

3

Oscilações de Neutrinos

A oscilação de neutrinos é um fenômeno quântico, proposto pela primeira vez por Pontecorvo [68, 69], quando este sugeriu a oscilação entre $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ fazendo analogia com a oscilação dos Káons ($K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$) durante a década de 50. Tal tipo de oscilação acabou não sendo comprovada, mas a idéia de oscilação permaneceu viva e foi usada para introduzir o conceito de mistura de sabores por Maki, Nakagawa e Sakata [70] em 1962. Apesar de muito mencionada nos anos 60 e início dos 70 como solução para o problema dos neutrinos solares, foi somente na segunda metade da década de 70 que surgiu a teoria padrão para a oscilação dos neutrinos [71, 72, 73].

3.1

Neutrinos

Neutrinos, assim como todas as partículas que formam a matéria conhecida, são férmions o que significa que eles respeitam o Princípio de Exclusão de Pauli e obedecem a estatística de Fermi-Dirac. Também é característica geral o valor do spin (1/2) e a helicidade¹, sempre negativa para os neutrinos e sempre positiva para os antineutrinos (Fig. 3.1), considerando-os ultra-relativísticos. Mas os neutrinos estão em um subgrupo, chamado de *léptons*². As partículas que pertencem a esta categoria são: elétrons, múons, taus e os respectivos neutrinos, ν_e , ν_μ e ν_τ , onde o subíndice indica o que, na física de partículas, chamamos de sabor. Cada lépton é associado a um anti-lépton, isto é, sua anti-partícula (ver tabela 3.1). Os elétrons, múons e taus possuem carga e massa enquanto que os neutrinos, por sua vez, não possuem carga e interagem muito fracamente com a matéria, somente via interação fraca - de corrente carregada

¹Pode-se definir helicidade como a projeção do spin ao longo do momento, se têm mesmo sentido, é positiva; se contrários, é negativa.

²Proveniente do grego, significa leve. O nome foi dado para contrapor-se aos hádrons, que são partículas pesadas.

Léptons			Anti-Léptons		
1ª Geração	2ª Geração	3ª Geração	1ª Geração	2ª Geração	3ª Geração
e^-	μ^-	τ^-	e^+	μ^+	τ^+
ν_e	ν_μ	ν_τ	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$

Tabela 3.1: Tabela de Léptons

(CC, em inglês) ou de corrente neutra (NC, em inglês). Por isso, os ν_e , ν_μ e ν_τ são auto-estados da interação fraca, o que significa que são auto-estados de sabor. Por outro lado, podemos considerá-los auto-estados de massa do Hamiltoniano livre e denominamos de *auto-estados de massa*, cujo símbolo é ν_i e tem massa definida m_i , onde $i = 1, 2$ ou 3 . O caso dos neutrinos é semelhante ao setor dos quarks: os auto-estados de sabor são combinações lineares dos auto-estados de massa, determinados pela matriz unitária Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)³ [74]. Para um aprofundamento no assunto, recomendamos a leitura, por exemplo, de [75, 76, 77]. Em outras palavras, os neutrinos também se misturam significando que um ν_e , em princípio, é uma combinação linear dos auto-estados de massa ν_i . Importante observar que os experimentos de oscilação de neutrinos são capazes de detectar apenas os sabores dos neutrinos, que não são auto-estados de massa do Hamiltoniano, levando à possibilidade de oscilação de neutrinos.

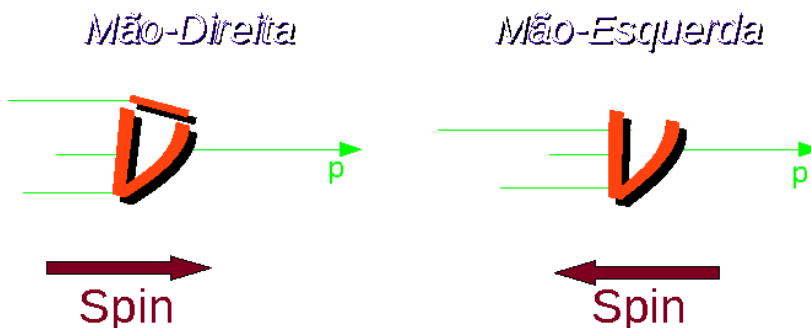


Figura 3.1: Ilustração representativa da helicidade dos neutrinos.

³Trabalho realizado primeiramente pelo físico italiano Nicola Cabibbo, em 1963, para duas gerações. Posteriormente, os físicos japoneses Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa ampliaram para três gerações. Tal trabalho rendeu o Prêmio Nobel de Física de 2008 aos japoneses.

3.1.1 Hierarquia

Vimos que temos três tipos de neutrinos que são auto-estados de massa do Hamiltoniano (ν_1, ν_2 e ν_3) e embora não saibamos quais sejam os valores de cada neutrino massivo, sabemos que eles possuem valores distintos ⁴ e, ao menos, dois deles não nulos. Há duas formas de organizar os neutrinos quanto ao seu valor absoluto de massa (veja Fig. 3.2):

1. Hierarquia Normal: é a situação quando consideramos que $m_1 < m_2 < m_3$, isto é, o neutrino mais leve é ν_1 e o mais pesado o ν_3 .
2. Hierarquia Invertida: aqui o neutrino mais leve é ν_3 e o mais pesado o ν_2 , resultando em $m_2 > m_1 > m_3$.

