2
Variedades

Nesta tese trabalharemos com variedades diferenciáveis e, para uma revisão sobre os conceitos de topologia e variedades diferenciáveis, consulte o apêndice A.

Estamos interessados no caso onde a variedade M de dimensão m, é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, onde n é tipicamente maior do que m. Em outras palavras, a variedade está em um espaço de dimensão alta ($\mathbb{R}^n$), porém, será homeomorfa a um espaço de baixa dimensão ($\mathbb{R}^m$, com $m < n$).

Exemplos de variedades incluem as curvas em $\mathbb{R}^3$, as curvas em $\mathbb{R}^2$, as superfícies em $\mathbb{R}^3$, a esfera e o toro n-dimensionais, dentre outros.

Vamos definir a dimensionalidade de uma variedade de acordo com Spivak Spivak65.

Definição 2.1. *Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é chamado uma variedade de dimensionalidade m (em $\mathbb{R}^n$) se, para todo ponto $\mathbf{x} \in M$ existe um conjunto aberto U contendo $\mathbf{x}$, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e um difeomorfismo*[1] *$h : U \to V$ tal que:*

$$h(U \cap V) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{y} \in V : y^{m+1} = \ldots = y^n = 0\}.$$

Pela definição, temos dois casos extremos: um ponto em $\mathbb{R}^n$, que é uma variedade de dimensão 0 e um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, que é uma variedade de dimensão n. Como exemplo, veja as figuras 2.1 e 2.2 obtidas de Spivak (67).

O teorema a seguir é útil para se obter exemplos de variedades. As demonstrações podem ser obtidas em Spivak (67).

Teorema 2.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $g : A \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável tal que $g'(\mathbf{x})$ (matriz $m \times n$ $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]$, onde $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$) tem posto m sempre que $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Então $g^{-1}(\mathbf{0})$ é uma variedade de dimensão (n-m) em $\mathbb{R}^n$.*

[1] Por difeomorfismo, quer se dizer toda transformação diferenciável bijetiva cuja inversa é diferenciável.

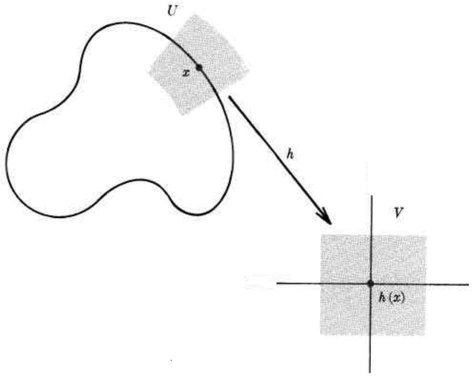

Figura 2.1: Variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$

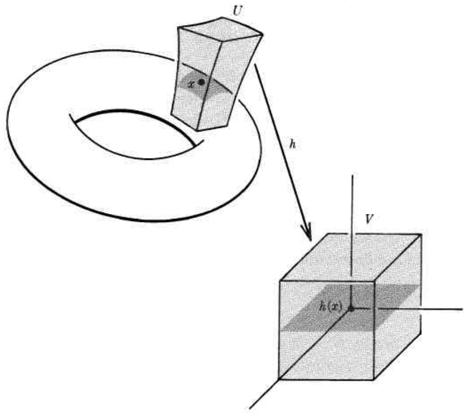

Figura 2.2: Variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$

A demonstração do teorema 2.1 segue do teorema da função implícita, o qual será descrito a seguir. Para tal, será considerada a seguinte decomposição de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ com $m < n$ e cada vetor em $\mathbb{R}^n$ será representado na forma $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Teorema 2.2. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : S \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma função de classe C^1 e seja $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S$ um ponto tal que $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ e*

$$det\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right] = det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right] \neq 0 \quad i, j = 1, \ldots, n-m.$$

Então existe uma vizinhança V de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ em $\mathbb{R}^n$, uma vizinhança D de $\mathbf{a}$ em $\mathbb{R}^m$ e uma função $f : D \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 com $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ e tal que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \text{ e } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D.$$

A demonstração do teorema 2.2 pode ser encontrada em Rudin (60). Algumas observações:

- O teorema da função implícita não oferece um método para determinação da função f a partir da equação $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. No entanto, a garantia da existência de tal função, bem como sua regularidade, nos permite obter as respectivas derivadas parciais.

  Da relação:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

em V, obtém-se a equação:

$$F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$$

que permite calcular as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ a partir de $F_1, \ldots, F_{n-m}$, sem ser necessário conhecer explicitamente as funções $f_1, \ldots, f_{n-m}$.

