4
Variedades não realizáveis como folha

4.1
Construções das variedades

A seguir construimos variedades abertas dos tipos Ghys-INTT, Attie-Hurder e variedades não periódicas com homotopia de dimensão maior do que 1. Para fazer isso vamos considerar e fixar uma vez por todas uma árvore enumerável $\mathfrak{a}$ localmente finita com espaço de fins finito.

4.1.1
Variedades tipo Ghys-INTT

Seja d um inteiro maior ou igual do que 3. Suponhamos que $(m_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números inteiros positivos não limitada tal que para infinitos valores de $i \geq 1$, o conjunto $R_i = \{n, \quad m_n = m_i,\ n \geq 1\}$ é finito. Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos uma variedade de dimensão d compacta V_i sem bordo cujo grupo fundamental é isomorfo a $\mathbb{Z}_{m_i}$. Se $d = 3$, basta considerar um espaço de lentes. Para $d \geq 5$ considere o produto de um espaço de lente de dimensão 3 com uma esfera. Se $d = 4$, recorde que todo grupo finitamente apresentado é isomorfo ao grupo fundamental de alguma variedade compacta de dimensão 4, p. 143 de [23]. Agora, a cada vértice v_i da árvore $\mathfrak{a}$ associemos a variedade V_i. Finalmente tomemos a soma conexa das variedades V_{i_1} e V_{i_2} que estão associadas aos vértices v_{i_1} e v_{i_2} que são ligados por uma aresta e_l de $\mathfrak{a}$.

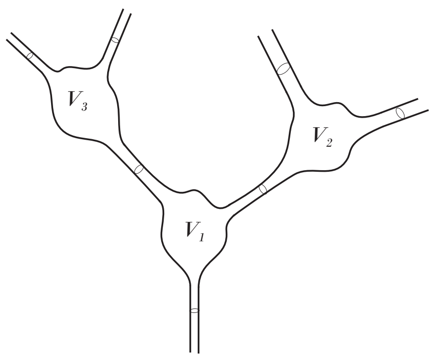

Figura 4.1: Uma variedade tipo Ghys-INTT

Desta maneira obtemos uma variedade conexa não compacta que denotaremos por W, chamada de *variedade tipo Ghys-INTT* [12] e [19]. Vamos denotar por W_i a variedade V_i menos as bolas abertas que foram usadas para fazer a soma conexa.

Lema 4.1.1 (Corolário do Teorema de Kurosh, p. 245 de [25]) *Suponhamos que $A_1, \ldots, A_r$ e $B_1, \ldots, B_s$ são grupos finitamente apresentados não triviais, e cada um deles é indecomponível com respeito ao produto livre $*$. Se $A_1 * \ldots * A_r \simeq B_1 * \ldots * B_s$, então $r = s$ e existe uma permutação σ tal que $A_i \simeq B_{\sigma(i)}$, para todo $1 \leq i \leq r$.*

Lema 4.1.2 *Se R_k é finito, então a variedade W_k recorre finitamente sobre W.*

Prova. Dado $k \in \mathbb{N}$ fixo, considere r como sendo a cardinalidade do conjunto R_k, por hipótese $r < \infty$. Se W_k não recorre finitamente sobre W, então existem $X_1, \ldots, X_{r+1}$ subvariedades em W disjuntas e homeomorfas a W_k. Como a união finita $\bigcup_{i=1}^{r+1} X_i$ é compacta, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{r+1} X_i$ está contida em $V_1 \# \ldots \# V_s$. Note que toda $(d-1)$-esfera em W separa W, pois o primeiro número de Betti de W é nulo. Assim, existe uma variedade compacta com bordo $C \subset W$ (possivelmente não conexa) tal que

$$X_1 \cup \ldots \cup X_{r+1} \cup C = V_1 \# V_2 \# \ldots \# V_s.$$

Aqui estamos assumindo que os interiores de C e dos X_i's são disjuntos (e identificando os bordos destas variedades). Então passando ao grupo fundamental de ambos os lados da igualdade acima e aplicando o Teorema de van Kampen temos que

$$\underbrace{\mathbb{Z}_{m_k} * \ldots * \mathbb{Z}_{m_k}}_{(r+1)-vezes} * G = \mathbb{Z}_{m_1} * \mathbb{Z}_{m_2} * \ldots * \mathbb{Z}_{m_s},$$

onde G é o produto livre dos grupos fundamentais das componentes de C. Mas isto contradiz o Lema 4.1.1, pois o fator $\mathbb{Z}_{m_k}$ aparece $(r+1)$-vezes de um lado e no máximo r-vezes do outro. ■