3.2 Oscilação no Vácuo

3.2.1 Neutrinos

Na teoria padrão para a oscilação, um neutrino com sabor α e momento \vec{p} criado em um processo de interação fraca via CC pode ter o seu estado de sabor descrito como

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad , \quad (3.1)$$

onde U é a matriz de mistura, unitária ⁵, para o setor de neutrinos. Ela foi batizada de Matriz MNS ⁶ em homenagem aos físicos que a criaram, Maki, Nakagawa e Sakata ⁷, em 1962. Como temos três espécies de neutrinos ativos, a matriz MNS é 3 x 3 e parametrizada por rotações, semelhante as rotações

⁴Condição necessária para haver oscilação entre os sabores, já comprovado experimentalmente.

⁵É uma matriz complexa, 3 x 3, que satisfaz a condição

$$U^\dagger U = \mathbf{1} \quad .$$

⁶A matriz MNS também é conhecida na literatura como matriz PMNS em referência ao trabalho pioneiro realizado por Pontecorvo.

⁷Originalmente o trabalho dos físicos japoneses envolveu apenas mistura para duas gerações, sendo ampliado para três alguns anos mais tarde.

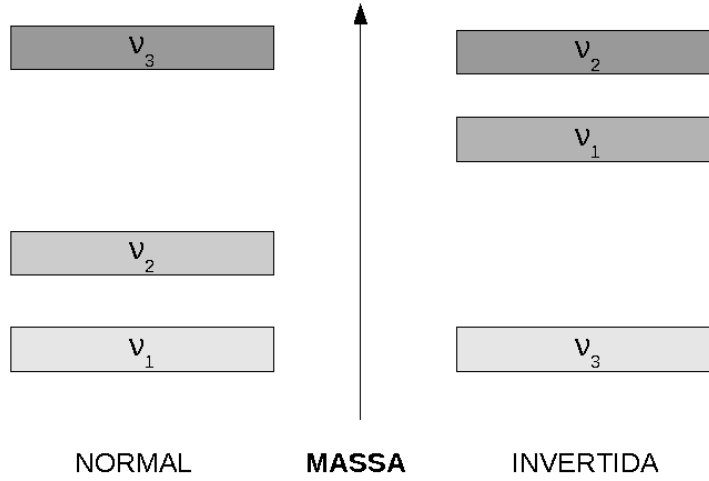


Figura 3.2: Ilustração representativa da hierarquia de massa dos neutrinos.

da mecânica utilizando ângulos de Euler. Estas rotações podem ser feitas em várias ordens, mudando sua forma final, embora não altere os resultados físicos. No entanto, iremos utilizar a mesma ordem que é amplamente vista na literatura [15],

$$U_{MNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\phi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

que resulta na expressão

$$U_{MNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\phi} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\phi} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\phi} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\phi} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\phi} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde definimos que c_{ij} (s_{ij}) é $\cos \theta_{ij}$ ($\sin \theta_{ij}$) e os subíndices do ângulo θ indicam a mistura entre os dois neutrinos massivos envolvidos, e ϕ é a fase de violação carga-paridade (CP). Para uma melhor compreensão veja a ilustração da Fig. 3.3, retirada da ref. [78].

A título de curiosidade, a matriz MNS representada na eq. (3.3) tem esta forma se considerarmos que neutrinos são partículas de Dirac. Caso pensarmos que eles sejam partículas de Majorana, há uma pequena modificação, com acréscimo de outras duas fases complexas de violação CP ao final, deixando a

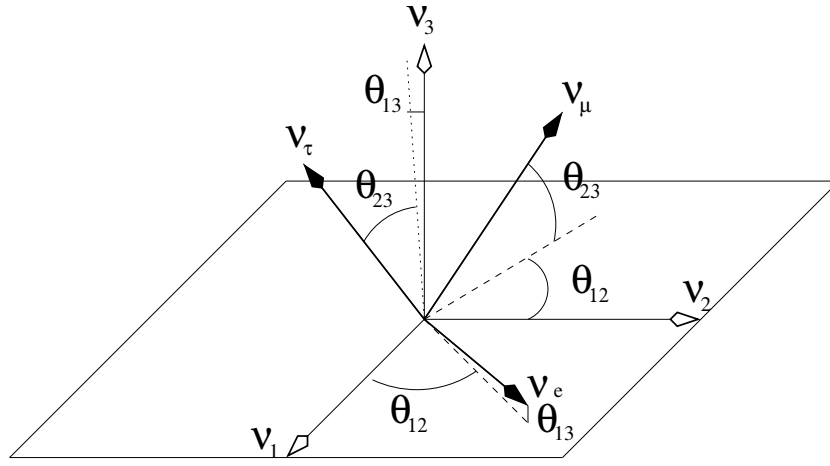


Figura 3.3: Relação entre os auto-estados de sabor dos neutrinos ν_e, ν_μ e ν_τ e os auto-estados de massa ν_1, ν_2 e ν_3 em termos dos ângulos de mistura $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$.

matriz MNS

$$U_{MNS}^M = U_{MNS} \times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Mas para este trabalho não há influência nos resultados se considerarmos os neutrinos como partículas de Dirac ou de Majorana. Sendo assim, vamos trabalhar com a forma de Dirac por simplicidade.

