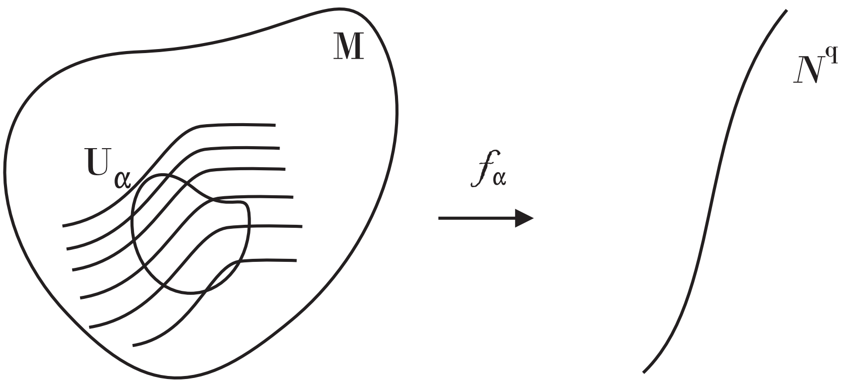
# 2
# Preliminares

## 2.1
## Introdução às folheações geométricas

### 2.1.1
### Noções Básicas

Nesta seção recordaremos a noção de folheações juntamente com suas propriedades que serão utilizadas ao longo do texto. O leitor não familiarizado com o assunto pode encontrar no livro de Camacho e Lins [5] as justificativas para os fatos mencionados aqui. Aproveitaremos também a ocasião para fixar nossa notação.

Uma folheação de codimensão $q$ sobre uma variedade $M$ de dimensão $n$ é intuitivamente uma decomposição de $M$ em uma união disjunta de subvariedades conexas imersas que se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, com segunda coordenada constante. Lembramos que uma aplicação contínua $f : X \to Y$ entre variedades $X$ e $Y$ é uma submersão $C^0$ quando, para todo $x \in X$, existem cartas locais em torno de $x$ e $f(x)$ nas quais $f$ se torna uma submersão $C^\infty$.




Sejam $M$ uma variedade suave de dimensão $n$ e $N^q$ uma variedade de dimensão $q \leq n$. Um $N^q$-*cociclo folheado* sobre $M$ de classe $C^r$, $0 \leq r \leq \infty$, é uma família $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta \in A}$ constituída por submersões $f_\alpha : U_\alpha \to N^q$ e difeomorfismos $g_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ de classe $C^r$ satisfazendo:

(1) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de $M$;
(2) $f_\alpha : U_\alpha \to N^q$ é uma submersão $C^r$, para todo $\alpha \in A$;
(3) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, então os difeomorfismos $g_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ satisfazem

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(f_\beta(x)), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Cada aberto $U_\alpha$ é chamado de *vizinhança distinguida* e os difeomorfismos $g_{\alpha\beta}$ são chamados de *aplicações de transição*. Definimos sobre o conjunto de todos os $N^q$-cociclos folheados de $M$ uma relação de equivalência da seguinte maneira: Dizemos que dois cociclos folheados são *equivalentes* se a união deles ainda é um cociclo folheado com uma escolha apropriada das novas aplicações de transição. Uma *folheação* de classe $C^r$ de codimensão $q$ é uma classe de equivalência de um $N^q$-cociclo folheado pela relação de equivalência definida acima. A dimensão de $\mathscr{F}$ é o inteiro $n - q$. Escrevemos $(M, \mathscr{F})$ para indicar que $M$ é uma variedade munida de uma folheação $\mathscr{F}$, às vezes, diremos que $(M, \mathscr{F})$ é uma *variedade folheada* (ou folheação).

Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de uma variedade $M$ definida pelo $N$-cociclo folheado $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta \in A}$. As componentes conexas dos conjuntos $f_\alpha^{-1}(c)$, $c \in N^q$, são chamados de *placas* de $U_\alpha$ (ou de $\mathscr{F}$). Agora, sobre $M$, considere a seguinte relação de equivalência: $p \sim q$ se e somente se existem placas $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de $\mathscr{F}$ tais que $p \in P_1$, $q \in P_k$ e $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. As classes de equivalência desta relação são as *folhas* de $\mathscr{F}$. As folhas de uma folheação $\mathscr{F}$ de $M$ são subvariedades imersas de $M$. Uma *seção transversal* à $\mathscr{F}$ é uma subvariedade de dimensão $q$ mergulhada em $M$ e transversal a todas as folhas de $\mathscr{F}$ que ela encontra. Quando uma folha $L$ de $\mathscr{F}$ é mergulhada, dizemos que ela é *própria*, ou equivalentemente, se existe uma transversal à $\mathscr{F}$ que intercepta $L$ em um único ponto.