Observando a demonstração do Lema anterior podemos concluir o seguinte: se foram usadas r cópias de V_i para construir W, então não existem mais do que r subvariedades disjuntas em W que são homeomorfas a V_i.

Proposição 4.1.3 *Sejam $\widetilde{W}$ e W duas variedades de Ghys-INTT homeomorfas. Se $f : \widetilde{W} \to W$ é um recobrimento, então f é um homeomorfismo.*

Prova. Suponhamos que $f : \widetilde{W} \to W$ não é um homeomorfismo. Isto implica que algum bloco W_i de W não se levanta trivialmente. Seja W_{i_0} o primeiro bloco de W para o qual isto acontece. Seja S uma $(d-1)$-esfera que é bordo de uma bola B de V_{i_0} que foi usada para fazer a soma conexa. A esfera S tem uma orientação transversa e o bloco $\widetilde{W}_{i_0} \subset \widetilde{W}$ que recobre W_{i_0} contém pelo menos duas $(d-1)$-esferas que se projetam sobre a esfera S. O número de fins de $\widetilde{W}$ é igual ao de W, porque são variedades homeomorfas. Então existem duas esferas sobre a esfera na base, e estão ligadas por um caminho no recobrimento do bloco, e por outro fora. Assim, $\widetilde{W}$ contém um 1-ciclo σ_0 que intercepta $\widetilde{S}$ uma vez positivamente, onde $\widetilde{S}$ é uma esfera que se projeta sobre S. No entanto, podemos definir um homomorfismo $\varphi : H_1(\widetilde{W}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ que é o número de intersecção da classe de homologia de um 1-ciclo σ de $\widetilde{W}$ com $\widetilde{S}$. Sendo assim, φ leva a classe de homologia de σ_0 em 1, o que é uma contradição pois os elementos de $H_1(\widetilde{W}, \mathbb{Z})$ são de torção. Portanto, $f : \widetilde{W} \to W$ é um homeomorfismo. ■

4.1.2
Variedades tipo Attie-Hurder

Antes de iniciarmos a construção de uma variedade tipo Attie-Hurder, recorde que em dimensão pelo menos igual a 5 existem uma infinidade de variedades suaves com um dado tipo de homotopia e classes de Pontrjagin distintas.

Lema 4.1.4 ([1]) *Dados X uma variedade de dimensão $d \geq 5$ e $z \in H^4(X, \mathbb{Z})$, existe uma variedade compacta X' sem bordo de classe C^0 de dimensão d com mesmo tipo de homotopia que X e primeira classe de Pontrjagin igual a $z \in H^4(X, \mathbb{Z})$.*

Fixamos um primo p. Consideremos uma sequência $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números inteiros tal que o conjunto $S_k = \{i \in \mathbb{N}; \quad a_i \text{ não é divisível por } p^k\}$ seja finito para cada $k \geq 1$. Suponha que para valores arbitrariamente grandes de k, $\sum_{i \in S_k \setminus S_{k-1}} a_i$ não seja múltiplo de p^k. Seja $d \geq 5$ fixo. Para cada inteiro $i \in \mathbb{N}$, seja V_i uma variedade compacta simplesmente conexa de dimensão d tal que $H^4(V_i, X) \cong \mathbb{Z}$ e a primeira classe de Pontrjagin é $a_i \in H^4(V_i, \mathbb{Z})$. Então fazendo a soma conexa como na subseção anterior obtemos uma variedade aberta que também vamos denotar por W chamada de *variedade tipo Attie-Hurder*.

