

2 Neutrinos

2.1 História dos neutrinos

A história das interações fracas data do ano 1896, quando o francês A. Becquerel (1852-1908) descobriu a radioatividade do Urânio. Três anos depois, o neozelandês E. Rutherford (1871-1939), descobriu os raios α e β . O raio γ foi descoberto em 1900 pelo químico e físico francês P. Villard (1860-1934) enquanto estudava o urânio e o rádio. Em 1914, o inglês J. Chadwick (1891-1974) demonstrou que o espectro β era contínuo, diferente dos raios α e γ , e este resultado foi conferido por Ellis e Wooster em 1927. A austríaca L. Meitner(1878-1968) tentou explicar o espectro contínuo do decaimento β , comparando-o com o espectro discreto dos núcleos que produzem os decaimentos α e γ . Ela formulou a hipótese de que a energia faltante no espectro do decaimento β era devida a raios γ , criados em processos secundários pelos elétrons emitidos no mesmo decaimento β . Entretanto, ela demonstrou que sua hipótese estava errada e que a energia ausente no decaimento β não podia ser atribuída aos raios γ . Esse resultado levou a duas possíveis interpretações teóricas: a primeira do dinamarquês N. Bohr (1855-1962), que disse que talvez a conservação da energia neste processo fosse somente num sentido estatístico. A segunda, formulada pelo físico austríaco W. Pauli (1900-1958), que disse que a energia é conservada, que uma radiação adicional é emitida junto com os elétrons e tal radiação consiste de uma nova partícula neutra.

Em 1930, W. Pauli enviou uma carta intitulada “Caros homens e mulheres radioativos” [16] a dois colegas, o físico alemão H. Geiger (1882-1945) e a física austríaca L. Meitner. Nesta carta ele lhes pedia desculpas por não ir a uma conferência em Tübingen (Alemanha), porque ele tinha que ir a uma outra conferência em Zurique (Suíça). Nesse encontro seria discutido o problema do decaimento β , processo no qual um núcleo atômico se transforma em outro

e emite um elétron. A energia dessa partícula varia de zero até um valor máximo, quando se esperava que fosse um valor fixo. Além de justificar sua ausência na carta, Pauli dizia-lhes que havia resolvido o problema inventando uma nova partícula, um férmion neutro que interage muito fracamente com a matéria, com spin $1/2$ e que cumpre o princípio de exclusão. Esse férmion seria emitido no decaimento β e a partícula carregaria a energia que faltava ao elétron emitido no decaimento, e o chamou de *nêutron*¹.

Pauli apresentou sua idéia em 1931 em uma série de conferências e, em 1932, quando Chadwick descobriu o nêutron tal e como o conhecemos hoje [17], o italiano E. Fermi (1901-1954) propôs o nome de *neutrino* (nêutron pequeno). A primeira publicação que faz referência ao neutrino foi na conferência Solvay em Outubro de 1933, onde Fermi [18] e o francês J. Perrin (1670-1942) [19] independentemente concluíram que os neutrinos poderiam não ter massa. O final da década de 1920 e o início da seguinte foi uma era de ouro na física. Cientistas como os alemães W. Heisenberg (1901-1976), M. Born (1882-1970), P. Jordan (1902-1980) entre outros, estabeleceram as bases da mecânica quântica, teoria que descreve o comportamento do mundo na escala atômica.

Nessa mesma época, o físico inglês P. Dirac (1902-1984) previu a existência da anti-matéria, ou pósitron, ao juntar a mecânica quântica com uma outra teoria, a relatividade restrita do físico A. Einstein (1879-1955). Graças a esse trabalho foi possível prever e logo depois observar que uma partícula e sua anti-partícula sob certas condições poderiam ser criadas e logo depois ser aniquiladas.

Em 1934, Fermi juntou o neutrino, o nêutron, a teoria quântica, e o conceito de partícula e anti-partícula em uma teoria sobre o decaimento β conhecida como a teoria de Fermi [20, 21]. Esta teoria descreve o espectro de energia do decaimento β para o caso do o neutrino tem uma massa nula, e de que forma o espectro mudaria se o neutrino tivesse uma massa pequena. Hoje em dia esse espectro é estudado cada vez com maior precisão para determinar o valor dessa massa.

Em 1936, o físico russo G. Gamow (1904-1968) e o físico norte-americano de origem húngara E. Teller (1908-2003) [22], estenderam a teoria adicionando

¹ Pauli chamou-o de *nêutron* porque achou que era a partícula proposta por Rutherford, de carga zero com massa proporcional ao elétron e que compõe o núcleo atômico junto com os prótons. Mas naquela época não se sabia o que era precisamente o nêutron (como o conhecemos hoje) quem se desintegrava, produzindo o decaimento β no processo $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

vetores axiais de tal forma que a paridade é conservada, (a violação de paridade naquela época era inconcebível). A teoria de Fermi explicava muito bem os dados experimentais, mas para alguns cientistas não era convincente, porque o neutrino ainda não havia sido detectado. As primeiras tentativas revelaram que a partícula podia atravessar imensas distâncias sem interagir com nenhum átomo.

O físico alemão H. Bethe (1906-2005) e o inglês R. Peierls (1907-1995), propuseram que se o decaimento do nêutron criava um próton, um elétron e um anti-neutrino, então deveria existir o decaimento β inverso no qual, num processo de fissão fragmentada um neutrino com seção de choque de $\sim 10^{-44}\text{cm}^2$ [23] deveria colidir com um próton, gerando um nêutron e liberando um pósitron [24]. Para demonstrar como isso é pequeno pode se dizer que por 1cm^3 de água que contém 7×10^{22} prótons, um neutrino dificilmente colidiria com um desses átomos pois a probabilidade disso seria da ordem de 10^{-21} . Então para ver um neutrino colidindo seria necessário uma camada de água com uma espessura de 10^{21}cm , que seria a espessura de nossa galáxia.