**Exemplo 2.1.1 (Suspensão de uma representação)** Sejam $B$ e $F$ duas variedades conexas e $H : \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Diff}^r(F)$ uma representação. Consideremos $p : \widetilde{B} \to B$ o recobrimento universal de $B$ e identifiquemos $\pi_1(B, b_0)$ com o grupo de automorfismos deste recobrimento, $\mathrm{Aut}(\widetilde{B}, B)$. Assim, temos uma ação de $\pi_1(B, b_0)$ sobre $\widetilde{B} \times F$ que é dada como segue:

$$\begin{aligned} \zeta : \pi_1(B, b_0) \times (\widetilde{B} \times F) &\to \widetilde{B} \times F \\ (\gamma, (\tilde{b}, y)) &\mapsto (\gamma(\tilde{b}), H_\gamma(y)). \end{aligned}$$

Esta ação nos dá um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \times F \arrow[r, "pr"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{B} \arrow[d, "p"] \\ (\widetilde{B} \times F)/\zeta \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

onde $pr$ é a projeção sobre a primeira coordenada, $\pi$ é a aplicação quociente por $\zeta$ e $(\widetilde{B} \times F)/\zeta \to B$ é unicamente induzida por $pr$. Seja $E = (\widetilde{B} \times F)/\zeta$. A aplicação quociente $\pi : \widetilde{B} \times F \to E$ é uma aplicação de recobrimento. Além disso, a aplicação $E \to B$ é a projeção de um fibrado e se $r \geq 1$ podemos munir $E$ com uma estrutura diferenciável (ver [17] pp. 125), o fibrado $(E, p, B)$ tem como grupo estrutural a imagem da representação $H$. Note que a ação $\zeta$ preserva as folhas, $\widetilde{B} \times \{y\}$, da folheação produto. Assim, a aplicação quociente $\pi : \widetilde{B} \times F \to E$ induz uma folheação $\mathscr{F}$ sobre $E$ que é transversal as fibras de $E$. A folheação $(E, \mathscr{F})$ assim obtida é chamada a *folheação dada pela suspensão de* $\pi_1(B)$ sobre $\mathrm{Diff}^r(F)$ cuja representação de holonomia é $H$ (ver também [5] p. 96–104).

Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de classe $C^0$ de uma variedade $M$. Dizemos que a folheação $\mathscr{F}$ é *transversalmente orientável* se ela é definida por um $N^q$-cociclo folheado tal que $N$ orientável e as aplicações de transição de $\mathscr{F}$ preservam a orientação de $N$. Suponhamos que $\mathscr{F}$ é dada pelo $N$-cociclo folheado $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}_{\alpha,\beta \in A}$. Dois pares $(U_\alpha, f_\alpha)$ e $(U_\beta, f_\beta)$ são equivalentes se o germe do difeomorfismo $g_{\alpha\beta}$ em $f_\alpha(x)$ preserva orientação. Uma classe de equivalência dada por esta relação é chamada de *germe de orientação transversal* de $\mathscr{F}$ em $x$. Seja $U^*$ o conjunto de todos os germes de orientação transversal de $\mathscr{F}$ em $x \in U$, onde $U$ é uma vizinhança distinguida de $\mathscr{F}$. Os conjuntos $U^*$ constituem um atlas para o conjunto de todos os germes de orientações transversais de $\mathscr{F}$, o qual a partir de agora denotamos por $M^*$. Definimos uma aplicação $\pi : M^* \to M$ que envia um germe de orientação transversais de $\mathscr{F}$ em $x \in M$ que na verdade é um recobrimento duplo de $M$. Tal recobrimento é chamado de *recobrimento duplo das orientações transversais* de $(M, \mathscr{F})$.