Observe que W possui o mesmo tipo de homotopia que uma soma conexa infinita de variedades simplesmente conexas, por conseguinte W é simplesmente conexa.

Lema 4.1.5 *Dada uma subvariedade (com bordo) compacta C de W de codimensão zero, existe uma subvariedade compacta $C' \subset W \setminus C$ tal que C' não se mergulha em $W \setminus (C \cup C')$.*

Prova. Por hipótese, para valores arbitrariamente grandes de k, a união

$$C_k = \bigcup_{i \in S_k \setminus S_{k-1}} W_i$$

tem primeira classe de Pontrjagin $p_1(C_k)$ não divisível por p^k. Então tome um tal valor de k tal que $C^+ = \bigcup_{i \in S_{k-1}} W_i$ contém C. Logo $C' = C_k$ não se mergulha em $W \setminus (C \cup C')$ porque este último, sendo união de blocos com primeira classe de Pontrjagin divisível por p^k, tem sua primeira classe de Pontrjagin divisível por p^k. ■

4.1.3 Variedades não periódicas em homotopia de dimensão 2

Para construirmos as variedades não periódicas em homotopia de dimensão 2 precisamos do seguinte resultado.

Lema 4.1.6 *Dado $n \geq 2$, existe uma variedade suave compacta 1-conexa de dimensão $d \geq 5$ com segundo grupo de homotopia isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.*

Prova. Primeiramente vamos construir um mergulho $\mathbb{S}^2 \cup_f D^3$ em $\mathbb{R}^5$. Seja $f : \mathbb{S}^1 = \partial D^2 \to S^1$ uma aplicação contínua de grau n. Defina $g_0 : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to D^2 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ por $g_0(x,t) = (tx, f(x))$ e $g : \mathbb{S}^1 \cup_f D^2 \to \mathbb{R}^4$ como segue: $g_0(y) = (0,0,y)$ para $y \in \mathbb{S}^1$; $g(z) = ((1-t)g_0(t,x), t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ para $z \in D^2$, onde $t = |z|$ e $x = z/|z|$. Verifica-se que para $z \in \mathbb{S}^1 = \partial D^2$ tem-se $(0,0,f(z)) = ((1-t)g_0(t,x),t)$, de modo que $g(z)$ está bem definida com domínio $\mathbb{S}^1 \cup_f D^2$. Podemos ver também que g é um mergulho. Como a aplicação $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ tem grau n segue que a suspensão de f, $Sf : S\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ também tem grau n. Por outro lado, a suspensão do mergulho g é um mergulho $Sg : \mathbb{S}^2 \cup_{Sf} D^3 \to \mathbb{R}^5$. Agora, tomemos uma vizinhança tubular V de $\mathbb{S}^2 \cup_{Sf} D^3$ em $\mathbb{R}^5$ e identifiquemos os bordos de duas cópias de V. Deste modo obtemos uma variedade compacta X sem bordo 1-conexa de dimensão 5 tal que $\pi_2(V) \simeq \mathbb{Z}_n$. Finalmente para obtermos variedades de dimensões maiores satisfazendo as propriedades mencionadas no enunciado do lema, basta mergulharmos o complexo $\mathbb{S}^2 \cup_{Sf} D^3$ em $\mathbb{R}^d$, $d > 5$, ao invés de $\mathbb{R}^5$ antes de tomarmos a vizinhança tubular. ■

Suponhamos que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência de números primos tal que o conjunto $R_i = \{n \in \mathbb{N}/ \quad p_n = p_i\}$ seja finito para um número infinito de indices $i \geq 1$. Seja V_i uma variedade compacta 1-conexa (variedade conexa e simplesmente conexa) de dimensão $d \geq 5$ com segundo grupo de homotopia isomorfo a $\mathbb{Z}_{p_i}$. Então fazendo a soma conexa infinita das variedades V_i por meio da árvore $\mathfrak{a}$ obtemos uma variedade aberta W com um número finito de fins. Denotemos por W_i a variedade V_i menos a(s) bola(s) aberta(s) usada(s) para fazer a soma conexa W.