Os norte-americanos C. Cowan (1919-1974) e F. Reines (1918-1998) imaginaram que a absorção de um neutrino por um próton, num grande tanque com um líquido cintilador² liberaria um pósitron e assim aconteceria a aniquilação com os elétrons do meio. Nesse processo seriam emitidos raios γ , e com esses raios haveria uma emissão de luz que seria detectada por fotocélulas colocadas nas paredes do tanque. O experimento teria que ser feito no subsolo, de outra forma os raios cósmicos alterariam os resultados, porque eles também poderiam ionizar o líquido cintilador usado.

A primeira tentativa de medir esse fenômeno foi chamada *Projeto Poltergeist*, mas ele teve interferência dos raios cósmicos, embora o tanque estivesse 20 metros no subsolo. Para evitar o problema cientistas fizeram um detector novo, nele se intercalavam pequenos tanques do líquido cintilador com tanques menores cheios de água e cloreto de cádmio. Nesse arranjo, quando o neutrino é absorvido pelo próton no decaimento β inverso $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$,

²O líquido cintilador desenvolvido para detectar o neutrino foi

- Tolueno contendo trifetil, 2-(1-naftil)-5-fenil-oxazole(α NPO), e metil borato (ou cádmio),
- Trietilbenzeno contendo 2,5-difeniloxazole, α NPO and metil borato,
- óleo puro contendo 2,5-difeniloxazole, α NPO and metil borato. Essas soluções resultam em uma densidade de 4.6×10^{22} a 7.2×10^{22} prótons por centímetro cúbico.

um pósitron é emitido e o nêutron se move através da água colidindo com núcleos e perdendo energia nesses choques, isso até chegar num nível onde é capturado por um núcleo de cádmio. A captura deixa esse núcleo em estado excitado, causando assim a emissão de raios γ . Esse processo dura em torno de $5\mu s$, então medir a diferença de tempo dos raios γ detectados pelas fotocélulas no tanque foi a técnica usada para “ajustar” a interferência dos raios cósmicos e a confirmação da presença dos neutrinos [25, 26]. Em julho de 1956, depois de usar uma versão melhorada do detector, Cowan e Reines revelaram a Pauli por telegrama que haviam detectado os neutrinos, e a taxa de reações era a prevista pela teoria de Fermi.

Por outro lado, nos experimentos de raios cósmicos encontraram-se duas partículas, uma delas desintegrava-se em dois píons e foi chamada de partícula θ^+ ($\equiv K_{\pi 2}^+$), a outra desintegrava-se em três píons, e foi chamada de partícula τ^+ ($\equiv K_{\pi 3}^+$). O problema foi que quando consideraram as massas e o tempo de vida das duas partículas, encontraram que eram iguais, assim como o spin e a carga. Então, ao decair de diferentes formas sendo a mesma partícula violava a lei da conservação de paridade, isso foi chamado de “quebra cabeça” $\theta - \tau$. Em 1956, os chineses T. Lee (1926-) e C. Yang (1922-), da universidade de Columbia em New York, foram os que viram evidência da violação de paridade nas interações fracas, não só nos decaimentos K , mas sim em todos os decaimentos com interação fraca vistos no passado [27]. Eles sugeriram alguns testes onde a violação da paridade seria observada, como no decaimento β de ^{60}Co polarizado [28], ou $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ e $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$.

Desde essa época a violação de paridade é permitida, e a Lagrangiana que descreve as interações fracas tem agora a presença da violação de paridade ligada às conservações. Porém, isso foi grandemente simplificado com a teoria V-A formulada em 1958 pelos norte-americanos R. Feynman (1918-1988), M. Gell-Mann (1929-) [29], o indiano E. Sudarshan (1931-), o russo S. Marshak (1887-1964) [30] e o japonês J. Sakurai (1933-1982) [31], podendo facilmente ser aplicado no setor dos léptons usando a teoria de dois componentes de neutrinos sem massa, proposta em 1957 pelo soviético L. Landau (1908-1968) [32], T.D. Lee e C.N. Yang [33] e o paquistanês A. Salam (1926-1996) [34]³. Nesta teoria os neutrinos são de mão esquerda e os anti-neutrinos são de mão direita.

Em 1958, o austríaco M. Goldhaber(1911-), L. Grodzins e A.

³A idéia foi proposta primeiro pelo suíço H. Wely (1885-1955) em 1929, mas esta foi rejeitada por Pauli pois violava a até então sagrada paridade.[35]

Sunyar [36] mediram a polarização de um neutrino na captura do elétron, $e^- + {}^{152}\text{Eu} \rightarrow {}^{152}\text{Sm}^* + \nu_e$, com o seguinte decaimento ${}^{152}\text{Sm}^* \rightarrow {}^{152}\text{Sm} + \gamma$. Eles encontraram que a polarização medida do fóton implicava que a polarização do ν_e foi necessariamente numa direção oposta a seu movimento, dentro das incertezas experimentais e em acordo com a teoria de dois componentes de um neutrino sem massa.