Assumimos, para ter ortonormalidade nos auto-estados de massa, que

$$\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3), \quad (3.5)$$

e a unitariedade da matriz de mistura implica que os estados de sabores também são ortonormais

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau). \quad (3.6)$$

Como dito acima, os auto-estados do Hamiltoniano não são os estados de sabores do neutrino, mas sim, os estados de massa. Então

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle \quad , \quad (3.7)$$

onde a energia E_k é

$$E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2} \quad . \quad (3.8)$$

Utilizando a eq. correspondente a eq. de Schrödinger, da mecânica quântica não relativística, vemos que os neutrinos massivos evoluem no tempo,

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu_k(t)\rangle \quad , \quad (3.9)$$

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad . \quad (3.10)$$

Considerando o estado de sabor, $|\nu_\alpha(t)\rangle$, que no tempo $t = 0$ cria um neutrino com sabor α e aplicando a eq. (3.1) podemos ter a evolução temporal como

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k(t)\rangle \quad , \quad (3.11)$$

e usando a relação de unitariedade da matriz U podemos expressar os estados massivos em termos dos estados de sabor. Assim, a eq. (3.1) fica

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle \quad . \quad (3.12)$$

Substituindo a eq. (3.12) na eq. (3.11), temos

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle \quad . \quad (3.13)$$

Então, a superposição dos estados massivos resulta em um sabor, puro, como na eq. (3.1) no instante $t = 0$, mas na medida que o tempo evolui ($t > 0$) torna-se uma superposição de diferentes estados de sabor ⁸.

O coeficiente de $|\nu_\beta\rangle$ é a amplitude de transição (A) do sabor α para o sabor β em função do tempo. Matematicamente, escrevemos

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t} \quad . \quad (3.14)$$

⁸Somente se a matriz de mistura U não for diagonal, o que indica que os neutrinos misturam-se.

Sabendo a amplitude de transição, podemos determinar a probabilidade de transição (P),

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} \quad , \quad (3.15)$$

expandindo a eq. (3.8) temos

$$E_k = |\vec{p}| \left(1 + \frac{m_k^2}{p^2} \right)^{1/2} \simeq |\vec{p}| + \frac{m_k^2}{2|\vec{p}|} \quad , \quad (3.16)$$

e levando em conta que neutrinos são ultra-relativísticos, podemos desprezar a contribuição da massa e fazer $E = |\vec{p}|$, deixando a equação

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \quad . \quad (3.17)$$

Para a diferença de energia da eq. (3.15) utilizamos a eq. (3.17) e obtemos

$$E_k - E_j \simeq \frac{m_k^2 - m_j^2}{2E} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} \quad , \quad (3.18)$$

deixando a probabilidade de transição de sabor, eq. (3.15), como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp \left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 t}{2E} \right) \quad . \quad (3.19)$$

Por questões práticas, vamos fazer mais uma mudança: nos experimentos de oscilação de neutrinos não mensura-se o tempo de propagação e como conhecemos a distância (L) entre a fonte de neutrinos (reator, acelerador, supernova, etc) e o detector, podemos fazer a aproximação $t = L$, pois lembremos que estas partículas são ultra-relativísticas, isto é, viajam com velocidades muito próximas a da luz. Assim, a probabilidade de conversão é dada por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp \left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \quad . \quad (3.20)$$

Note que assim somente a distância L e a energia E são as grandezas que variam nos experimentos e que determinam a fase de oscilação. A diferença de massa quadrada (Δm_{kj}^2), na fase de oscilação, é uma constante física e os

elementos da matriz de mistura U , que compõem a amplitude de oscilação, são constantes da natureza.

Outro ponto importante da eq. (3.20) é que se $L = 0$ temos,

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L = 0, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \quad , \quad (3.21)$$

mas a relação de unitariedade nos diz que

$$UU^\dagger = \mathbf{1} \iff \sum_k U_{\alpha k} U_{\beta k}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.22)$$

implicando que a troca de sabor só ocorrerá se existir alguma distância, isto é, $L > 0$.

A eq. (3.20) pode ser reescrita - se reorganizarmos a amplitude de oscilação - na forma

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{osc}}\right) \quad (3.23)$$

onde L_{kj}^{osc} é o comprimento de oscilação ⁹,

$$L_{kj}^{osc} = \frac{4\pi E}{|\Delta m_{kj}^2|} \quad . \quad (3.24)$$

Para vermos outra forma amplamente usada de probabilidade de oscilação, fazemos o quadrado da relação de unitariedade (3.22),

$$\sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.25)$$

e rearrumamos os termos para ficar com a expressão

$$\sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2\Re \sum_{k>j} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \quad . \quad (3.26)$$

Agora, partindo novamente da eq. (3.20), trabalhando a amplitude de os-

⁹Comprimento de oscilação é a distância em que a fase gerada pela diferença de massa quadrada, Δm_{kj}^2 , torna-se igual a 2π .

cilação, separando as partes real e imaginária e usando a eq. (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \delta_{\alpha\beta} - 2\Re \sum_{k>j} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] + \\
 &+ 2\Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + \\
 &+ 2\Im \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad , \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a relação

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad , \quad (3.28)$$

para modificarmos o termo oscilante. Rearrmando a eq. (3.27)

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \Re [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)\right] + \\
 &+ 2 \sum_{k>j} \Im [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad , \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

fazendo proveito da relação trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad , \quad (3.30)$$

podemos deixar a probabilidade de oscilação como

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right) + \\
 &+ 2 \sum_{k>j} \Im [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad . \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Então, esta é a forma geral da probabilidade de oscilação e pode ser dividida em dois casos: se considerarmos o canal $\alpha \neq \beta$ passamos a chamá-la de **probabilidade de transição**, enquanto que se considerarmos $\alpha = \beta$, denominamos **probabilidade de sobrevivência**. Neste último caso pode-se perceber que os componentes da amplitude de oscilação (elementos da matriz de mistura) não têm parte imaginária, uma vez que sua forma é $|U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2$ e o último

termo de (3.31) desaparece e fica com a seguinte aparência:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 - 4 \sum_{k>j} \Re |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) . \quad (3.32)$$