Como W é uma soma conexa de variedades 1-conexas, ela própria é 1-conexa. Recorde que o Teorema de Hurewicz afirma, em particular, que o segundo grupo de homotopia de um espaço 1-conexo é isomorfo ao seu segundo grupo de homologia. Daí, $H_2(W_i, \mathbb{Z}) \simeq \pi_2(W_i) \simeq \mathbb{Z}_{p_i}$ para todo $i \geq 1$. Por outro lado a sequência exata de Mayer-Vietoris nos leva a concluir que

$$\pi_2(W) \simeq H_2(W, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i}.$$

O bloco W_i recorre finitamente sobre W, para uma infinidade de índices $i \geq 1$.

Lema 4.1.7 *Para um número infinito de valores $i \geq 1$, não existem um número infinito de subvariedades com bordo em W que são duas a duas disjuntas e homeomorfas a W_i.*

Prova. Existem infinitos valores de $i \geq 1$ tais que R_i é finito. Seja $i \geq 1$ um destes valores. Suponhamos que existem $X_1, \ldots, X_k$ subvariedades com bordo em W disjuntas que são homeomorfas a W_i, onde $k > \#R_i$. Seja Y o fecho de $W \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_k)$. Temos que $Y \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_k)$ é uma união disjunta de $(d-1)$-esferas. Aplicando a sequência exata de Mayer-Vietoris a $W = Y \cup (X_1 \cup \ldots \cup X_k)$ obtemos:

$$0 \to H_2(Y, \mathbb{Z}) \oplus H_2(\bigcup_{l=1}^{k} X_l, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} H_2(W, \mathbb{Z}).$$

Logo, o homomorfismo φ é injetor. Em particular, $H_2(\bigcup_{l=1}^{k} X_l, \mathbb{Z}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_{p_i} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_i}}_{k-\text{vezes}}$ injeta sobre $H_2(W, \mathbb{Z})$, o que é uma contradição porque $H_2(W, \mathbb{Z})$ possui menos de k cópias de $\mathbb{Z}_{p_i}$. ■

4.2 Variedades que não são folhas de folheações riemannianas

Nas subseções 4.1.2 e 4.1.3 construimos variedades com um bloco simplesmente conexo recorrendo finitamente sobre elas. Então o Teorema 1 é consequência do próximo resultado.

Teorema 4.2.1 *Uma variedade aberta que tem um bloco simplesmente conexo o qual recorre finitamente não é difeomorfa a nenhuma folha própria de nenhuma folheação riemanniana de classe C^2 de uma variedade compacta.*

Prova. Suponha por absurdo que $(M, \mathscr{F})$ é uma folheação riemanniana de uma variedade compacta com uma folha L difeomorfa a uma das variedades descrita no teorema. Seja $B \subset L$ um bloco simplesmente conexo de L que recorre finitamente. Então existe uma vizinhança tubular V de B tal que a folheação restrita a V é a folheação produto. Como B recorre finitamente, a intersecção da folha L com V é um número finito de cópias de B duas a duas disjuntas. Logo, existe um disco D de raio δ ortogonal à $\mathscr{F}$ em um ponto $x \in L$ tal que D intercepta L em um único ponto. Então considere δ' menor do que a metade de δ. Assim, o disco D' com raio δ' pode ser transportado ao longo da folha L, por sua holonomia, fornecendo então uma δ'-vizinhança V_L de L própria e mergulhada em M. Sendo L uma folha aberta, a vizinhança V_L deve ter volume infinito em M, o que é um absurdo por ser M compacta. ∎

4.2.1 Consequências do Teorema 4.2.1

Na seção 3.4 mencionamos um resultado de Blumenthal (Proposição 3.4.1), afirmando que G/K-folheações homogêneas com K compacto são também folheações riemannianas. Logo, a Proposição de Blumenthal juntamente com o Teorema 4.2.1 nos permite enunciar o seguinte:

Corolário 4.2.2 *Sejam G um grupo de Lie e K um subgrupo de Lie de G. Se K é compacto, então não existe G/K-folheação homogênea de classe C^2 de uma variedade compacta com uma folha difeomorfa a uma variedade aberta com um bloco simplesmente conexo que recorre finitamente.*

Para demonstrar o Teorema 4.2.1 usamos um argumento local. Por outro lado, quando uma folha L de uma folheação homotética $\mathscr{F}$ tem grupo fundamental gerado por elementos de torção, existe uma vizinhança de L tal que a restrição da folheação $\mathscr{F}$ a esta vizinhança é uma folheação riemanniana, Lema 3.3.2. Deste modo podemos enunciar:

Teorema 4.2.3 *Uma variedade aberta que contém um bloco simplesmente conexo recorrendo finitamente sobre ela com grupo fundamental gerado por elementos de torção não pode ser folha própria de uma folheação homotética de classe C^2 de uma variedade compacta.*

4.3
Variedades que não são folhas C^0 em codimensão um

As variedades que foram construídas em §4.1.1 e §4.1.3, exceto as variedades não periódicas em homotopia, são exemplos bem conhecidos de não folhas de folheações de codimensão um. Aqui mostraremos que as variedades com homotopia também não são folhas. Na verdade vamos apresentar uma classe de variedades não realizáveis que contém todas estas já conhecidas, exceto as variedades tipo Attie-Hurder. A seguir damos um nome para as variedades que compõem esta classe.

Definição 4.3.1 Uma variedade aberta conexa W com um número finito de fins é chamada de *variedade tipada* se ela pode ser decomposta como $W_0'\#W'$ de modo que:
(1) W' é homeomorfa a uma das variedades construidas nas subseções 4.1.1 e 4.1.3,
(2) Uma infinidade de blocos W_i de W' recorrem finitamente sobre W,
(3) W_0' é uma variedade com grupo fundamental gerado por elementos de torção.

As variedades tipadas possuem um fim ϵ como uma das variedades do tipo apresentadas na seção 4.1. É claro que este fim ϵ não é periódico. Por outro lado, uma folha aberta de uma folheação de codimensão um de uma variedade compacta deve se enrolar sobre um conjunto limite não trivial. Mas isto força uma certa periodicidade sobre seus fins. Sendo assim as variedades tipadas não podem ser folhas.

Teorema 4.3.2 *Uma variedade tipada não é homeomorfa a nenhuma folha de nenhuma folheação transversalmente orientável de classe C^0 de codimensão um de uma variedade compacta.*

A demonstração do Teorema acima é praticamente toda baseada na demonstração do principal resultado de Ghys que aparece em [12]. Nós procuramos no final da demonstração explorar mais a recorrência finita dos blocos de W ao invés do seu grupo fundamental, como feito por E. Ghys [12].

As variedades tipo Attie-Hurder não são tipadas, porém para este tipo de variedade temos um resultado similar ao Teorema 4.3.2.

Teorema 4.3.3 *As variedades tipo Attie-Hurder definidas na subseção 4.1.2 não são homeomorfas a folhas de folheações C^0 de codimensão um de variedades compactas.*

4.3.1
Demonstrações dos Teoremas 4.3.2 e 4.3.3

Vamos demonstrar os teoremas mencionados acima simultaneamente.

Seja $W = W'_0 \# W'$ uma variedade tipada de dimensão $d \geq 3$ ou uma variedade tipo Attie-Hurder de dimensão $d \geq 5$. Suponhamos que $\mathscr{F}$ é uma folheação transversalmente orientável de classe C^0 de codimensão um de uma variedade compacta M que possui uma folha L homeomorfa a W.

Lema 4.3.4 *O grupo de holonomia de L é trivial.*

Prova. O grupo fundamental de L é gerado por elementos de torção, logo o grupo de holonomia de L também é gerado por elementos de torção. Mas a holonomia de L é um subgrupo de $G^+(1)$, ($G^+(1)$ é o grupo de germes de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ que fixam a origem e preservam orientação). Como o único elemento de torção de $G^+(1)$ é a identidade segue que o grupo de holonomia de L é trivial. ■

A não recorrência de um bloco de L nos garante que L é uma subvariedade mergulhada de M.