O conceito do número leptônico L foi introduzido em 1953 pelo físico norte-americano E. Konopinski (1911-1990) e H. Mahmoud para explicar alguns modos de decaimento. As partículas $e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ são identificadas com $L = 1$, enquanto suas anti-partículas tem $L = -1$, na teoria V-A e ainda hoje no modelo padrão das interações fracas, L é conservado. O experimento Reines-Cowan foi também consistente com a conservação do número leptônico. Por outra parte, o norte-americano R. Davis (1914-2006) tentou observar a reação $\bar{\nu}_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ mas não observou nada porque o processo viola o número leptônico. Para conservar o número leptônico ele tinha que substituir o anti-neutrino eletrônico $\bar{\nu}_e$ pelo neutrino eletrônico ν_e . Esse neutrino eletrônico é produzido no interior do Sol, desta forma ele fez o primeiro detector de neutrinos solares e foi chamado de Homestake [37].

Embora a conservação do número leptônico permita a reação $\mu \rightarrow e + \gamma$, seu limite experimental foi algumas ordens de grandeza menor do que o previsto. Isso sugeriu uma nova lei da conservação, na qual se atribuiu diferentes números leptônicos a cada família leptônica, fazendo agora $\mu \rightarrow e + \gamma$ proibida, assim como $\nu_\mu + n \rightarrow p + e^-$ proibida também. Foi proposto e mostrado pelo físico italiano B. Pontecorvo (1913-1993) [38] que ν_μ produzido em $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ não induz e^- , então ν_μ e ν_e são necessariamente partículas diferentes.

A pedra fundamental na teoria das interações fracas é a formulação do modelo padrão de Glashow-Weinberg-Salam pelo norte-americano S. Weinberg (1933-) [39] e A. Salam [40] em 1967. O modelo é baseado nas teorias de calibre $SU(2) \times U(1)$, as quais prevêem a existência de correntes neutras fracas e do Bóson Z . O modelo padrão adiciona o chamado mecanismo de Higgs dentro do modelo Glashow. O mecanismo de Higgs foi descoberto em 1964 pelo britânico P. Higgs (1929-) [41, 42, 43], e pelos belgas F. Englert (1932-), R. Brout (1928-) [44], G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble [45, 46].

A renormalização do modelo padrão foi feita pelos holandeses G. 't Hooft (1946-) e M. Veltman (1931-) em 1972 [47, 48, 49] levando o modelo a ser

auto-consistente entre a física e a matemática. O sucesso do Modelo Padrão foi afirmado em 1973 quando se descobriu a corrente neutra das interações do neutrino, no experimento Gargamelle do CERN [50, 51, 52] e foi confirmado depois pelo Fermilab [53].

A descoberta em 1974 do quark charme na forma das partículas J/ψ ($c\bar{c}$) em BNL (J) [54] e SLAC (ψ) [55] e logo depois o descobrimento do W^\pm [56, 57] e do Z [58, 59] no CERN, estabeleceram finalmente o Modelo Padrão como o modelo leptônico e hadrônico das interações eletrofracas.

O terceiro lépton, o τ , descoberto pelo norte-americano M. Perl (1927-) em 1975 [60], e os quarks b e t descobertos no Fermilab em 1977 [61] e 1995 [62, 63] completaram o conjunto de partículas do Modelo Padrão com três gerações. Somente a partícula de Higgs ainda não foi encontrada. O número de gerações foi fixado a três em 1989 graças à medida da largura invisível do bóson Z , com o experimento LEP no CERN [64, 65, 66, 67].

Em 1964, J. Christenson, os norte-americanos J. Cronin (1931-), V.L. Fitch (1923-) e o francês R. Turlay (1932-2002) [68] inesperadamente encontraram a violação da simetria CP no decaimento K^0 . A existência desta violação foi colocada no arcabouço do Modelo Padrão através da mistura das três gerações de quarks graças aos físicos japoneses M. Kobayashi (1944-) e T. Maskawa (1940-) [69] em 1973, ampliando dessa forma a teoria da mistura de duas gerações desenvolvida pelo físico italiano N. Cabibbo (1935-) [70] em 1963.

O fluxo de neutrinos solares que bombardeiam a Terra é monitorado desde os anos 70s, mas esses experimentos só detectavam a terça parte dos neutrinos previstos no Modelo Solar Padrão. Essa diferença ficou conhecida como *o problema do neutrino solar*, e como o Modelo Padrão Solar já contava com observações confirmadas, então, acreditava-se que uma nova propriedade do neutrino deveria ser proposta a fim de explicar o déficit na medida. A idéia proposta até agora que melhor explica o fenômeno é a oscilação dos neutrinos, onde um neutrino do elétron que sai do centro do Sol e vai até a Terra pode mudar a um neutrino do múon (ν_μ) ou do tau (ν_τ). Isso pode ser explicado graças à mecânica quântica mas só poderia acontecer se os neutrinos tivessem massa.

O conceito de oscilação de neutrino foi proposto primeiro por B. Pontecorvo [71, 72]; ele motivado pelo fenômeno de oscilação dos $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ (M. Gell-Mann and A. Pais [73], 1955), no qual o número quântico estranheza

está oscilando. A primeira teoria que ele propôs para explicar o fenômeno de oscilação (a qual foi falida) foi $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ para neutrinos de Majorana. Para provar esta teoria B. Pontecorvo usou a reação $\bar{\nu} + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ feita por Davis para detectar anti-neutrinos, (a qual está errada porque viola o número leptônico). Segundo sua teoria de oscilação, $\nu \rightarrow \bar{\nu}$, poder-se-ia fazer $\nu + {}^{37}\text{Cl}$ e obter a reação ${}^{37}\text{Ar} + e^-$. Porém, a teoria V-A das interações fracas implica que no regime ultra-relativístico que é aplicado aos neutrinos, os anti-neutrinos são de helicidade de mão direita, e mesmo que eles oscilem eles serão sempre de mão direita porque há conservação da helicidade, e para obter $\nu + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ precisa-se de neutrinos de mão esquerda.