3.2.2 Antineutrinos

Assim como no caso dos neutrinos, os antineutrinos com sabor α ($\alpha = e, \mu, \tau$) são comumente produzidos em interações fracas pelo canal CC. Os antineutrinos $\bar{\nu}_\alpha$ são superposições de antineutrinos massivos $\bar{\nu}_k$ ($k = 1, 2, 3$),

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k} |\bar{\nu}_k\rangle , \quad (3.33)$$

onde U é a matriz de mistura dos antineutrinos. Destacamos a semelhança entre esta equação e a eq. (3.1), onde podemos ver que a única diferença entre ambas expressões se dá no coeficiente dos neutrinos (antineutrinos) massivos que sofre uma conjugação complexa.

As propriedades cinemáticas dos antineutrinos são exatamente iguais as dos neutrinos, por isso o desenvolvimento matemático feito acima para o caso de neutrinos é válido aqui também, com exceção do complexo conjugado da matriz de mistura. Então, a probabilidade de transição de sabor do antineutrino é

$$P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \exp \left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) . \quad (3.34)$$

Repare no termo oscilatório, veja que ele é idêntico ao caso dos neutrinos. Isto indica que o comprimento de oscilação (L_{kj}^{osc}) não muda para os antineutrinos. Realizando o mesmo trabalho matemático de separar as partes real e imaginária da amplitude de oscilação e usufruindo novamente das relações de trigonometria, a probabilidade de oscilação do antineutrino é

$$P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) - 2 \sum_{k>j} \Im [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) , \quad (3.35)$$

e difere-se do caso anterior apenas pelo sinal do último termo, a parte imaginária dos elementos da matriz de mistura.

3.3

Mistura para Duas Gerações

Nesta seção veremos uma aproximação muito usada, a mistura para duas gerações. Vamos desconsiderar um terceiro neutrino, tanto como sabor, como em massa, o que torna os cálculos muito mais simples e dependentes de menos parâmetros que o caso de três neutrinos. Outro argumento a favor desta aproximação é o fato de que, experimentalmente, muitas vezes não somos capazes de distinguir a influência da mistura dos três neutrinos ativos e os dados são analisados com um modelo cuja mistura é somente entre dois neutrinos.

Então, sejam dois neutrinos de sabores ν_α e ν_β , onde cada sabor é uma combinação linear de dois neutrinos massivos, ν_1 e ν_2 . Antes de prosseguirmos, vamos destacar dois pontos importantes:

1. Os sabores α e β são sabores puros, isto é, $\alpha, \beta = e, \mu$ ou $\alpha, \beta = \mu, \tau$ ou ainda $\alpha, \beta = e, \tau$; ou
2. Os sabores α e β são combinações lineares de sabores puros como, por exemplo, $\nu_\alpha = \nu_e$ e $\nu_\beta = c_\mu \nu_\mu + c_\tau \nu_\tau$ com $c_\mu^2 + c_\tau^2 = 1$. Esta condição é muito utilizada nos experimentos de desaparecimento de neutrinos eletrônicos.

A matriz de mistura efetiva é

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

onde θ é o ângulo de mistura, cujo valor encontra-se no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Para calcularmos a probabilidade de transição para $\alpha \neq \beta$, usamos a eq. (3.31). O primeiro e o último termo desaparecem, restando apenas o segundo, cuja amplitude de oscilação pode ser encontrada através da eq. (3.36)

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= -4[-\sin\theta \cos\theta \cos\theta \sin\theta] \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\
 &= 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\
 &= \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \quad (\alpha \neq \beta) \quad , \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a relação trigonométrica $\sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta$. Olhando para o termo oscilante, vemos que a diferença de massa quadrada não possui subíndices, isto porque estamos trabalhando com duas gerações de neutrinos:

$$\Delta m^2 \equiv \Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2 \quad , \quad (3.38)$$

e, por simplicidade de cálculo, fazemos m_1 o mais leve, levando a Δm^2 positivo.

Para o caso de $\alpha = \beta$, a probabilidade de sobrevivência provém da eq. (3.32),

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \quad (\alpha = \beta) \quad . \quad (3.39)$$

Da ausência de qualquer fase na matriz de mistura efetiva para dois neutrinos (eq. 3.36) vemos que não há violação Carga-Paridade (CP), levando a igualdade na probabilidade de transição entre neutrinos e antineutrinos:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha}(L, E) \quad . \quad (3.40)$$

3.4 Oscilação de Neutrinos na Matéria

Quando neutrinos propagam-se na matéria estão sujeitos a um potencial - equivalente ao índice de refração, que tem seu valor de acordo com a velocidade da luz no meio - devido ao espalhamento elástico coerente do neutrino com os elétrons e nucleons do meio [79], alterando a mistura dos neutrinos. Os neutrinos também estão sujeitos a espalhamentos incoerentes, cuja ordem de magnitude do livre caminho médio pode ser estimada sem dificuldades,

sabendo que

$$\sigma_{cm} \sim G_F s \quad , \quad (3.41)$$

onde s é a variável de Mandelstam ¹⁰ e G_F é a constante de Fermi, cujo valor é $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. A variável de Mandelstam representa o quadrado da energia total no referencial do centro-de-massa. No referencial do laboratório (alvo em repouso) temos $s = 2EM$, com E sendo a energia do neutrino e M a massa do alvo.