Derivando em relação a x_j obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-m}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-m}}{\partial y_{n-m}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{n-m}}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

- A equação $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ pode ser escrita como um sistema de $(n-m)$ equações em n variáveis:

$$F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m}) = 0$$
$$\cdots$$
$$F_{n-m}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m}) = 0$$

A hipótese de que $det \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right] \neq 0$ significa que a matriz jacobiana $(n-m) \times n$ calculada em $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, isto é, $DF(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dada por:

$$\begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \ldots & \partial F_1/\partial x_m & \ldots & \partial F_1/\partial y_1 & \ldots & \partial F_1/\partial y_{n-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial F_{n-m}/\partial x_1 & \ldots & \partial F_{n-m}/\partial x_m & \ldots & \partial F_{n-m}/\partial y_1 & \ldots & \partial F_{n-m}/\partial y_{n-m} \end{bmatrix}$$

possui as linhas linearmente independentes. Portanto, um conjunto definido por um sistema de $(n-m)$ equações pode ser visto, localmente, como o gráfico de uma função.

Vamos descrever uma variedade M de dimensão m de três formas diferentes, isto é, apresentaremos a representação implícita, explícita e paramétrica de M. Exemplos no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ podem ser obtidos em Pires (52).

1. **(Representação implícita) Conjunto de nível**: Considere $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Suponha que para cada ponto em M, existe uma

vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $F : S \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 definida num aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

$$M \cap V = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$$

Ademais, para cada ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M \cap V$, a matriz jacobiana $DF(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é uma matriz com $(n-m)$ linhas linearmente independentes. O conjunto $M \cap V$ definido desta forma chama-se o conjunto de nível zero da função F e M é uma união de conjuntos de nível. Trata-se de um conjunto definido por $(n-m)$ equações em $\mathbb{R}^n$.

Em $\mathbb{R}^n$ temos $(n-1)$ casos a considerar[2]

a) Se $(n-m) = 1$ então $M \cap V$ é definido por uma equação $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

b) Se $(n-m) = 2$ então $M \cap V$ é definido por duas equações $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_1, \ldots, x_n)) = (0, 0)$.

c) Se $(n-m) = 3$ então $M \cap V$ é definido por três equações $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_1, \ldots, x_n), F_3(x_1, \ldots, x_n)) = (0, 0, 0)$.

E assim, sucessivamente até obtermos $(n-m) = n-1$. Neste caso, $M \cap V$ é definido por $(n-1)$ equações:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)) = (0, \ldots, 0).$$

2. **(Representação explícita) Gráfico**: Suponha que para cada ponto em M, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma função de classe C^1 tal que:

$$M \cap V = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n / \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) / \mathbf{x} \in D\}.$$

Assim, o conjunto $M \cap V$ é o gráfico da função f e M é uma união de gráficos.

[2]Não consideramos os casos em que $m = 0$ e $m = n$.

3. **(Representação paramétrica) Parametrização**: Suponha que para cada ponto em M, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g : T \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definida num aberto $T \subset \mathbb{R}^m$ tal que:

$$M \cap V = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in T\} = \{g(\mathbf{t}) | \mathbf{t} \in T\}.$$

   Suponha ainda que a matriz jacobiana $Dg(\mathbf{t})$ tem as m colunas linearmente independentes. A função g é uma parametrização de $M \cap V$ com m parâmetros $t \in T$, $M \cap V$ é chamada uma vizinhança de coordenadas e M é uma união de vizinhanças de coordenadas.

Seja $g : T \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização de uma vizinhança de coordenadas $M \cap V$ com $T \subset \mathbb{R}^m$, sendo $g(\mathbf{t_0}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Sabendo que a característica da matriz jacobiana $Dg(\mathbf{t_0})$ é igual a m, sem perda de generalidade, suponhamos que $g(\mathbf{t}) = (h(\mathbf{t}), k(\mathbf{t}))$, em que $h : T \to \mathbb{R}^m$ e $k : T \to \mathbb{R}^{n-m}$, é tal que a característica da matriz $Dh(\mathbf{t_0})$ é igual m. Assim, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança U de $\mathbf{t_0}$ e uma vizinhança D de $\mathbf{a}$ tais que a equação $\mathbf{x} = h(\mathbf{t})$ tem solução única $\mathbf{t} = h^{-1}(\mathbf{x})$. Portanto, da equação $\mathbf{y} = k(\mathbf{t})$ concluímos que $\mathbf{y} = k(h^{-1}(\mathbf{x}))$ e definindo $f(\mathbf{x}) = k(h^{-1}(\mathbf{x}))$ obtemos:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{t}) \leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \text{ em } M \cap V$$

Portanto, as descrições de $M \cap V$ como conjunto de nível zero da função F ou como gráfico da função f ou através da parametrização g são equivalentes. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ descrito de uma destas três formas é chamado de **variedade** de dimensão m, onde a dimensão equivale ao número de parâmetros necessários para descrever M.

Considerando a topologia, a redução da dimensionalidade tem por objetivo remapear uma variedade de um espaço de alta dimensionalidade para um espaço de dimensão inferior. No capítulo seguinte veremos como obter a dimensionalidade do espaço para o qual o objeto poderá ser mapeado, bem como alguns métodos de redução da dimensionalidade.