**Proposição 2.1.2** *Sejam $M$ uma variedade e $\mathscr{F}$ uma folheação de $M$ e $\pi : M^* \to M$ o recobrimento duplo das orientações transversais. Então*

(i) *A folheação pull-back $\pi^*\mathscr{F}$ é transversalmente orientável;*

(ii) *Se $L$ é uma folha de $\mathscr{F}$ cujo grupo fundamental não possui subgrupo de índice 2, então $\pi^*\mathscr{F}$ tem uma folha homeomorfa a $L$ que recobre $L$.*

*Prova.* Para o item (i) o leitor pode consultar as p. 17 e 162 do livro de G. Hector e U. Hirsch [16]. Agora para (ii) suponha que $\pi_1(L)$ não tem subgrupo de índice 2. Então o recobrimento das orientações transversais $L^*$ sobre $L$ tem duas componentes conexas. Portanto, cada uma das componentes conexas de $L^*$ é uma folha de $\pi^*\mathscr{F}$ difeomorfa a $L$. ■

O *saturado* de um subconjunto $A$ de $M$ por $\mathscr{F}$, denotado por $\mathscr{F}(A)$, é a união das folhas de $\mathscr{F}$ que passam pelos pontos de $A$. Dizemos que $A \subset M$ é *saturado por* $\mathscr{F}$ se o saturado de $A$ por $\mathscr{F}$ é o próprio conjunto $A$. Assim, o saturado de um conjunto aberto ainda é aberto.

Por *conjunto minimal* de uma folheação $(M, \mathscr{F})$ entendemos como sendo um conjunto fechado não vazio $\mu \subset M$ saturado por $\mathscr{F}$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $X \subset \mu$ é fechado não vazio de $M$ e saturado por $\mathscr{F}$, então $X = \mu$. Por exemplo, toda folha fechada de uma folheação é um conjunto minimal. Um fato bem conhecido é que toda variedade folheada compacta possui um conjunto minimal [5].

**Lema 2.1.3** *Uma folheação de uma variedade compacta não pode possuir todas as suas folhas próprias e não compactas.*

*Prova.* Suponhamos que $(M, \mathscr{F})$ é uma folheação com $M$ compacta onde todas as folhas de $\mathscr{F}$ são próprias e não compactas. Como $M$ é compacta, $\mathscr{F}$ possui um conjunto minimal. Seja $\mu$ um conjunto minimal de $\mathscr{F}$ e seja $F$ uma folha de $\mathscr{F}$ contida em $\mu$. Então $F$ é densa em $\mu$, mas dado um ponto $p \in F$ existe uma vizinhança $V$ de $p$ em $M$ que intercepta uma única placa da folha $F$, isto ocorre pois $F$ é própria. Assim $F$ é aberta em $\mu$, $\mu - F$ é um conjunto fechado saturado por $\mathscr{F}$ e portanto $\mu - F = \varnothing$. Então podemos concluir que $F$ é fechado, logo $F$ é compacto, mas isto é uma contradição. ■

Quando $\mathscr{F}$ é uma folheação pelo menos de classe $C^1$ podemos definir o fibrado tangente de $\mathscr{F}$. O *fibrado tangente* da folheação $(M, \mathscr{F})$ é o subfibrado de $TM$ de $(n-q)$-planos, denotado por $T\mathscr{F}$, cuja fibra sobre $x \in M$ é o subespaço $T_x\mathscr{F} \subset T_xM$ tangente em $x \in M$ à folha de $\mathscr{F}$ que passa por $x$.

### 2.1.2 Grupos de holonomia

Um ingrediente importante no estudo do comportamento assintótico das folhas vizinhas a outras folhas é o conceito de holonomia. Tal conceito é a generalização natural de aplicação de primeiro retorno de um fluxo a uma seção transversal. Sendo assim, nada é mais natural do que estudarmos o conceito de holonomia antes de atacarmos o problema de não realização de variedades em folhas.

Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de codimensão $q$ de uma variedade $M$ e seja $L$ uma folha de $\mathscr{F}$. Recordemos as definições de grupo de holonomia e grupos de holonomia infinitesimal de $L$. Fixemos $x_0 \in L$. Seja $\sigma : [0,1] \to L$ um laço baseado em $x_0$. Agora, escolhemos uma cobertura de $\sigma$ por um número finito de vizinhanças coordenadas $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, U_n$, com $x_0 \in U_0$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ tal que para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, $f_i : U_i \to N^q$ é uma submersão definindo $\mathscr{F}|_{U_i}$, $f_0 = f_n$, $f_0(x_0) = y_0 \in N$. Para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$, considere a aplicação de transição $g_{i+1,i} : f_i(U_i \cap U_{i+1}) \to f_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$ tal que $f_{i+1} = g_{i+1,i} \circ f_i$ sobre $U_i \cap U_{i+1}$. Então $g_{n,n-1} \circ \ldots \circ g_{1,0}$ é um difeomorfismo local definido em uma vizinhança de $y_0$ em $N^q$ fixando $y_0$, chamado de *aplicação de holonomia*. Seja $h_\sigma$ o germe do difeomorfismo acima em $y_0$. Assim, $h_\sigma$ depende apenas da classe de homotopia de $\sigma$ [5]. Deste modo obtemos um homomorfismo $h : \pi_1(L, x_0) \to G_q(y_0)$ que está bem definido, onde $G_q(y_0)$ denota o grupo de germes de difeomorfismos locais de $N^q$ que fixam $y_0$. O *grupo de holonomia* de $L$ baseado em $x_0$ é definido por