Um estudo mais em acordo com a teoria de oscilação que conhecemos hoje foi feito pelos japoneses Z. Maki, M. Nakagawa e S. Sakata em 1967 [74]. Eles propuseram que os neutrinos ν_e e ν_μ são estados misturados de dois auto-estados da massa.

Em 1967, Pontecorvo apresentou o primeiro trabalho tentando, talvez de uma forma um pouco intuitiva, entender a mistura dos neutrinos e sua oscilação [75] o qual foi depois completado por V. Gribov e B. Pontecorvo em 1969 [76]. A teoria da oscilação dos neutrinos foi finalmente completada por S. Eliezer e A. Swift [77], H. Fritzsch e P. Minkowski [78], S. Bilenky e B. Pontecorvo [79, 80] nos anos 1975-1976.

Os neutrinos atmosféricos no começo foram vistos como um resíduo não desejado nos experimentos que investigavam o decaimento do próton, mas graças a isso e com a ajuda de algumas outras teorias da época, os pesquisadores concluíram que se tratava de uma possível oscilação do neutrino. O neutrino atmosférico foi descoberto nos anos 80's, no experimento Kamiokande [81] e IMB [82]. Hoje, a alta precisão nas medidas do experimento do Super-Kamiokande [83], confirmadas pelas medidas dos experimentos Soudan 2 [84, 85, 86] e MACRO [87, 88], nos fornecem informação precisa sobre os valores dos parâmetros da oscilação do neutrino atmosférico, os quais estão em acordo com resultados dos primeiros experimentos independentes em grande escala, o experimento K2K [89, 90] e o MINOS [91, 92].

Na década passada, aconteceram grandes avanços na busca da solução do problema do neutrino solar, o qual acredita-se que foi finalmente bem entendido. Este problema foi descoberto no experimento Homestake [37], e observado com o experimento Kamiokande, GALLEX/GNO [93, 94], SAGE [95, 96], Super-Kamiokande, KamLAND [97, 98, 99] e SNO [100].

Em particular, este último experimento foi fundamental para resolver o problema do neutrino solar em 2002. A resposta para a “perda” dos neutrinos solares foi finalmente encontrada e é devida a uma oscilação de ν_e a ν_μ ou ν_τ dentro do Sol explicada pelo efeito MSW (Mikheev-Smirnov-Wolfenstein) [101, 102, 103]. Por outro lado, o modelo solar proposto pelo americano John Bahcall (1934-2005) e outros [104, 105, 106] chegou a ser o Modelo Padrão o qual pode ser usado para pesquisar outras propriedades do neutrino solar.

Todos os dados dos experimentos atmosféricos e solares acima mencionados, são bem explicados pela teoria de oscilação dos neutrinos. Um modelo simples é a mistura dos três neutrinos, no qual o sabor dos três neutrinos ν_e , ν_μ e ν_τ são uma combinação linear unitária de três neutrinos massivos ν_1 , ν_2 e ν_3 . Com isso temos ideia do valor da diferença do quadrado das massas δm_{12}^2 (atmosférico), o valor absoluto de $\delta m_{31}^2 = \delta m_{32}^2$ (solar), e os valores da mistura dos ângulos θ_{12} (atmosférico) e θ_{23} (solar). O valor da mistura do terceiro ângulo θ_{13} , o valor das fases da CP (uma para os neutrinos de Dirac e três para os neutrinos de Majorana), a escala absoluta das massas dos neutrinos e o sinal de m_{31}^2 estão ainda em aberto.

Sobre o ângulo θ_{13} , conhece-se somente um limite superior, obtido pela ausência de oscilação de neutrinos observado nos reatores CHOOZ [107] e Palo Verde [108, 109]. O valor da escala absoluta das massas dos neutrinos tem até agora só um valor inferior de alguns poucos eV, obtidos por medidas cinemáticas do espectro do elétron nos recentes experimentos de Mainz [110] e Troitzk [111], onde está presente o decaimento beta do trítio [112].

Uma pergunta que está ainda em aberto, além das expostas antes, é qual deveria ser o tipo de neutrino, se Dirac ou Majorana. O experimento duplo decaimento β sem neutrinos é considerado o mais promissor para encontrar essas respostas.

2.2

Física de neutrinos

Segundo o Modelo Padrão, 12 partículas são a base da matéria: 6 quarks e 6 léptons. Os neutrinos são léptons e têm a propriedade de não possuírem carga elétrica. Além disso, o neutrino no Modelo Padrão é um férmion sem massa descrito por um espinor de duas componentes, os quais são projeções quirais de um operador de campo Ψ de quatro componentes, com spin 1/2,

e sempre orientado na direção oposta de sua velocidade ou que tem sempre helicidade negativa.

A helicidade negativa é uma consequência da suposição que o neutrino no Modelo Padrão é considerado sem massa. A helicidade não é conservada sob transformações de Lorentz e a única forma que a helicidade se conserve nesta transformação é que a partícula viaje à velocidade da luz tendo massa zero. São conhecidos 3 tipos de neutrinos: o neutrino eletrônico ν_e , o neutrino muônico ν_μ e o neutrino taônico ν_τ . ver (tabela 2.1)

Para estudar um pouco mais a fundo as propriedades dos neutrinos, teremos que usar algumas notações da teoria de campos como a matriz γ^5 , que pode ser chamada de matriz quiralidade, onde $(\gamma^5)^2 = \pm 1$. Se denotamos os campos que são auto-funções de γ^5 como Ψ_L e Ψ_R , com auto-valores -1 e $+1$ respectivamente, então

$$\begin{aligned}\gamma^5\Psi_R &= +\Psi_R, \\ \gamma^5\Psi_L &= -\Psi_L,\end{aligned}\tag{2.1}$$

os campos Ψ_R e Ψ_L são chamados de mão-direita e de mão-esquerda.