Lema 4.3.5 *A folha L é própria.*

Prova. Seja C uma subvariedade compacta de L de mesma dimensão que L. O Lema 4.3.4 nos diz que L é uma folha sem holonomia. Então pelo Teorema de Estabilidade de Reeb, existe um mergulho $j : C \times [-1, 1] \to M$ tal que $j(C \times \{0\}) = C$ e $j(C \times \{*\})$ está contido em uma folha de $\mathscr{F}$. Mas uma variedade tipada W contém um bloco que recorre um número finito de vezes sobre ela. Fazendo C igual a um tal bloco temos que o conjunto $\{t \in [-1, 1]; \quad j(C \times \{t\}) \cap L \neq \varnothing\}$ é finito. Daí, a transversal $j(\{*\} \times [-1, 1])$ intercepta L em um número finito de pontos. Por conseguinte, L é uma folha própria.

Se W é uma variedade tipo Attie-Hurder tomando $C = \varnothing$ no Lema 4.1.5, obtemos um C' compacto que não se mergulha em $W \setminus C'$, dando a mesma conclusão. ■

Lema 4.3.6 *Todo compacto C contido em W' intercepta um número finito de blocos.*

Prova. Temos que $W' = W_1 \cup W_2 \ldots$. Seja A_i o interior de $W_1 \cup \ldots \cup W_i$. Assim, $A_i \cap W'$ constitui uma cobertura aberta encaixada de C. Então, pela compacidade de C existe i_0 tal que $C \subset A_{i_0}$. Logo, nenhum bloco W_i com $i > i_0$ intercepta C. ■

Nos casos que estamos trabalhando é possível obter uma vizinhança produto da folha L. Para fazer isto consideremos e fixemos uma folheação $\mathscr{N}$ de dimensão um transversal à $\mathscr{F}$.

Lema 4.3.7 *A folha L possui uma vizinhança aberta saturada homeomorfa a $L \times (-1,1)$ por um homeomorfismo ϕ que leva $L \times \{*\}$ sobre uma folha de $\mathscr{F}$ e $\{*\} \times (-1,1)$ sobre alguma folha de $\mathscr{N}$.*

Prova. Seja $\tau : [0,1) \to M$ uma transversal positiva que intercepta $L = W$ somente em $\tau(0)$. Agora, seja U o saturado de $\tau((0,1))$ por $\mathscr{F}$. Sendo U um aberto saturado podemos considerar o completamento de U com sua estrutura dada pelo Teorema de Estrutura dos Abertos Saturados 2.1.5. Note que o completamento $\hat{U}$ de U tem uma folha no bordo homeomorfa a L e portanto esta folha é sem holonomia. Podemos tomar o núcleo K de $\hat{U}$ (aumentando K se necessário) de maneira que $K \cap L$ seja uma soma conexa de blocos. Vamos assumir também que cada S_i é soma conexa de blocos. Aplicando o Teorema de Estabilidade de Reeb a $K \cap L$, obtemos uma vizinhança produto $V' = (K \cap L) \times [0,\epsilon]$ de $K \cap L$ contida no núcleo K. Além disso, as componentes das folhas em cada ramo B_i são recobrimentos de S_i. Como o grupo fundamental de L é gerado por elementos de torção e a representação de holonomia de $L \cap B_i$ no ramo B_i é trivial segue que $L \cap B_i$ tem uma vizinhança folheado como produto $S_i \times [0,\epsilon]$. Assim, qualquer ramo de $\hat{U}$ que a folha L intercepta tem uma vizinhança produto com mesmo ϵ. Concordando estas vizinhanças com a vizinhança já obtida para $K \cap L$ em K, obtemos uma vizinhança produto de L em $\hat{U}$. Procedendo da mesma maneira com uma transversal negativa $\tau' : (-1,0] \to M$ obtemos uma outra vizinhança de W no completamento de um aberto saturado que junto com a vizinhança acima obtida forma uma vizinhança produto aberta de L em M. ■

Seja Ω a união de todas as folhas de $\mathscr{F}$ que são homeomorfas a $L = W$. Pelo Lema 4.3.7 temos que o conjunto Ω é aberto e a restrição de $\mathscr{F}$ sobre Ω é uma fibração localmente trivial tendo como base uma variedade de dimensão um. Note que Ω não pode ser toda variedade M, pois seria uma variedade compacta com todas as folhas próprias e não compactas. De agora em diante consideremos Ω_1 a componente conexa de Ω que contém L.