$$h(L, x_0) := \text{imagem de } \; h \subset G_q(y_0).$$

Uma mudança de ponto base produz um subgrupo conjugado [5]. Agora, para o caso em que $\mathscr{F}$ é diferenciável, consideremos $G_q^r(y_0)$ como sendo o grupo de $r$-jatos em $y_0 \in N^q$ e consideremos $\pi^r : G_q(y_0) \to G_q^r(y_0)$ a projeção natural. Pondo $h^r = \pi^r \circ h$; definimos o *grupo de holonomia infinitesimal de ordem* $r$ de $L$ em $x_0$ por $h^r(L, x_0) :=$ imagem de $h^r \subset G_q^r(y_0)$.

**Teorema de Estabilidade de Reeb 2.1.4** *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação $C^2$ de codimensão $q \geq 1$ de uma variedade $M$. Suponhamos que $L$ é uma folha de $\mathscr{F}$ com holonomia trivial. Então dado um compacto $C \subset L$ de $L$, existe um mergulho $j : C \times [-1,1]^q \to M$ tal que $j(C \times \{0\}) = C$ e cada $j(C \times \{*\})$ está contido em alguma folha de $\mathscr{F}$.*

*Esboço da prova.* Consideremos $M' = L \times [-1,1]^q$ munida da folheação produto $\mathscr{F}'$ cujas folhas são da forma $L \times \{*\}$. Note que a folha $L' = L \times \{0\}$ tem holonomia trivial. Temos que a projeção $\mathrm{pr} : C \times [-1,1]^q \to C$ é uma vizinhança tubular de $C \times \{0\}$ em $M'$ com fibras $\{*\} \times [-1,1]^q$. Denotemos $C \times [-1,1]^q$ por $C'$. Agora, fixemos uma vizinhança tubular $N(C)$ de $C$ em $M$ e fixemos também um difeomorfismo $g : \Sigma' \to \Sigma$ da fibra de $C'$ que passa por $x_0$ sobre a fibra de $N(C)$ que passa por $x$ com $g(x_0) = x_0$. Como a holonomia de $L$ e de $L'$ são triviais temos

$$g \circ h_\sigma \circ g^{-1}(x) = \mathrm{id}(x) = h_{g \circ \sigma}(x),$$

para todo $[\sigma] \in \pi_1(L, x_0)$ e para todo $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de $x_0$. Logo, pelo Teorema 2 de [5] p. 67, existem vizinhanças $V' \supset (C\times\{0\})$, $V \supset C$ e um difeomorfismo $j : V \to V'$ tal que $j(C\times\{0\}) = C$ e $j$ leva cada $C\times\{*\}$ sobre uma folha de $\mathscr{F}\mid_V$. ■

O Teorema de Estabilidade de Reeb mencionado acima é valido para o caso $C^0$ quando a folheação $\mathscr{F}$ tem codimensão um [17].

### 2.1.3 Folheações de Codimensão um

Seja $(M, \mathscr{F})$ uma variedade folheada por uma folheação de codimensão um e classe $C^r$, $0 \leq r \leq \infty$. Uma folheação $\mathscr{N}$ de $M$ é dita *transversal* à $\mathscr{F}$ se cada folha de $\mathscr{N}$ é transversal à $\mathscr{F}$ e a dimensão de $\mathscr{N}$ é igual a codimensão de $\mathscr{F}$. Neste caso a dimensão de $\mathscr{N}$ é igual a um. Quando $r \geq 1$ é fácil ver que sempre existe uma folheação transversal à $\mathscr{F}$. Isto porque o campo planos $\xi$ transversal à $T\mathscr{F}$ é com efeito um campo de linhas, e como tal é involutivo. Então pelo Teorema de Frobenius, existe uma folheação cujo fibrado tangente é $\xi$. Para o caso $C^0$ este fato também é verdade, porém menos evidente [33].

