



Eduardo Teles da Silva

**A geometria de discretizações de operadores
elípticos semi-lineares**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro
Dezembro de 2010



Eduardo Teles da Silva

A geometria de discretizações de operadores elípticos semi-lineares

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Tomei

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Eduardo V. Teixeira

Departamento de Matemática — UFC

Prof. Hamilton P. Bueno

Departamento de Matemática - ICEX — UFMG

Prof. Humberto J. Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada — UNICAMP

Prof. Jairo da S. Bochi

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Juliana A. Freire

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Nicolau C. Saldanha

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 17 de Dezembro de 2010

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Eduardo Teles da Silva

Mestrado: Matemática Aplicada — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio (2005–2007).

Graduação: Licenciatura em Matemática — Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC (2001–2004).

Ficha Catalográfica

Silva, Eduardo Teles da

A geometria de discretizações de operadores elípticos semi-lineares / Eduardo Teles da Silva; orientador: Carlos Tomei. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2010.

v., 58 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Discretizações. 3. Operadores elípticos semi-lineares. 4. Matrizes de Stieltjes. 5. Conjectura de Lazer-McKenna. 6. Análise não linear. I. Tomei, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Aos meus pais.

Agradecimentos

Não poderia inicialmente agradecer outra pessoa senão ao meu orientador, o professor Carlos Tomei. Sem ele certamente este trabalho não seria possível. Seu amplo conhecimento, brilhantismo, intuição, ânimo e tempo atribuídos aqui, contribuíram de maneira decisiva em cada caractere destas laudas.

À minha família, que é o alicerce da minha vida, por ter sido forte durante os momentos obscuros — que felizmente passaram.

Ao João Paulo Roquim Romanelli (“João-Zé-Varginha-MG-PUC-Rio”) e ao Renato Zanforlin (“Renatovsky”) (in memoriam) por compartilhar diversos momentos acadêmicos e pelo apoio sempre que se fez necessário.

Ao professor Nicolau C. Saldanha pelos momentos de discussão e por participar de todos os seminários.

Aos amigos Ady Cambraia, Amadeu A. Barbosa, André Rocha, Betina Vath, Camilla Peixoto, Danielle Rezende, Débora Mondaine, Elisângela Oliveira, Fábio Silva, Francisco Victor, Franciane Basile, Humberto Bortolossi, Jaqueline Abreu, Jésus Filho, Joana Becker, Kennedy Pedroso, Leandro Tavares, Luciana Castro, José Cal Neto, Luciana de Mesquita, Miguel Schnoor, Paulo Marques, José Gondin (Profeta), Raul Humberto, Rodrigo Pereira, Silenildo Oliveira, Welerson Kneipp e Yuri Ki.

A todos os amigos que conviveram comigo em nossa república durante esses últimos anos. Em especial, ao Carlos Bocker, Belinha, Dete, Mitchael Plaza e Sérgio Romãna.

A todos os professores pelos quais tive a oportunidade de ser aluno.

A todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática da PUC-Rio pela ajuda prestada. Em especial, à Creuza e à Kátia.

A todos os que de uma forma ou outra contribuíram na realização deste trabalho.

Ao CNPq, à Capes e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Silva, Eduardo Teles da; Tomei, Carlos. **A geometria de discretizações de operadores elípticos semi-lineares**. Rio de Janeiro, 2010. 58p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Existe uma grande literatura dedicada à contagem de soluções de equações diferenciais elípticas semi-lineares. Suas discretizações naturais, entretanto, têm comportamento bastante diferente. Assim, por exemplo, quando as não linearidades interagem com altas frequências do operador livre, o número de pré-imagens de múltiplos muito negativos do *ground state* livre aumentam exponencialmente.

Palavras-chave

Discretizações; Operadores elípticos semi-lineares; Matrizes de Stieltjes; Conjectura de Lazer-McKenna; Análise não linear;

Abstract

Silva, Eduardo Teles da; Tomei, Carlos (Advisor). **The geometry of discretizations of semi-linear elliptic operators**. Rio de Janeiro, 2010. 58p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

There is a large literature related to counting solutions of semilinear elliptic differential equations. It turns out that their discrete counterparts behave very differently. As an example, when nonlinearities interact with higher frequencies of the free operator, the number of preimages of very negative multiples of the free ground state increases exponentially.

Keywords

Discretizations; Semi-linear elliptic operators; Stieltjes matrices; Lazer-McKenna conjecture; Nonlinear analysis;

Sumário

1	Introdução	11
2	Conjuntos críticos de funções admissíveis	16
2.1	Os três tipos de não linearidades relevantes	16
2.2	Geometria do conjunto crítico para não linearidades suaves	17
2.3	O conjunto crítico para funções $p\ell$ -admissíveis	22
3	O caso $s\ell$ -admissível	26
3.1	Faixas e a cruz	26
3.2	Soluções de $F_{s\ell}(u) = y - tp$, $p > 0$ e $t \gg 0$, e seus índices	29
3.3	Rotação das imagens das componentes críticas	32
4	O caso $p\ell$ -admissível	34
4.1	Contando soluções de $F_{p\ell}(u) = y - tp$, $p > 0$ e $t \gg 0$	34
4.2	Matrizes de Stieltjes	38
5	O caso $a\ell$ -admissível	41
5.1	Outra construção do conjunto crítico de $F_{a\ell}$	43
5.2	Contando soluções de $F_{a\ell}(u) = y - tp$, $p > 0$ e $t \gg 0$	45
6	Apêndice	50
6.1	Definições e fatos básicos	50
6.2	Bolsões	50
6.3	Continuidade dos autovalores	53
6.4	Discretizações por diferenças finitas	55
6.4.1	O caso unidimensional	55
6.4.2	O caso bidimensional	56
	Referências Bibliográficas	56

Lista de figuras

2.1	$\mathcal{C}(F_{sl})$	21
2.2	$\mathcal{C}(F_{al})$	21
2.3	$\mathcal{C}(F_{sl})$: não é uma subvariedade	22
2.4	Intersecção de $\mathcal{C}(F_{sl})$ com o plano $y = z$	22
2.5	$\mathcal{C}(F_{pl})$: $a = 0$ e $b = 3$	24
2.6	$F_{pl}(\mathcal{C}(F_{pl}))$	24
2.7	$\mathcal{C}(F_{pl})$: $a = 6.5$ e $b = 7$	24
2.8	$F_{pl}(\mathcal{C}(F_{pl}))$	24
2.9	$\mathcal{C}(F_{pl})$: $a = 0$ e $b = 7$	24
2.10	$F_{pl}(\mathcal{C}(F_{pl}))$	24
3.1	$\mathcal{C}(F_{sl}) \subset \mathcal{X}_3$ para A_2	28
3.2	$F_{sl}(\mathcal{C}(F_{sl})) \subset F_{sl}(\mathcal{X}_3)$	29
3.3	$\mathcal{C}(F_{sl})$	32
3.4	$F_{sl}(\mathcal{C}(F_{sl}))$	32
5.1	$\mathcal{C}(\tilde{F}_{sl}), \tilde{F}_{sl}(u) = Au - (u_1^2, u_2^2)^T$	45
5.2	$\mathcal{C}(F_{al})$	45
6.1	Bolsões	52

“Aprenda como se você fosse viver para sempre. Viva como se você fosse morrer amanhã.”

Mahatma Gandhi