$$\sigma_{lab} \sim G_F EM \sim 10^{-38} \frac{EM}{\text{GeV}^2} \text{ cm}^2 \quad , \quad (3.42)$$

e o caminho livre médio no meio

$$\ell \sim \frac{1}{N\sigma} \sim \frac{10^{38} \text{ cm}}{(N \text{ cm}^3)(EM/\text{GeV}^2)} \quad , \quad (3.43)$$

sendo N a densidade do número de partículas alvo, normalmente nucleons. Para termos uma idéia do resultado, na matéria normal a densidade é $N_A/\text{cm}^3 \sim 10^{24} \text{ cm}^{-3}$, gerando

$$\ell \sim \frac{10^{14}}{E/\text{GeV}} \text{ cm} \quad . \quad (3.44)$$

Repare que a Terra ($Raio \sim 10^9 \text{ cm}$) só seria uma barreira para os neutrinos com energia superior a 10^5 GeV , um valor absurdamente alto, ou para regiões onde a densidade fosse extremamente elevada, como por exemplo $10^{12} N_A/\text{cm}^3$, onde os neutrinos com energia típica da ordem de MeV teriam um livre caminho médio de poucos quilômetros. Tais densidades são alcançadas em estrelas de nêutrons e núcleos de supernovas.

3.4.1

Potencial Efetivo na Matéria

O comportamento do neutrino muda quando ele propaga-se na matéria. Sua evolução é afetada pelo potencial efetivo pelas interações fracas de CC e NC (Fig. 3.4). Pela interação fraca de CC, temos o potencial V_{CC} para

¹⁰São quantidades numéricas que englobam energia, momento e os ângulos de espalhamento de partículas em processos de colisões de duas para duas partículas $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$

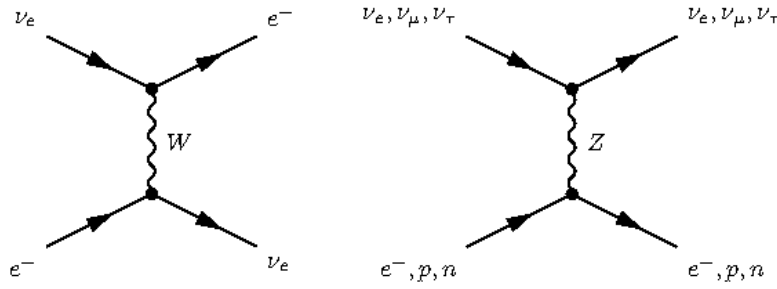


Figura 3.4: Diagramas de Feynman representando processos de espalhamento elástico coerente que geram os potenciais V_{CC} , através da troca de um bóson W, e V_{NC} , pela troca de um bóson Z.

um neutrino eletrônico propagando-se em um meio homogêneo e isotrópico de elétrons não polarizados [79], como mostraremos abaixo.

Da Lagrangeana efetiva de interação fraca por corrente carregada em baixa energia [25] obtemos a Hamiltoniana efetiva de CC,

$$\mathcal{H}_{ef}^{(CC)}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x)\gamma^\rho(1 - \gamma^5)e(x)] [\bar{e}(x)\gamma_\rho(1 - \gamma^5)\nu_e(x)] \quad , \quad (3.45)$$

e para separarmos as contribuições do neutrino e do elétron, aplicamos a Transformação de Fierz, dada por

$$\mathcal{H}_{ef}^{(V-A)}(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \mathcal{H}_{ef}^{(V-A)}(\psi_1, \psi_4, \psi_3, \psi_2) \quad , \quad (3.46)$$

na eq. (3.45) e o resultado será

$$\mathcal{H}_{ef}^{(CC)}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x)\gamma^\rho(1 - \gamma^5)\nu_e(x)] [\bar{e}(x)\gamma_\rho(1 - \gamma^5)e(x)] \quad . \quad (3.47)$$

Fazendo a média do Hamiltoniano efetivo sobre o fundo de elétrons no referencial de repouso do meio, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}_{ef}^{(CC)}}(x) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x)\gamma^\rho(1 - \gamma^5)\nu_e(x) \int d^3p_e f(E_e, T) \\ &\quad \times \frac{1}{2} \sum_{h_e=\pm 1} \langle e^-(p_e, h_e) | \bar{e}(x)\gamma_\rho(1 - \gamma^5)e(x) | e^-(p_e, h_e) \rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde os estados do elétron correspondem ao diagrama da esquerda na Fig. 3.4. Note que o 4-momento e a helicidade não mudam com o espalhamento porque a interação não deve modificar o meio. Vamos normalizar os estados do elétron a um volume finito (V) e a integral em que a distribuição estatística depende

da energia do elétron, E_e , e esta da temperatura T , para $N_e V$ (densidade eletrônica e volume, respectivamente) que é o número total de elétrons. Após uma pouco de aritmética obtemos o resultado da média da hamiltoniana,

$$\overline{\mathcal{H}_{ef}^{(CC)}}(x) = V_{CC} \bar{\nu}_e(x) \gamma^0 \nu_e(x) \quad , \quad (3.49)$$

sendo o potencial de corrente carregada (V_{CC}) na forma

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e \quad , \quad (3.50)$$

onde N_e é o número de densidade de elétrons.