Também é possível escrever o espinor como uma mistura de Ψ_R e Ψ_L como

$$\Psi = \Psi_R + \Psi_L,\tag{2.2}$$

com

$$\Psi_R = P_R\Psi,\tag{2.3}$$

$$\Psi_L = P_L\Psi,\tag{2.4}$$

onde o operador quiralidade é definido como

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2},\tag{2.5}$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2},\tag{2.6}$$

e satisfaz as propriedades

$$P_R + P_L = 1, \quad (2.7)$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (2.8)$$

$$(P_L)^2 = P_L, \quad (2.9)$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (2.10)$$

Os campos quirais Ψ_L e Ψ_R são conhecidos como espinores de Weyl ⁴.

Um espinor de Weyl tem só duas componentes independentes, para que isso seja verificado podemos trabalhar na representação de Weyl (quiral)

$$P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

e escrever o espinor Ψ como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

onde χ_R e χ_L são espinores de duas componentes, com (2.12) sobre (2.5) obtemos

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \chi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Isso mostra que Ψ_R e Ψ_L tem somente duas componentes.

Para partículas massivas, a quiralidade permanece invariante sob transformações de Lorentz, mas para partículas não massivas, a quiralidade e a helicidade são invariantes sob transformações de Lorentz e são equivalentes.

⁴É curioso dizer que a possibilidade de descrever o comportamento de uma partícula com os espinores de Weyl foi rejeitado por Pauli em 1933, porque estes levavam à violação da Paridade. De fato, a inversão espacial de Ψ_R e Ψ_L implica que a conservação de paridade precisa da simultânea existência das duas componentes quirais. Porém, em 1956-57 se reabriu a possibilidade de descrever partículas sem massa com os espinores de Weyl, quando se descobriu a violação de paridade. Landau [32], Lee e Yang [33] e Salam [34] propuseram descrever o neutrino com o espinor de Weyl de mão-esquerda Ψ_L . Esta é a chamada teoria de dois componentes de neutrinos sem massa a qual foi incorporada ao Modelo Padrão das partículas.

Férmion	Representação	Massa
Geração 1(elétron)		
neutrino eletrônico	ν_e	$< 2.2\text{eV}$
anti-neutrino eletrônico	$\bar{\nu}_e$	$< 2.2\text{eV}$
Geração 2(múon)		
neutrino muônico	ν_μ	$< 170\text{keV}$
anti-neutrino muônico	$\bar{\nu}_\mu$	$< 170\text{keV}$
Geração 3(tao)		
neutrino taônico	ν_τ	$< 15.5\text{MeV}$
anti-neutrino taônico	$\bar{\nu}_\tau$	$< 15.5\text{MeV}$

Tabela 2.1: Valores das massas dos neutrinos.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \Psi_R &= \Psi_R, \\ \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \Psi_L &= -\Psi_L. \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}$ é o operador helicidade definido como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

onde σ são as matrizes de Pauli e \vec{P} é o momento linear⁵. Desta forma vê-se que para partículas sem massa a quiralidade (2.1) e a helicidade (2.14) são idênticas.

⁵O operador helicidade pode-se definir também assim

$$\hat{h} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s|\vec{P}|}$$

onde \vec{S} é o operador do spin

2.3

Neutrinos de Majorana e Dirac

Até agora falamos das propriedades e da massa do neutrino, e dissemos que a massa do neutrino poderia ser de Dirac ou de Majorana, mas não explicamos o que são estes dois termos. De uma forma geral podemos dizer que como os neutrinos têm massa, então eles deveriam ser como qualquer outro férmion e ter espinores de Dirac, mas há um porém: como os neutrinos não têm carga elétrica então eles poderiam ter espinores de Majorana. Entre os férmions somente o neutrino poderia ser de Majorana, isso porque a carga é uma quantidade até agora conservada, e nenhuma partícula carregada poderia ser de Majorana. Nesta seção vamos explicar como é que isso pode acontecer.

O neutrino livre é descrito por

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\nu) \Psi, \quad (2.16)$$

onde m_ν é a massa do neutrino e Ψ é o biespinor ou um espinor de 4 componentes. A equação de movimento é

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\nu) \Psi = 0, \quad (2.17)$$

que é a chamada equação de Euler-Lagrange, e que tem como solução

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \sum_{s=\pm 1/2} (a_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + b_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (2.18)$$

onde s é o spin e $E = p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, os espinores u_s e v_s são ondas planas com energia positiva e negativa respectivamente e $a_s(p)$ e $b_s^\dagger(p)$ são operadores que aniquilam o estado de uma partícula de momentum p e com a componente do spin na direção do momentum.