Suponhamos por simplicidade que $\mathscr{F}$ é uma folheação de codimensão um transversalmente orientável e fixemos uma folheação $\mathscr{N}$ transversal à $\mathscr{F}$. Seja $U$ um subconjunto aberto de $M$ e saturado por $\mathscr{F}$. Quando $\mathscr{F}$ e $\mathscr{N}$ são de classe $C^2$ podemos construir sobre $M$ uma métrica riemanniana de modo que $\mathscr{F}$ e $\mathscr{N}$ são ortogonais. A inclusão $i : U \to M$ induz uma métrica não completa sobre $U$. No caso $C^2$ o completamento de $U$ como variedade riemanniana, denotado por $\hat{U}$, é uma variedade com bordo. No entanto, mesmo sem a hipótese de $\mathscr{F}$ e $\mathscr{N}$ serem $C^2$, podemos definir uma noção de completamento $\hat{U}$ de $U$. No caso geral, o *completamento* de $U$ é intuitivamente acrescentar ao conjunto $U$ as folhas de $\mathscr{F}$ que estão na *"periferia"* de $U$. Um procedimento preciso para construir $\hat{U}$ é dado nas p. 87–88 de [17].

O completamento de $U$ é uma variedade com bordo conexa $\hat{U}$ contendo $U$ imersa em $M$ por uma imersão que também denotaremos por $i : \hat{U} \to M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $\operatorname{Int}\hat{U} \simeq U$;
(2) $i$ é uma extensão da inclusão $i : U \to M$ tal que $i(\partial\hat{U})$ é saturado por $\mathscr{F}$;
(3) $i$ é transversal às folheações $\mathscr{F}$ e $\mathscr{N}$.

Sendo $i : \hat{U} \to M$ uma aplicação transversal às folheações $\mathscr{F}$ e $\mathscr{N}$, podemos considerar o pull-back destas folheações pela imersão $i$. E denotaremos por $\mathscr{F}^*$ e $\mathscr{N}^*$ as folheações de $\hat{U}$ obtidas pelo pull-back de $\mathscr{F}$ e $\mathscr{N}$, respectivamente. Note que a folheação $\mathscr{F}^*$ é tangente ao bordo de $\hat{U}$ e que as folheações $\mathscr{F}^*$ e $\mathscr{N}^*$ são transversais.

**Teorema de Estrutura dos Abertos Saturados 2.1.5 ([10], [17])** *Suponhamos que $M$ é compacta. Então existe uma subvariedade compacta com bordo e com quinas $K$ de $\hat{U}$ tal que $\partial K = \partial^{tg} \cup \partial^{tr}$ com*

*(1) $\partial^{tg} \subset \partial\hat{U}$;*

*(2) $\partial^{tr}$ é saturado por $\mathscr{N}^*$;*

*(3) $\hat{U} - \operatorname{Int} K$ é uma união finita de subvariedades não compactas $B_i$ com bordo e com quinas homeomorfas a $S_i \times [-1,1]$ por um homeomorfismo $\phi_i : S_i \times [-1,1] \to B_i$ que leva $S_i \times \{*\}$ em folhas de $\mathscr{N}^*$.*

