

1

Introdução

Uma folheação de codimensão q sobre um variedade M de dimensão n é intuitivamente uma decomposição de M em subvariedades conexas imersas injetivamente, chamadas de *folhas*, que se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, com segunda coordenada constante. Então uma pergunta pertinente sobre folheações seria: *Quando uma variedade é uma folha de uma folheação?* Esta questão foi lançada por J. Sondow em 1975 no artigo [32], e deu origem ao chamado “*problema de realização*” de variedades em folhas. É claro que toda variedade L é folha da folheação produto $L \times N$ para qualquer variedade N . Uma parte do problema de realização trata-se de encontrar condições necessárias e suficientes para que uma dada variedade aberta seja difeomorfa a uma folha de uma folheação de uma variedade compacta. O problema de realização tornou-se um dos mais difíceis problemas da área, e ainda hoje, existem apenas resultados particulares sobre tal problema.

O problema de realização de superfícies é tão antigo quanto a própria teoria das folheações, iniciando-se com os exemplos de Reeb em sua tese. Mas um tratamento sistemático sobre o problema de realização de superfícies foi feito inicialmente por W. Bouma e G. Hector [3], os quais mostraram que toda superfície aberta pode ser folha de uma folheação de \mathbb{R}^3 . Mais tarde, em 1985, Cantwell e Conlon [7] conseguem demonstrar que toda superfície aberta pode ser realizada como uma folha de uma folheação suave de uma 3-variedade compacta. Porém, S. E. Goodman [13] verificou que algumas superfícies compactas não são difeomorfas a folhas de nenhuma folheação de uma dada 3-variedade compacta.

No caso de folheações de dimensões maiores do que 2, a pergunta de Sondow tem respostas bem diferentes. Em 1983, Inaba [18] mostra que uma variedade aberta com todos os fins periódicos e com espaço de fins de tipo finito é realizável como folha de uma folheação de codimensão um de uma variedade compacta. Dois anos mais tarde, Ghys [12] e Inaba et al. [19] apresentaram, independentemente, exemplos de variedades abertas não simplesmente conexas

de dimensão maior do que 2 as quais não são homeomorfas a folhas de nenhuma folheação de codimensão um de uma variedade compacta. Attie e Hurder [1] também exibiram exemplos de variedades abertas de dimensão 6 que não são folhas de folheações de codimensão um de variedades compactas, mas com a peculiaridade de serem simplesmente conexas. As variedades construídas por eles tem em comum uma não periodicidade de seus fins.

Ainda hoje não há uma resposta geral para o problema de realização de variedades de dimensão 3, por exemplo. Não se sabe nem mesmo se existem 3-variedades que não podem ser difeomorfas a uma folha de nenhuma folheação de codimensão 2 de uma variedade compacta. Porém existem variedades riemannianas, mesmo com geometria limitada, que não são quasi-isométricas a folhas de folheações de codimensão arbitrária em variedades compactas (ver [1], [38]). Duas variedades riemannianas são ditas *quasi-isométricas* quando existe um difeomorfismo f de uma na outra tal que f e f^{-1} produzem apenas distorções das métricas limitadas por uma certa constante. Sabe-se também que toda variedade aberta de dimensão maior do que 1 admite métricas riemannianas com geometria limitada não quasi-isométricas a nenhuma tal folha de codimensão um de variedade compacta ([34], [35]). Recorde que a métrica riemanniana da variedade compacta folheada é única a menos de quasi-isometria.

No entanto, na presença de certa estrutura transversa, nós damos os primeiros exemplos de variedades que não são folhas em qualquer codimensão. De maneira mais explícita:

Teorema 1 *Dado $d \geq 5$, existem variedades de dimensão d que não são difeomorfas a nenhuma folha de nenhuma folheação riemanniana de classe C^2 de codimensão $q \geq 1$ de uma variedade compacta.*

A ideia da demonstração é bastante simples. Suponha que L seja uma folha de uma folheação riemanniana de uma variedade compacta M . Se L contém um bloco simplesmente conexo que recorre finitamente (Definição 2.2.1), então L é folha própria. Mas neste caso L possui uma vizinhança com volume infinito em M , o que é impossível porque M tem volume finito.

Uma folheação homotética é uma pequena generalização de folheação riemanniana. Se uma folha de uma folheação homotética tem grupo fundamental gerado por elementos de torção, então esta folha tem uma vizinhança aberta na qual a restrição da folheação é riemanniana. Por outro lado, as variedades que serão consideradas para mostrar o Teorema 1 possuem grupo fundamental gerado por elementos de torção. Deste modo, com ajuda do Teorema 1,

obtemos também exemplos de variedades que não são folhas em folheações homotéticas.

Teorema 2 *Dado $d \geq 5$, existem variedades de dimensão d que não são difeomorfas a nenhuma folha de nenhuma folheação homotética de classe C^2 de codimensão $q \geq 1$ de uma variedade compacta.*

Além disso, seguindo as ideias de Ghys [12] construímos uma nova classe de variedades simplesmente conexas de dimensão maior ou igual do que 5 chamadas de *variedades não periódicas em homotopia de dimensão 2* (uma *variedade n.p.e.h.* é uma soma infinita de variedades com grupo de homotopia de dimensão 2 isomorfo a um grupo de ordem prima a definição precisa de uma variedade n.p.e.h será dada em §4.1.3) que não são folhas de folheações de classe C^0 de codimensão um.

Teorema 3 *Não existe folheação de codimensão um de classe C^0 de uma variedade compacta com uma folha homeomorfa a uma variedade não periódica em homotopia de dimensão 2.*

O Teorema 3 será uma consequência do Teorema 4.3.2, o qual iremos demonstrar juntamente com o Teorema 4.3.3. A demonstração do teorema 4.3.2 começa seguindo os passos da demonstração do Teorema de Ghys [12]. No entanto, o final da nossa demonstração se diferencia da dele pois procuramos explorar a contradição sobre os blocos não recorrentes ao invés de procurarmos uma contradição via o grupo fundamental da variedade aberta como fez Ghys. Deste modo, obtemos demonstrações ligeiramente diferentes dos teoremas de Ghys e de Attie-Hurder .

Para demonstrar o Teorema 3 são utilizadas varias propriedades que são peculiares às folheações de codimensão um. O Capítulo 2 será utilizado para relembrar tais propriedades como Teorema de Estrutura dos Abertos Saturados e o Lema de Trivialização de Hector. Neste capítulo daremos também a definição de folheação que vamos trabalhar, juntamente com as terminologias e propriedades básicas necessárias ao desenvolvimento do texto. Há também na subseção 2.1.1 uma justificativa para a inexistência de folheações de variedades compactas com todas as folhas próprias e não compactas.

No Capítulo 3 tratamos de folheações com estrutura transversa. Fazemos uma pequena introdução às folheações riemannianas e homotéticas. Na seção 3.2 definimos folheações riemannianas e enunciemos o Teorema de Estabilidade de Reinhart para folhas próprias. Observamos também que a versão enunciada em [31] é falso em geral. Em §3.3 explicamos porquê uma folheação homotética

com uma folha com grupo fundamental gerado por elementos de torção é “localmente” riemanniana.

O último capítulo é devotado à construção de variedades que não são folhas e também às demonstrações dos teoremas mencionados aqui.