Aplicando a conjugação de carga na equação (2.18) temos

$$C\Psi(x)C^{-1} = \Psi^c = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \sum_{s=\pm 1/2} (n_c^* b_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + n_c^* a_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (2.19)$$

e com a condição que $\Psi = e^{i\theta} \Psi^c$ para o campo de Majorana, onde uma partícula é igual a sua anti-partícula, podemos assim comparar (2.18) e (2.22) obtendo

$$a_s(p) = n_c^* b_s, \quad (2.20)$$

$$b_s^\dagger(p) = n_c^* a_s^\dagger(p). \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) em (2.18) obtemos o campo de Majorana

$$\Psi_M = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \sum_{s=\pm 1/2} (a_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} + n_c^* a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x}), \quad (2.22)$$

onde n_c^* é um fator, e $|n_c^*| = 1$. Então o campo de Dirac (2.18) precisa de 4 operadores a_s , a_s^\dagger , b_s e b_s^\dagger , e o campo de Majorana precisa de dois a_s e a_s^\dagger .

Da Langrangiana (2.16) podemos escrever o termo de massa de Dirac e Majorana assim

$$-\mathcal{L}_{massa} = m\bar{\Psi}\Psi, \quad (2.23)$$

$$-\mathcal{L}_{massa} = m(\Psi_L + \Psi_R)(\Psi_L + \Psi_R), \quad (2.24)$$

na equação (2.23) vemos como a massa acopla as componentes da mão esquerda com as componentes de mão direita do campo fermiônico. Então, como já vimos para Dirac temos

$$-\mathcal{L}_D = m_D\bar{\Psi}_L\Psi_R + m_D\bar{\Psi}_R\Psi_L = \bar{\Psi}\Psi. \quad (2.25)$$

Este termo permite a conservação do número leptônico L , mas o problema é que $\bar{\Psi}_R$ não está contemplado no Modelo Padrão.

A Langrangiana de Majorana pode ser escrita como

$$-\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} ((\Psi_L^-)^c M \Psi_L + \bar{\Psi}_L M (\Psi_L)^c). \quad (2.26)$$

O neutrino de Majorana não tem número leptônico definido, ele viola o número leptônico em $\Delta L = \pm 2$.

Uma diferença muito grande entre o termo de massa de Dirac e Majorana é que o termo de Dirac é invariante sob transformações $U(1)$, isto é

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha}\Psi, \quad (2.27)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\Psi}, \quad (2.28)$$

$$\bar{\Psi}\Psi \rightarrow e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.29)$$

Com isso temos $\bar{\Psi}\Psi = \Psi\bar{\Psi}$, quer dizer que o termo de massa de Dirac conserva a carga elétrica e o número bariônico.

2.4

Massa do neutrino

Como foi mencionado na seção (2.1), no Modelo Padrão os neutrinos não têm massa, mas hoje sabemos que eles têm, e isto graças ao efeito de oscilação de sabor que eles sofrem à medida que evoluem no tempo. Essa teoria da oscilação explica bem o problema do neutrino solar, o qual foi detectado por vários experimentos como Homestake, GALLEX, SAGE, GNO, Kamiokande, Super-Kamiokande.

Até agora não se encontrou uma medida direta do valor absoluto da massa do neutrino, existem apenas limites superiores de ν_e , ν_μ , ν_τ [112, 113, 114], que foram obtidos cinematicamente

$$\nu_e < 2.2\text{eV}, \quad (2.30)$$

$$\nu_\mu < 170\text{keV}, \quad (2.31)$$

$$\nu_\tau < 15.5\text{MeV}. \quad (2.32)$$

Por outro lado, a teoria de oscilação dos neutrinos nos proporciona somente valores dos quadrados das massas dos neutrinos [9]

$$\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 = 7.9_{-0.8}^{+1.0} \times 10^{-5} \text{eV}^2, \quad (2.33)$$

$$\Delta m_{32}^2 = |m_3^2 - m_2^2| = 2.2_{-0.8}^{+1.1} \times 10^{-3} \text{eV}^2, \quad (2.34)$$

$$\Delta m_{31}^2 = m_3^2 - m_1^2 \simeq 2.2 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \quad (2.35)$$

e ainda se tem o problema da hierarquia das massas, onde não se sabe se $(m_1 < m_2 < m_3)$ ou $(m_3 < m_1 < m_2)$.

2.4.1

A oscilação do neutrino

A oscilação do neutrino é um fenômeno quântico proposto por Pontecorvo nos anos 1950s [71, 72] no qual a probabilidade de medir um determinado sabor leptônico tem uma dependência periódica com a propagação do neutrino. A fim de explicar essa mudança de sabor, e em analogia com a oscilação $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$, Pontecorvo introduz o termo de neutrino *estéril* [75], pois até os anos 1950 só se conhecia o neutrino *ativo* ν_e . O neutrino *estéril* é um férmion neutro que não tem parte nas interações fracas.

Em 1962, Maki-Nakagawa e Sakata [74] foram os que consideraram pela primeira vez um modelo com a mistura dos diferentes sabores leptônicos dos neutrinos. A mistura dos neutrinos está definida pela matriz

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

que é chamada de matriz MSN. Também em 1962 Lederman, Schwartz, Steinberger *et al* [115] encontraram o neutrino muônico e, com essa descoberta, conseguiu-se provar que a oscilação entre diferentes sabores de neutrinos ativos é possível, isso se os neutrinos são massivos e misturados.

Em 1967, Pontecorvo [75] previu o problema do neutrino solar como uma consequência da transição $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, e foi medido depois no experimento de Homestake. Um importante fato na oscilação de neutrino é que nos experimentos de oscilação os neutrinos detectados são ultra-relativísticos, e a massa do neutrino é da ordem de $\sim eV$, e somente neutrinos com energia maior que 100KeV são detectados.