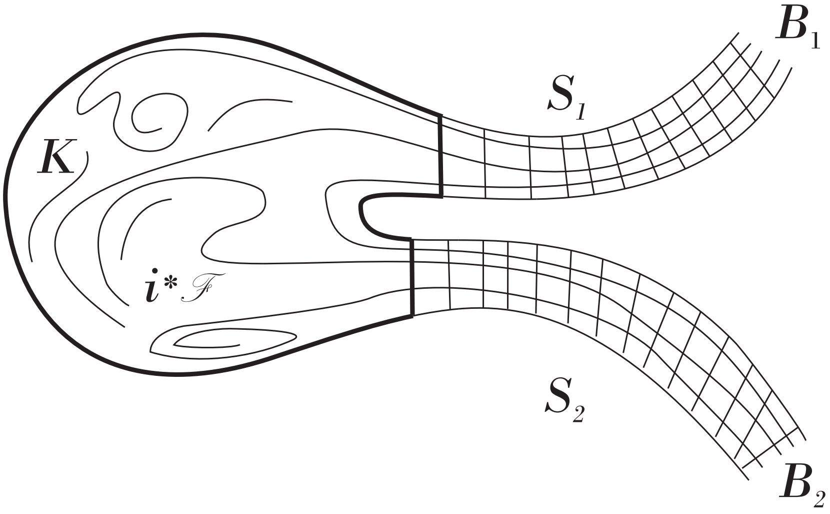



Figura 2.1: A estrutura do completamento de $U$

A variedade $K$ dada pelo Teorema de Estrutura dos Abertos Saturados é chamada de *núcleo* de $\hat{U}$. E as subvariedades $B_i$ são chamadas de *ramos* de $\hat{U}$. A folheação $\mathscr{F}^*$ restrita a um ramo $B_i$ é dada pela suspensão de um homomorfismo do grupo fundamental de $S_i$ para o grupo de homeomorfismos de $[-1,1]$ que preservam orientação.

**Lema de Trivialização de Hector 2.1.6 ([15])** *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação $C^0$ de codimensão um de uma variedade compacta $M$ e seja $\mathscr{N}$ uma folheação transversal à $\mathscr{F}$. Suponhamos que $J$ é o traço de um arco contido em uma folha de $\mathscr{N}$. Se quaisquer dois pontos distintos de $J$ pertencem a folhas distintas de $\mathscr{F}$, então $L \times J$ é homeomorfo ao saturado de $J$ por $\mathscr{F}$ por um homeomorfismo que leva $L \times \{*\}$ em uma folha de $\mathscr{F}$ e $\{*\} \times \tau$ em uma folha de $\mathscr{N}$, onde $L$ é uma folha de $\mathscr{F}$.*

## 2.2 Fins de variedades

Seja $W$ uma variedade aberta (não compacta). Seja $E(W)$ o conjunto das sequências $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos e conexos de $W$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\overline{U}_n - U_n$ é subvariedade compacta conexo de codimensão um de $W$;
(ii) $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$;
(iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \varnothing$.

Vamos definir uma relação de equivalência sobre o conjunto $E(W)$ da seguinte maneira: duas sequências $(U_n)$ e $(V_n)$ são equivalentes se para cada $n$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \supseteq V_{n_0}$ e $V_n \supseteq U_{n_0}$. A cada uma das classes de equivalência desta relação damos o nome de *fim* de $W$. O conjunto de todas as classes de equivalência da relação acima chamamos de *conjunto dos fins* de $W$ e denotamos por $\mathscr{E}(W)$. Dizemos que a sequência $(U_n)$ *define* um fim $\epsilon$ se $(U_n)$ representa $\epsilon$. Uma *vizinhança* $U$ de um fim $\epsilon$ é um aberto $U$ que contém todos menos um número finito de elementos da sequência que define o fim $\epsilon$. Dizemos que um fim $\epsilon$ de $W$ é *periódico* se existem um subconjunto aberto $U$ de $W$ e um mergulho $f : U \to U$ tal que a sequência $(f^n(U))_{n\in\mathbb{N}}$ define $\epsilon$. Neste caso dizemos que $[U, f]$ define o fim $\epsilon$.

Uma subvariedade com bordo compacta conexa $S \subset W$ de mesma dimensão que $W$ é chamada de *bloco* de $W$.

**Definição 2.2.1** Sejam $W$ uma variedade aberta conexa e $B$ um bloco de $W$. Dizemos que $B$ *recorre finitamente* sobre $W$ se a existência de uma família $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subvariedades de $W$ disjuntas e homeomorfas a $B$ implica $\Lambda$ ser finito. Neste caso dizemos que $W$ *tem recorrência finita.*

**Proposição 2.2.2** *Seja $W$ uma variedade aberta que possui um fim $\epsilon$ periódico. Então existe uma vizinhança $U$ de $\epsilon$ tal que nenhum bloco de $U$ recorre finitamente sobre $U$.*

*Prova.* Suponhamos que o fim $\epsilon$ é definido por $[U, f]$. Seja $B$ um bloco contido em uma vizinhança $U$ de $\epsilon$. Para cada $n \geq 1$, consideremos o aberto $A_n = f^n(U) \setminus \overline{f^{n+2}(U)}$. A família de abertos $\mathcal{C} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $B$. Pela compacidade de $B$ apenas um número finito de membros da cobertura $\mathcal{C}$ é suficiente para cobrir $B$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap f^k(U) = \varnothing$. Por conseguinte, $\{f^{kn}(B)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família constituída por subvariedades contidas em $U$ duas a duas disjuntas e todas homeomorfas a $B$. Portanto, $B$ não recorre finitamente sobre $U$. ∎