Lema 4.3.8 *Toda folha contida no bordo de $\hat{\Omega}_1$ tem holonomia cíclica infinita que é gerada por uma contração. Em particular, $\hat{\Omega}_1$ não é compacta.*

Prova. Seja F uma folha contida no bordo de $\hat{\Omega}_1$. A folheação $\mathscr{F}$ restrita ao interior de $\hat{\Omega}_1$ é sem holonomia com todas as folhas sendo próprias e homeomorfas a L. O grupo de holonomia de F não é trivial. De fato, caso contrário F teria uma vizinhança produto em Ω. Então F seria homeomorfa a L. Mas F está no bordo de $\hat{\Omega}_1$, logo F não é homeomorfa a L. Pelo fato das folhas em Ω_1 serem próprias temos que a ação do grupo de holonomia de F é discreta. Daí, a holonomia de F é um grupo cíclico infinito. Um dos dois geradores da holonomia de F deve ser uma contração. Logo, há uma pequena vizinhança de F tal que todo bloco de L contido nela recorre infinitamente, porque a holonomia que é uma contração faz com que um tal bloco se repita infinitas vezes. Se $\hat{\Omega}_1$ for compacto então tome C como sendo $\hat{\Omega}_1$ menos uma vizinhança aberta do seu bordo. Então $C \cap L$ é fechado em $\hat{\Omega}_1$, logo é um compacto contido em L. Se L é uma variedade tipada segue pelo Lema 4.3.6 que apenas um número finito de blocos de W' estão contidos em C. Daí, existe um bloco de W' que recorre finitamente em W' que está contido em $\hat{\Omega}_1$ C, o que é uma contradição

No caso em que L é variedade tipo Attie-Hurder, o Lema 4.1.5 mostra que existe $C' \subset W \setminus C$ que não se mergulha em $W \setminus (C \cup C')$. Mas pela escolha de C, C' está contido numa vizinhança do bordo de $\hat{\Omega}_1$. E um elemento de holonomia que é contração mergulha uma cópia de C' em $W \setminus (C \cup C')$, uma contradição. ∎

Note que sendo $\hat{\Omega}_1$ não compacto, existe pelo menos um ramo B_1 de $\hat{\Omega}_1$ que é homeomorfo a $S_1 \times [0,1]$ por um homeomorfismo ϕ que leva $\{*\} \times [0,1]$ sobre uma folha de $\mathscr{N}$.

Lema 4.3.9 *O espaço das folhas da folheação $\mathscr{F}$ restrita a Ω_1 não é $\mathbb{R}$.*

Prova. Suponhamos por absurdo que o espaço das folhas da folheação $\mathscr{F}|_{\Omega_1}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$. Daí, dados dois pontos distintos de $\phi(\{*\} \times (0,1))$ eles estão em folhas distintas de $\mathscr{N}$. Pelo Lema de Trivialização de Hector segue que o saturado de $\phi(\{*\} \times (0,1))$ por $\mathscr{F}$ é homeomorfo a $L \times (0,1)$ por um homeomorfismo que leva $L \times \{*\}$ sobre uma folha de $\mathscr{F}$. Assim, $\hat{\Omega}_1$ é homeomorfo a $L \times [0,1]$. Daí, a folha passando por $\phi(*, 1]$ é homeomorfa a L. Mas isto é uma contradição, pois a folha que passa por $\phi(*, 1)$ está no bordo de $\hat{\Omega}_1$, e assim não é homeomorfa a L. ∎

Por conseguinte, a única possibilidade que nos resta é a que Ω_1 fibra sobre $\mathbb{S}^1$. Vejamos que isto também não é o caso.