A criação dos neutrinos

Neutrinos ν_α e anti-neutrinos $\bar{\nu}_\alpha$ com sabor $\alpha = e, \mu, \tau$ são produzidos pelo decaimento de um lépton carregado l_α^- ou um anti-lépton carregado l_α^+ , devido a processos de interações fracas de correntes carregadas (CC). A Langrangiana de interação leptônica de corrente carregada que descreve esses processos é

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left(j_{W,L}^\rho W_\rho + j_{W,L}^{\rho\dagger} W_\rho^\dagger \right), \quad (2.37)$$

onde $j_{W,L}^\rho$ é a corrente carregada leptônica

$$j_{W,L}^\rho = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\Psi}_{\alpha L}^- \gamma^\rho l_{\alpha L} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k}^* \bar{\Psi}_{kL}^- \gamma^\rho l_{\alpha L}, \quad (2.38)$$

a qual é válida para massas de Dirac e de Majorana (ver seção 2.3).

Estes neutrinos serão detectados em processos de espalhamento de corrente carregada e corrente neutra fraca, e em espalhamentos elásticos $\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$ que tenham a seção de choque proporcional à energia do neutrino, $\sigma(E) \sim \sigma_0 E_\nu / m_e$ com $\sigma_0 \sim 10^{-44} \text{cm}^{-2}$.

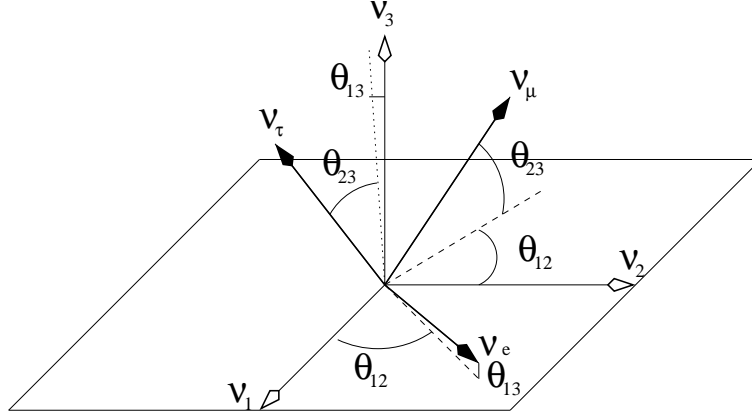


Figura 2.1: Gráfico da mistura dos auto-estados de sabor do neutrino ν_e, ν_μ, ν_τ , dos auto-estados de massa ν_1, ν_2, ν_3 e dos ângulos de mistura $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$.

A matriz de mistura

Os auto-estados de sabor ν_e, ν_μ, ν_τ são uma combinação linear de auto-estados de massa definidos como ν_1, ν_2, ν_3 com massas m_1, m_2, m_3 respectivamente. De 2.36 para os três sabores temos

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

onde $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$. Os fatores de fase α_1 e α_2 são diferentes de zero somente se consideramos os neutrinos como de Majorana, e não entrariam no fenômeno de oscilação de neutrinos, α_1 e α_2 implicam a fase de violação de CP de Majorana. A fase δ é diferente de zero ou π somente se a oscilação de neutrino viola a simetria CP, mas isto ainda não foi verificado experimentalmente. Na figura (2.1) mostra-se a relação entre os auto-estados de sabor e os auto-estados de massa, assim como os ângulos de mistura [116].

A oscilação de neutrinos no vácuo

O processo de oscilação dos neutrinos [77, 78, 79, 80], no qual um neutrino ν_α muda seu sabor leptônico a ν_k está descrito pela equação

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle, \quad \text{com } \alpha = e, \mu, \tau, \quad (2.41)$$

onde $\langle \nu_\alpha | \nu_k \rangle = \delta_{\alpha k}$ e $U_{\alpha k}^*$ é a matriz de mistura. Os estados dos neutrinos massivos $|\nu_k\rangle$ são auto-estados da Hamiltoniana

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle, \quad (2.42)$$

com auto-estado de energia $E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2}$. A evolução temporal é dada pela equação que é equivalente à equação de Schrödinger na mecânica quântica não-relativística

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H}|\nu_k(t)\rangle. \quad (2.43)$$

Isso implica que o estado do neutrino massivo $|\nu_e\rangle$ evolui no tempo como uma onda plana, isso é

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (2.44)$$

Se consideramos agora um estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ o qual descreve um neutrino criado num tempo $t = 0$ com um sabor α , e com (2.41) e (2.44) então teremos

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad \text{com } \alpha = e, \mu, \tau \quad (2.45)$$

tal que

$$|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.46)$$

e usando a propriedade da matriz de mistura de ser unitária,

$$U^\dagger U = 1 \quad \leftrightarrow \quad \sum_\alpha U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} = \delta_{jk}.$$

Então, os estados massivos $|\nu_k\rangle$ podem ser expressados como

$$|\nu_k\rangle = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \quad (2.47)$$

e com isso obtemos

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_{k=1,2,3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle \quad \text{com } \alpha = e, \mu, \tau. \quad (2.48)$$

Com a equação (2.48) temos que os estados de neutrinos massivos $|\nu_\alpha\rangle$ são uma superposição de diferentes estados de sabor em $t > 0$.