Para o potencial NC de neutrinos propagando-se em um meio com densidade fermiônica N_f , o cálculo é feito de maneira análoga: partindo da lagrangeana efetiva de interação fraca de corrente neutra encontramos a hamiltoniana efetiva

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}_{ef}^{(NC)}}(x) = & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} [\bar{\nu}_\alpha(x) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \nu_\alpha(x)] \times \\ & \sum_f [\bar{f}(x) \gamma_\rho (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f(x)] \quad , \quad (3.51) \end{aligned}$$

mas agora trabalha-se com todos os sabores, uma vez que o meio interage igualmente com todos os neutrinos, independentemente de sabor. O potencial de corrente neutra, V_{NC} , que encontra-se é

$$V_{NC}^f = \sqrt{2} G_F N_f g_V^f \quad , \quad (3.52)$$

onde g_V^f é a constante de acoplamento fraco para férmions (quarks, neutrino e léptons carregados) e cujos valores encontram-se na tab. 3.2. Mantendo-se a idéia de um meio eletricamente neutro, consideramos que há um número de densidade igual de prótons e elétrons, implicando em cancelamento mútuo do potencial de corrente neutra, restando apenas a contribuição dos nêutrons. Assim,

$$V_{NC} = -\frac{1}{2} \sqrt{2} G_F N_n \quad , \quad (3.53)$$

com N_n a densidade de nêutrons e o acoplamento no valor de $-1/2$. Então, o potencial efetivo total para baixa temperatura e densidade é a soma das

Fermions	g_V
ν_e, ν_μ, ν_τ	$g_V^\nu = \frac{1}{2}$
e, μ, τ	$g_V^l = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$

Tabela 3.2: Valores de acoplamento para campos de férmions.

equações (3.50) e (3.53)

$$V_\alpha = V_{CC}\delta_{\alpha e} + V_{NC} = \sqrt{2}G_F \left(N_e\delta_{\alpha e} - \frac{1}{2}N_n \right) . \quad (3.54)$$

Na tentativa de uma melhor compreensão do significado físico dos potenciais (V_α), vamos relacioná-los com a energia de um neutrino de sabor qualquer propagando-se no meio. No cálculo da energia potencial a helicidade do neutrino é importante e por isso temos de considerá-lo como neutrino de Dirac ou Majorana. No primeiro caso (Dirac), os resultados são:

$$\mathcal{V}_{D\alpha}^{(+)} \simeq V_\alpha \frac{m_{\nu\alpha}^2}{4} \left\langle \frac{1}{E^2} \right\rangle , \quad (3.55)$$

onde $\mathcal{V}_{D\alpha}^{(+)}$ é o potencial para o neutrino de sabor α com helicidade positiva e

$$\mathcal{V}_{D\alpha}^{(-)} \simeq V_\alpha , \quad (3.56)$$

sendo $\mathcal{V}_{D\alpha}^{(-)}$ é o potencial, mas agora para a helicidade negativa do neutrino.

Como já fizemos anteriormente, consideramos os neutrinos relativísticos e com isso a eq. (3.55) é fortemente suprimida, pois a massa é muito pequena comparada à energia da partícula e a eq. (3.56) mostra que a energia potencial é aproximadamente igual ao potencial do neutrino.

Este cálculo também pode ser feito para os antineutrinos de Dirac e os resultados são opostos: para antineutrinos de mão direita a energia potencial se equivale ao potencial dos neutrinos, mas com sinal invertido, e para antineutrinos de mão-esquerda há uma supressão equivalente a da eq. (3.55), também com sinal trocado:

$$\mathcal{V}_{D\alpha}^{\bar{+}} \simeq -V_\alpha , \quad \mathcal{V}_{D\alpha}^{\bar{-}} \simeq -V_\alpha \frac{m_{\nu\alpha}^2}{4} \left\langle \frac{1}{E^2} \right\rangle . \quad (3.57)$$

Os resultados para $\mathcal{V}_{D\alpha}^{(\pm)}$ e $\bar{\mathcal{V}}_{D\alpha}^{(\pm)}$ mostram de maneira clara que, no limite relativístico, os neutrinos podem ser considerados partículas sem massa nas interações e somente os neutrinos de Dirac de mão-esquerda (helicidade negativa) e os antineutrinos de mão-direita (helicidade positiva) participam das interações fracas.

Se considerarmos o caso dos neutrinos de Majorana ¹¹ o resultado para o cálculo da energia potencial será

$$\mathcal{V}_{M\alpha}^{(\pm)} \simeq \mp V_{\alpha} \quad , \quad (3.58)$$

que coincide com os resultados obtidos para os neutrinos de Dirac. Então, a energia potencial dos neutrinos ultra-relativísticos de Dirac de mão-esquerda e os neutrinos de Majorana são iguais, enquanto que a energia potencial dos antineutrinos relativísticos de Dirac de mão-direita coincide com os neutrinos de Majorana de mão mão-direita.

3.5 Evolução dos Estados de Sabor

Um neutrino de mão-esquerda, relativístico, com um sabor qualquer (e, μ, τ) e momento \vec{p} tem seu estado de sabor descrito pela eq. (3.1). Mas vimos que os estados de sabor não são auto-estados de massa da hamiltoniana, então vamos utilizar os neutrinos massivos que são auto-estados da hamiltoniana no vácuo \mathcal{H}_0

$$\mathcal{H}_0|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle \quad , \quad (3.59)$$

onde E_k é fornecido pela eq. (3.8). O potencial é somado a energia, resultando num Hamiltoniano de dois termos,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \quad , \quad (3.60)$$

onde \mathcal{H}_I é devido ao potencial,

$$\mathcal{H}_I|\nu_{\alpha}\rangle = V_{\alpha}|\nu_{\alpha}\rangle \quad . \quad (3.61)$$

