo z , aplicando g a $f(-X_i) + \eta$:

$$g(f(-X_i) + \eta) = g(f(-\langle A_i, x \rangle + f(x_i)) + \eta)$$

Usando a hipótese (6-1) obtemos:

$$\begin{aligned} g(f(-X_i) + \eta) &\leq k_1 \sum_{j \neq i}^n f(x_j) + k_2, & k_1 > 0 \\ -g(f(-X_i) + \eta) &\geq k_1 \sum_{j \neq i}^n [-f(x_j)] - \tilde{k}_2 \\ -\frac{1}{k_1} g(f(-X_i) + \eta) &\geq \sum_{j \neq i}^n [-f(x_j)] - \frac{\tilde{k}_2}{k_1} \\ -\frac{1}{k_1} g(f(-X_i) + \eta) + \frac{\tilde{k}_2}{k_1} &\geq \sum_{j \neq i}^n [-f(x_j)] \end{aligned}$$

Substituindo esta última desigualdade em (6-3) obtemos

$$\sum_{j \neq i}^n X_j \leq \theta_i \left[-\frac{1}{k_1} g(f(-X_i) + \eta) + \frac{\tilde{k}_2}{k_1} \right] + \tilde{b} = -\frac{\theta_i}{k_1} g(f(-X_i) + \eta) + \frac{\theta_i \tilde{k}_2 + \tilde{b} k_1}{k_1} \quad (6-4)$$

Finalmente, definindo

$$a_i = -\frac{\theta_i}{k_1} < 0 \quad \text{e} \quad b_i = \frac{\theta_i \tilde{k}_2 + \tilde{b} k_1}{k_1}$$

chegamos na desigualdade (6-2). \square

Exemplo 6.4: Consideremos a aplicação $F_{sl} = A_2 - \tilde{f}_{sl}$ onde $\tilde{f}_{sl} = (f, f)$, $f(x) = x^2$ e A_2 é a matriz do Exemplo 3.3. Para $g(x) = 1$ podemos tomar os bolsões $y \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2$ e $x \leq -\frac{1}{2}y^2 + 2$. Em verde, os bolsões.

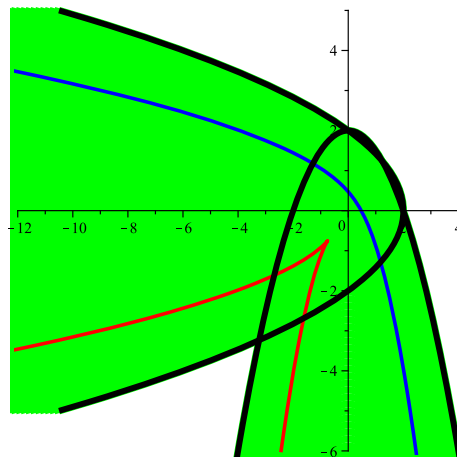


Figura 6.1: Bolsões

□

Exemplo 6.5: Para $f(x) = \exp(x)$ tome $g(x) = \ln(x)$ e $\eta = 0$.

□

Corolário 6.6 *Sejam F_{sl} , f e g como no teorema anterior. Se*

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{g(f(z))}{|z|} = +\infty, \tag{6-5}$$

então existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$ temos $r(t) = -tp$, $p > 0$, é valor regular de F_{sl} .

De fato, na figura acima, as semirretas eventualmente estão na região em branco do quadrante negativo.

Demonstração:

O ponto $r(t)$ é regular se estiver fora dos bolsões dados por (6-2), logo desejamos que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ que (6-2) não seja satisfeita, ou seja, queremos

$$a_i g(f(tp_i) + \eta) + b_i < -t \sum_{j \neq i}^n v_j$$

e dividindo por $-t \sum_{j \neq i}^n v_j < 0$ temos

$$-\frac{a_i}{\sum_{j \neq i}^n v_j} \frac{g(f(tp_i) + \eta)}{t} - \frac{b_i}{t \sum_{j \neq i}^n v_j} > 1. \tag{6-6}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{a_i}{\sum_{j \neq i}^n v_j} \frac{g(f(tp_i) + \eta)}{t} \right] = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_i}{t \sum_{j \neq i}^n v_j} = 0$$

pois $a_i < 0$ e $p_j > 0$, concluímos que existe $t_i > 0$ tal que para $t > t_i$ a desigualdade (6-6) é satisfeita. Definindo $t_0 = \max\{t_i, i = 1, \dots, n\}$ chegamos ao resultado enunciado. \square

6.3 Continuidade dos autovalores

É sabido que cada autovalor $\lambda_k(S)$ varia continuamente com $S \in \mathcal{S}_n$, mas a demonstração não se encontra com facilidade. Aqui apresentamos um argumento que pode ser usado também para operadores em dimensão infinita com espectro cotado inferiormente, como é o caso de operadores elípticos habituais.

A simetria de uma matriz S torna possível indexar seus autovalores $\lambda_i(S)$ sem ambiguidade,

$$\lambda_1(S) \leq \lambda_2(S) \leq \dots \leq \lambda_n(S).$$

Proposição 6.7 *O menor autovalor de $S \in \mathcal{S}_n$ varia continuamente em S . Seja $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ uma função contínua na variável real t . Então o menor autovalor de $S(\cdot)$*

$$\lambda_1(t) = \min_{\|x\|=1} \langle S(t)x, x \rangle$$

varia continuamente no parâmetro t .

