



**Fábio Silva de Souza**

## **Não folhas de certas folheações**

### **Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer, S. J.

Rio de Janeiro  
Maio de 2011



**Fábio Silva de Souza**

## **Não folhas de certas folheações**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paul Alexander Schweitzer, S. J.**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Étienne Ghys**

Director de recherche – CNRS

École Normale Supérieure de Lyon

**Prof. Marcos Martins Alexandrino da Silva**

Instituto de Matemática — IME/USP

**Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. Jairo da Silva Bochi**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. George Svetlichny**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 6 de Maio de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Fábio Silva de Souza**

Nasceu em 8 de Agosto de 1981 em São Gonçalo-RJ, onde estudou em colégios públicos. Fez a graduação em licenciatura em matemática na Faculdade de Formação de Professores da UERJ, formando-se em 2004. No ano seguinte ingressou no Programa de Pós-graduação em Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e, terminou o mestrado de Matemática em 2007 nesta mesma instituição. Posteriormente, mais precisamente em 2011, recebe o título de Doutor da PUC-Rio. Atualmente é professor assistente da faculdade em que realizou seus estudos de graduação.

#### Ficha Catalográfica

Souza, Fábio

Não folhas de certas folheações / Fábio Silva de Souza; orientador: Paul Alexander Schweitzer, S. J.. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 44 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Folheação de codimensão um. 3. Estrutura transversa. 4. Folheação riemanniana. 5. Folheação homotética. 6. Não folha.

I. Schweitzer, S. J., Paul Alexander. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A Derek Hacon

## Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e pelo privilégio que me foi dado em compartilhar tamanha experiência e, ao frequentar o curso de Matemática da UERJ-FFP como também o da PUC-Rio, perceber e atentar para a relevância de temas que não faziam parte, em profundidade, da minha vida.

Eu também gostaria de registrar aqui toda minha gratidão à minha mãe e à minha vó por terem me educado e me apoiado mesmo com todas as dificuldades que tivemos que vivenciar.

Deus sabe como foi difícil para mim conseguir terminar este trabalho. Mas eu não teria conseguido se não fosse meu amigo e orientador Pe. Paul Schweitzer, S.J., a quem deixo aqui meu agradecimento especial por todo seu apoio, sua amizade e por fazer de mim uma pessoa melhor.

Agradeço aos professores Étienne Ghys (ENS-Lyon), Sebastião Firmo (UFF), Marcos Alexandrino (USP), Nicolau Saldanha (PUC-Rio), Jairo Boch (PUC-Rio) e George Svetlichny (PUC-Rio) por terem agraciado-me com vossa participação na banca examinadora e, também pelas sugestões que foram dadas a mim. Infelizmente o Prof. Derek Hacon (PUC-Rio), por motivo de saúde, não pôde fazer parte da banca de minha defesa. Mesmo assim, quero registrar um agradecimento ao Prof. Derek Hacon por ter me incentivado desde meu mestrado.

Aos meus amigos Arlei Santos, Renato Ferrari e Eduardo Portela por fazerem minha vida mais feliz. À minha noiva Geziane Aparecida, por ser minha companheira, sempre me apoiando nos momentos difíceis e, me incentivando quando me faltava ânimo.

Agradeço também à Secretaria do Departamento de Matemática da PUC-Rio, em especial à Creuza, por toda a assistência técnica que me foi conferida.

Enfim, eu deixo aqui meu agradecimento a CAPES, a FAPERJ e a PUC-Rio pelo suporte financeiro dado a este trabalho.

## Resumo

Souza, Fábio; Schweitzer, S. J., Paul Alexander. **Não folhas de certas folheações**. Rio de Janeiro, 2011. 44p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Damos exemplos de variedades suaves abertas que não podem ser folhas de nenhuma folheação riemanniana, nem de qualquer folheação transversalmente homotética, de variedade compacta. Também apresentamos uma nova classe de não folhas de folheações  $C^0$  de codimensão um de variedades compactas, as variedades não periódica em homotopia, usando grupos de homotopia de dimensão maior. Finalmente generalizamos ligeiramente os exemplos de não folhas de Ghys, Inaba et al. e Attie-Hurder, com uma demonstração baseada na recorrência de blocos na variedade.

## Palavras-chave

Folheação de codimensão um; Estrutura transversa; Folheação riemanniana; Folheação homotética; Não folha;

## Abstract

Souza, Fábio; Schweitzer, S. J., Paul Alexander. **Non-leaves of some foliations**. Rio de Janeiro, 2011. 44p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We give examples of open smooth manifolds that cannot be leaves of any riemannian or transversely homothetic foliation of a compact manifold. We also present a new class of non-leaves of  $C^0$  codimension one foliations, manifolds that are non-periodic in homotopy, using higher-dimensional homotopy groups. Finally we give small generalizations of the non-leaf examples of Ghys, Inaba et al., and Attie-Hurder, with a proof based on the recurrence of blocks in the manifold.

### Keywords

Codimension one foliation; Transversal structure; Riemannian foliation; Homothetic foliation; Non-leaf;

## Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	15
2.1	Introdução às folheações geométricas	15
2.2	Fins de variedades	22
3	Geometria Transversa das Folheações	23
3.1	$G$ -Estruturas transversas	23
3.2	Folheações riemannianas	24
3.3	Folheações homotéticas	27
3.4	Folheações homogêneas	28
4	Variedades não realizáveis como folha	30
4.1	Construções das variedades	30
4.2	Variedades que não são folhas de folheações riemannianas	35
4.3	Variedades que não são folhas $C^0$ em codimensão um	36



## Lista de figuras

2.1	A estrutura do completamento de $U$	21
4.1	Uma variedade tipo Ghys-INTT	30

*You better lose yourself in the  
music, the moment  
You own it, you better never let it  
go  
You only get one shot, do not  
miss your chance to blow  
This opportunity comes once in a  
lifetime.*

**Eminem**, *Lose Yourself*.