A equação de evolução temporal na representação de Schrödinger é dado

¹¹Nesta classificação os neutrinos são idênticos aos antineutrinos.

pela eq. (3.9) e, se a multiplicarmos pela esquerda pelo estado $\langle \nu_\beta |$ obtemos a amplitude de transição $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ após um tempo t ,

$$\psi_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle \quad \text{com} \quad \psi_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.62)$$

Com todas estas equações aplicadas em (3.9) temos

$$i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\eta} \left(\sum_k U_{\beta k} E_k U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} V_\beta \right) \psi_{\alpha\eta}(t) \quad . \quad (3.63)$$

Novamente estamos considerando que neutrinos são relativísticos, ou seja, $p \simeq E$ e $t \simeq x$. Utilizando ainda a equação de conservação de probabilidade ($\sum_{\beta} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = 1$) e a eq. (3.8), reescrevemos (3.63) como

$$i \frac{d}{dx} \psi_{\alpha\beta}(x) = \left(p + \frac{m^2_1}{2E} + V_{NC} \right) \psi_{\alpha\beta}(x) + \sum_{\eta} \left(\sum_k U_{\beta k} \frac{\Delta m^2_{k1}}{2E} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} \delta_{\eta e} V_{CC} \right) \psi_{\alpha\eta}(x) \quad . \quad (3.64)$$

Repare que o primeiro termo do lado direito é comum a todas as transições de sabores, o que o torna irrelevante para oscilações pois é eliminado com uma simples mudança de fase. Então, somente o segundo termo da direita é importante para a amplitude de transição. Perceba também que há dependência com a diferença de massa quadrada na oscilação de neutrinos na matéria, do mesmo modo que existe para a oscilação no vácuo. Vamos reescrever a eq. (3.64), desprezando a fase comum, da seguinte forma:

$$i \frac{d}{dx} \Psi_\alpha = \mathcal{H}_F \Psi_\alpha \quad , \quad (3.65)$$

que tem a mesma estrutura da equação de Schrödinger e \mathcal{H} é a matriz Hamiltoniana efetiva, dada por

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2E} (U M^2 U^\dagger + \mathbb{A}) \quad , \quad (3.66)$$

onde para três gerações de neutrinos ativos temos

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha e} \\ \psi_{\alpha \mu} \\ \psi_{\alpha \tau} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

sendo

$$A_{CC} \equiv 2EV_{CC} = 2\sqrt{2}EG_F N_e \quad . \quad (3.68)$$

Um ponto importante é que se estivéssemos tratando o neutrino como partícula de Majorana, isto é, com suas duas fases adicionais, o resultado seria exatamente o mesmo. Observe o primeiro termo do parênteses na eq. (3.66) e veja que as fases de Majorana se cancelariam. Então, nos experimentos de oscilação de neutrinos, seja no vácuo ou na matéria, não é possível distinguir entre a natureza dos neutrinos (Dirac ou Majorana) [80, 81, 82].

3.6 Efeito MSW

Por simplicidade de cálculo, vamos considerar o caso de mistura entre dois neutrinos de sabores ν_e e ν_μ e os massivos ν_1 e ν_2 , assumindo que no instante inicial ($t = 0$) o neutrino seja eletrônico. Esse seria o caso dos neutrinos produzidos no interior do Sol. Reescrevendo a eq. (3.67) para duas gerações,

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha e} \\ \psi_{\alpha \mu} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

a partir de agora vamos fazer $\Delta m_{21}^2 = \Delta m^2$ e como o neutrino é criado com o sabor eletrônico, temos $\alpha = e$. Assim, utilizando as matrizes de (3.69) e a eq. (3.66), escrevemos a equação de evolução (3.65) como

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \left[\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

e após algumas linhas de desenvolvimento matemático, obtemos

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

onde desprezamos o termo de fase comum, que é irrelevante.

A probabilidade de transição do neutrino, gerado eletrônico, para o estado de sabor muônico é

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = |\psi_{e\mu}(x)|^2 \quad , \quad (3.72)$$

e, por consequência, a probabilidade de sobrevivência torna-se

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x) = |\psi_{ee}(x)|^2 = 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) \quad . \quad (3.73)$$

Podemos diagonalizar a matriz \mathcal{H}_F através de uma transformação ortogonal do tipo

$$U_M^T \mathcal{H}_F U_M = \mathcal{H}_M \quad , \quad (3.74)$$

onde U_M é a matriz de mistura efetiva na matéria dada por

$$U_M = \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \quad , \quad (3.75)$$

e \mathcal{H}_M é a Hamiltoniana efetiva na matéria na base auto-estado de massa. Então, usando a eq. (3.75), o cálculo da eq. (3.74) é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_M &= \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} \cos \theta_M & -\sin \theta_M \\ \sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -a \cos 2\theta_M - b \sin 2\theta_M & b \cos 2\theta_M - a \sin 2\theta_M \\ b \cos 2\theta_M - a \sin 2\theta_M & a \cos 2\theta_M + b \sin 2\theta_M \end{pmatrix} \quad , \quad (3.76) \end{aligned}$$

onde fizemos $a = \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}$ e $b = \Delta m^2 \sin 2\theta$ por simplicidade de cálculo. Agora, utilizando a relação

$$\cos 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}}{\Delta m_M^2} \quad , \quad \sin 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m_M^2} \quad , \quad (3.77)$$

sendo Δm_M^2 a diferença de massa quadrada efetiva, e de onde podemos obter o ângulo de mistura efetiva na matéria:

$$\tan 2\theta_M = \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 \cos 2\theta}} \quad . \quad (3.78)$$