A partir de agora suponhamos que $\hat{\Omega}_1$ fibra sobre o círculo $\mathbb{S}^1$. Seja $x \in L$ e consideremos $h(x)$ sendo o primeiro retorno (no sentido positivo) da folha da folheação transversa $\mathscr{N}$ passando por x sobre a folha L. O Lema de Trivialização de Hector nos garante que $h : L \to L$ está bem definida. Assim, obtemos um homeomorfismo $h : L \to L$ que é a monodromia da fibração de Ω_1 sobre $\mathbb{S}^1$.

Lema 4.3.10 *Seja K' o núcleo compacto K menos uma pequena vizinhança do bordo de $\hat{\Omega}_1$. Então dado um compacto $C' \subset L \setminus K'$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $h^{nr}(C')$ para todos os $n \in \mathbb{N}$ são dois a dois disjuntos.*

Prova. Em $B_i \simeq S_i \times [0,1]$ a folheação $\mathscr{F}$ é definida por uma suspensão e a intersecção das folhas de $\mathscr{F}$ com B_i são recobrimentos de S_i. No interior de B_i, que é homeomorfo a $S_i \times (0,1)$, temos que $h(x,t) = (x, f(x,t))$, onde $f(x,t) > t$ porque h é o primeiro retorno no sentido positivo. Assim, $h : L \cap B_i \to L \cap B_i$ é um automorfismo de recobrimento de ordem infinita, não tem ponto fixo e nem periódico. Além disso, h também não tem pontos periódicos perto do bordo de $\hat{\Omega}_1$, onde a holonomia do bordo é uma contração. Então para qualquer conjunto compacto $C' \subset L \setminus K'$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que os conjuntos $h^{nr}(C')$ são disjuntos $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

No caso de uma variedade tipada, nenhum bloco de W' que recorre finitamente pode estar em uma vizinhança pequena do bordo de $\hat{\Omega}_1$ porque caso contrário a holonomia de uma folha do bordo de $\hat{\Omega}_1$ que contrai faria este bloco recorrer infinitamente. Seja K' o núcleo K menos estas vizinhanças abertas do bordo de $\hat{\Omega}_1$. Então $K' \cap W'$ é compacto, logo intercepta um número finito de blocos (ver Lema 4.3.6). Sendo assim, algum bloco que recorre finitamente está contido num ramo de $\hat{\Omega}_1$. Mas todo bloco contido no ramo recorre infinitamente por causa do Lema 4.3.8. Isto termina a demonstração do Teorema 4.3.2.

Se L é uma variedade tipo Attie-Hurder, tome $C \subset L$ compacto tal que $L \cap K'$ esteja contido em C. Seja C' como no Lema 4.1.5. Então pelo Lema 4.3.10 existe $r \in \mathbb{N}$ tal que os conjuntos $h^{nr}(C')$ são disjuntos de C, para $n \neq 0$. Mas para n suficientemente grande o $h^{nr}(C')$ está também disjunto de C', contradizendo o Lema 4.1.5. Isto termina a demonstração do Teorema 4.3.3.

4.3.2
Comentário sobre o Teorema 4.3.2

Observemos que no caso de variedades com fins não periódicos em homotopia ou de variedades tipo Attie-Hurder podemos excluir a hipótese de orientação transversa da folheação. Isto porque estas variedades são simplesmente conexas e consequentemente a folheação levantada ao recobrimento duplo das orientações transversais tem uma folha homeomorfa a folha original. Assim, estabelecemos o Teorema 3 e o Corolário seguinte.

Corolário 4.3.11 *Uma variedade tipada com grupo fundamental gerado por elementos de ordem ímpar não é homeomorfa a nenhuma folha de nenhuma folheação de codimensão um de uma variedade compacta.*

As variedades apresentadas como não folhas neste trabalho tem todas um fim não periódico. Isto sugere uma pergunta que deixaremos sem resposta.

Pergunta 4.3.12 *Uma variedade aberta com um fim não periódico pode ser realizada como folha de uma folheação de uma variedade compacta?*