Demonstração:

Considere a formulação variacional para o menor autovalor,

$$\lambda_1(t) = \min_{\|x\|=1} \langle S(t)x, x \rangle.$$

O resultado agora é um exercício simples de análise. \square

Precisamos agora de alguns fundamentos de Cálculo Tensorial e Álgebra Exterior e para maiores detalhes sugerimos as referências [YOK], [GR] e [PAG].

Consideremos a k -ésima potência exterior de \mathbb{R}^n denotada por

$$\mathbb{R}^{n \wedge k} = \underbrace{\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n \wedge \dots \wedge \mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}}$$

que é um espaço vetorial de dimensão $\binom{n}{k}$ e base canônica

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}, \quad (6-7)$$

onde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n . Como é sabido, o conjunto (6-7) é uma base de $\mathbb{R}^{n \wedge k}$.

Teorema 6.8 *Sejam S uma matriz simétrica de ordem n com espectro*

$$\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n\}$$

e autovetores correspondentes v_1, v_2, \dots, v_n . Considere o operador $S^{\wedge k} : \mathbb{R}^{n \wedge k} \rightarrow \mathbb{R}^{n \wedge k}$ dado por

$$S^{\wedge k} = S \otimes I \otimes \dots \otimes I + I \otimes S \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes S.$$

Então o espectro de $S^{\wedge k}$ é dado por

$$\sigma(S^{\wedge k}) = \{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}\}, \quad (6-8)$$

para índices $i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_j \leq n$.

Demonstração:

Como $\dim(\mathbb{R}^{n \wedge k}) = \binom{n}{k}$ temos que $S^{\wedge k}$ possui $\binom{n}{k}$ autovalores. Mostraremos que para i_1, i_2, \dots, i_k distintos o autovalor $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k}$ está associado ao autovetor $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$.

Basta aplicar $S^{\wedge k}$ em $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$ para um conjunto de índices i_1, i_2, \dots, i_k distintos:

$$\begin{aligned} S^{\wedge k}(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k}) &= (Sv_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k}) + \dots + (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge Sv_{i_k}) \\ &= (\lambda_{i_1} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k}) + \dots + (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k} v_{i_k}) \\ &= (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k})(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k}). \end{aligned}$$

□

Corolário 6.9 *O menor autovalor de $S^{\wedge k}$ é dado por*

$$\lambda_1(S^{\wedge k}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k.$$

Para mostrar que λ_2 é contínuo em $S \in \mathcal{S}_n$, basta considerar $\lambda_1(S^{\wedge 2}) = \lambda_1(S) + \lambda_2(S)$, que é contínuo sobre matrizes simétricas de dimensão $\binom{n}{2}$ — assim, $\lambda_2 = \lambda_1(S^{\wedge 2}) - \lambda_1(S)$ também é contínuo. O argumento se aplica para cada autovalor, sequencialmente.

6.4

Discretizações por diferenças finitas

Funções admissíveis surgem naturalmente como discretizações de operadores diferenciais. É interessante notar dois fatos: (1) o caso não autônomo dá origem a uma não linearidade f_i diferente para cada ponto da malha, (2) as matrizes resultantes são quase laplacianos no sentido do Capítulo 4.

6.4.1

O caso unidimensional

Considere o problema de Dirichlet no intervalo $[0, 1]$

$$\begin{cases} -u''(x) - f(x, u(x)) = g(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (6-9)$$

onde $g \in C^0([0, 1])$.

Tomemos a partição regular do intervalo $[0, 1]$ com $N + 2$ pontos igualmente espaçados,

$$\Delta = \{x_0 = 0, \dots, x_i = i \cdot h, \dots, x_{N+1} = 1\}$$

onde $h = \frac{1}{N+1}$ para $i = 0, \dots, N + 1$ e consideremos a aproximação da segunda derivada dada por

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \quad (6-10)$$

Substituindo (6-10) em

$$-u''(x_i) - f(x_i, u(x_i)) = g(x_i)$$

temos

$$\frac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h^2} - f(x_i, u(x_i)) \approx g(x_i).$$

Em notação matricial, trocando u por uma aproximação \hat{u} e denotando $f_i(u) = f(x_i, u)$,

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}(x_1) \\ \hat{u}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{u}(x_{N-1}) \\ \hat{u}(x_N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1(\hat{u}(x_1)) \\ f_2(\hat{u}(x_2)) \\ \vdots \\ f_{N-1}(\hat{u}(x_{N-1})) \\ f_N(\hat{u}(x_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{N-1}) \\ g(x_N) \end{bmatrix} \quad (6-11)$$

ou mais compactamente, trocando por simplicidade de notação \hat{u} por u novamente,

$$A \cdot u - h^2 f(u) = h^2 g.$$

6.4.2

O caso bidimensional

Para o problema de Dirichlet no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) - f(x, y, u(x, y)) &= g(x, y) & (6-12) \\ u(x, y) &= 0 \quad (x, y) \in \partial D \end{aligned}$$

o procedimento é similar, começando por definir uma malha de pontos $(x_i, y_j) \in \Omega$ igualmente espaçados. Nesses pontos, u e g tomam os valores $u_{i,j}$ e $g_{i,j}$ e a não linearidade $f(x, y, u(x, y))$ passa a ser $f_{i,j}(u_{i,j})$. No caso de um retângulo, por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} T & D & & & \\ D & T & D & & 0 \\ & D & T & D & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & D & T & D \\ & & & & D & T \end{bmatrix}_{N^2 \times N^2} \quad (6-13)$$

onde, a menos de constantes multiplicativas, $D = -I$ e T é uma matriz tridiagonal com diagonal de entradas iguais a 4 e subdiagonais com entradas iguais a -1 .