A amplitude $A(t)$ das transições de $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ em um tempo t é

$$\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t), \quad (2.49)$$

e a probabilidade destas transições será determinada por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (2.50)$$

Para neutrinos ultra-relativísticos temos que a energia pode ser tomada como

$$E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2} \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}, \quad (2.51)$$

e

$$E_k - E_j = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}, \quad (2.52)$$

Δm_{kj}^2 é a diferença quadrada de massas. A probabilidade pode ser expressada como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t}. \quad (2.53)$$

Nos experimentos de oscilação de neutrinos o tempo t não é medido mas pode-se medir o deslocamento que faz o neutrino desde a fonte até o detector, e considerando que o neutrino é ultra-relativístico podemos fazer $L \simeq t$. Deste modo temos

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L}. \quad (2.54)$$

A probabilidade de oscilação ainda pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \Re(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \left(1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L\right) \right) \\ + 2 \sum_{k>j} \Im(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L\right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

ou na forma

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} L\right) \\ + 2 \sum_{k>j} \Im(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L\right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

com $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ e $k, j = 1, 2, 3$.

A probabilidade de oscilação satisfaz duas regras de conservação de probabilidade que são:

- A soma das probabilidades de transição de um sabor ν_α a todos os sabores dos neutrinos ν_β (com $\alpha = \beta$) é igual a um,

$$\sum_{\beta} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1,$$

- A soma das probabilidades de transição de algum neutrino com sabor ν_α (com $\alpha = \beta$) a um neutrino com sabor ν_β é igual a um,

$$\sum_{\alpha} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1.$$

2.4.2

O limite Grestein Zeldovich.

O limite de massa proporcionado pela Cosmologia foi primeiramente determinado por Grestein e Zeldovich [117], e os critérios que eles levaram em consideração para realizar o cálculo [6] foram:

- Equilíbrio térmico no começo do Universo entre os neutrinos, elétrons e fótons.
- Uma assimetria quase zero ou tão pequena que o potencial químico leptônico não é considerado no cálculo da densidade de energia, embora a validade desta suposição ainda não tenha sido conferida experimentalmente. Nas contas que fizeram Gerstein e Zeldovich usaram $\mu = 0$.
- Que não existam outras fontes que possam esquentar os fótons em $T \leq \text{MeV}$, a não ser o processo de aniquilação e^+, e^- , se os fótons foram esquentados em algum ponto entre o desacoplamento do neutrino e hoje então o limite da massa do neutrino deveria mudar.

O neutrino sofreu o desacoplamento quando $T_\gamma \sim 1\text{MeV}$ sendo uma partícula relativística, com função de distribuição dada pela equação de Fermi-Dirac e com densidade de número dada pela equação (3.90). Fazendo a aproximação $T_\gamma \ll m_\nu$ na equação (3.90) temos

$$n_\nu = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_\nu T_\nu^3 & \text{Bósons,} \\ \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} g_\nu T_\nu^3 & \text{Férmions,} \end{cases} \quad (2.57)$$

e usando as equações (3.135) e (2.58) teremos

$$n_\nu = B \left(\frac{g_s}{g_s^{\nu-des}} n_\gamma \right), \quad (2.58)$$

com $B = 1$ para fótons e $B = 3/4$ para férmions, teremos

$$n_\nu + \bar{n}_\nu = \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} g_\nu (T_\nu^0)^3 = \frac{3\zeta(3)}{11\pi^2} g_\nu (T_\gamma^0)^3, \quad (2.59)$$

$$n_\nu + \bar{n}_\nu = \frac{3}{11} n_\gamma \simeq 111.9 \pm 0.1 \text{cm}^{-3}. \quad (2.60)$$

Na equação (2.59) fizemos $g_\nu = 1$, porque estamos no limite $T_\gamma \sim T_\nu^{\nu-des}$, sendo antes do desacoplamento quando os neutrinos e anti-neutrinos estavam em equilíbrio térmico. Então para a densidade de energia usando (2.59) teremos

$$\sum_j (\rho_{\nu_j} + \bar{\rho}_{\nu_j}) = \sum_j m_{\nu_j} (n_\nu + \bar{n}_\nu), \quad (2.61)$$

$$\Omega_\nu = \frac{\sum_j (\rho_{\nu_j} + \bar{\rho}_{\nu_j})}{\rho_c} = \frac{\sum_j m_{\nu_j} (111.9 \pm 0.1 \text{cm}^{-3})}{1.8788 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3}}, \quad (2.62)$$

$$\Omega_\nu h^2 \simeq \frac{\sum_j m_{\nu_j}}{94.14 \text{eV}}. \quad (2.63)$$

A relação (2.63) é o chamado limite Gerstein Zeldovich, e seria importante para o balanço de energia do Universo hoje, se tivéssemos neutrinos com massa da ordem de $\sim 1\text{eV}$ ou maior. Também é importante do ponto de vista histórico, porque Gerstein e Zeldovich conseguiram obter de uma forma direta um limite competitivo na época para a massa do neutrino.

Agora com medições do WMAP do conteúdo de matéria no Universo, temos que $\Omega_m h^2 = 0.135_{-0.009}^{+0.008}$ então

$$\Omega_\nu h^2 \ll \Omega_m h^2 \rightarrow \sum_j m_{\nu_j} \ll 13 \text{eV}. \quad (2.64)$$

O primeiro limite para a massa do neutrino que foi encontrado por Gerstein e Zeldovich foi de $m_\nu < 400 \text{eV}$ o qual foi muito elevado porque eles usaram um valor pequeno para a idade do Universo, $t_0 \geq 5 \text{GeV}$, e um valor muito errado da densidade de energia cosmológica, $\rho < 2 \times 10^{-28} \text{g cm}^{-3}$. Nos subseqüentes artigos eles melhoraram os resultados obtendo $m_\nu < 130 \text{eV}$; no artigo de Cowsik e McClelland [118] foi encontrado um limite bem baixo, $m_\nu < 8 \text{eV}$.