Finalmente chegamos na matriz diagonal de \mathcal{H}_F com as relações de (3.77):

$$\mathcal{H}_M = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta_M^2 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.79)$$

fazendo

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \quad . \quad (3.80)$$

Note que temos uma situação de ressonância quando o potencial torna-se

$$A_{CC}^R = \Delta m^2 \cos 2\theta \quad . \quad (3.81)$$

Este fato foi observado por Mikheev e Smirnov [83] baseado no trabalho de Wolfenstein [79] entre a segunda metade da década de 70 e a primeira de 80. Por isso, este efeito recebe o nome das iniciais destes três cientistas, ou seja, *efeito MSW*. Pela eq. (3.78), vemos que na ressonância o ângulo de mistura efetiva é máximo ($\pi/4$), deixando a possibilidade de transição entre 2 sabores nesta região maior do que se estivessem no vácuo. Também é neste momento que temos a menor diferença de massa quadrada entre os dois sabores (o primeiro termo da raiz quadrada da eq. (3.80) desaparece).

3.7

Oscilação de Neutrinos em Supernovas

3.7.1

Densidades

Como vimos no capítulo anterior uma estrela gigante ou supergigante vermelha possui um raio nuclear da ordem de 10^4 km e é nesta região que os neutrinos são criados. No entanto, o raio da estrela pode ultrapassar uma unidade astronômica ¹² (1 UA) e os neutrinos devem percorrer esta distância

¹²É a distância média da Terra ao Sol, equivale a aproximadamente 150 milhões de km.

para alcançar o meio interestelar.

A densidade no interior da pré-supernova é dependente com a sua distância radial, assim como o ângulo de mistura efetivo. Então, as regiões onde podem ocorrer a conversão de um sabor em outro são denominadas *camadas de ressonância* e a densidade neste local pode ser calculada pela seguinte expressão [84]

$$\rho_{res} \sim 1.4 \times 10^6 \left(\frac{\Delta m^2}{1\text{eV}^2} \right) \left(\frac{10\text{MeV}}{E} \right) \left(\frac{0.5}{Y_e} \right) \cos 2\theta \text{ g/cm}^3, \quad (3.82)$$

resultando em duas camadas de ressonância:

1. Alta Densidade (ρ_H): como o próprio nome diz, a oscilação ocorre em regiões bem povoadas de partículas, tipicamente 10^3 ou 10^4 g/cm³. e é comumente associada a diferença de massa quadrada entre ν_2 e ν_3 , isto é, Δm_{atm}^2 .
2. Baixa Densidade (ρ_L): também é auto-explicativo e seu valor varia entre 10 e 30 g/cm³. Esta faixa de densidade é encontrada em regiões intermediárias do Sol e por isso essa densidade é caracterizada pela diferença de massa quadrada entre ν_1 e ν_2 , cujo simbolismo é Δm_{\odot}^2 .

3.7.2 Regiões de Transição

Podemos reescrever a equação de evolução utilizando os ângulos de mistura efetivos e a diferença de massa quadrada efetiva, mas antes temos de diagonalizar a Hamiltoniana efetiva como

$$\Psi_e = U_M \Phi_e, \quad \text{sendo} \quad \Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad e \quad \Phi_e = \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

assim, a equação de evolução fica

$$i \frac{d}{dx} (U_M \Phi_e) = \mathcal{H}_F U_M \Phi_e$$

$$i \Phi_e \frac{dU_M}{dx} + i U_M \frac{d\Phi_e}{dx} = \mathcal{H}_F U_M \Phi_e, \quad (3.84)$$

multiplicando pela esquerda por U_M^\dagger diagonalizamos a hamiltoniana e obtemos

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & -4Ei \frac{d\theta_M}{dx} \\ 4Ei \frac{d\theta_M}{dx} & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} . \quad (3.85)$$

Aqui temos 2 opções para trabalhar:

1. Densidade da matéria é constante: neste caso, $\frac{d\theta_M}{dx} = 0$, o que leva a termos apenas a diagonal principal em (3.85) e a evolução das amplitudes dos neutrinos massivos na matéria é desacoplada. A probabilidade de transição segue os mesmos passos matemáticos que fizemos para a probabilidade de oscilação no vácuo, com exceções do ângulo de mistura e a diferença de massa quadrada que são substituídas por seus equivalentes da matéria (efetivo) e fica

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = \sin^2 2\theta_M \sin^2 \left(\frac{\Delta m_M^2 x}{4E} \right) . \quad (3.86)$$

2. Densidade da matéria não é constante: aqui é necessário levar em conta a derivada do ângulo em função da distância. Então, derivando a primeira equação de (3.77) temos

$$-2 \sin 2\theta_M \frac{d\theta_M}{dx} = -\frac{1}{\Delta m_M^2} \frac{dA_{CC}}{dx} + \frac{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC})}{(\Delta m_M^2)^2} \frac{d}{dx} \Delta m_M^2 \quad (3.87)$$

e a derivada no último termo é feita utilizando a eq. (3.80) para obtermos

$$\frac{d\theta_M}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta_M}{\Delta m_M^2} \frac{dA_{CC}}{dx} . \quad (3.88)$$

A influência da não constância da densidade na equação de evolução é que ela possibilita transições entre os neutrinos massivos (ν_1^M e ν_2^M). Se os termos da diagonal secundária são muito menores que a diferença entre os termos da diagonal principal a probabilidade de transição pode ser desconsiderada devido ao pequeno valor que é obtido.

Para podermos quantificar estas transições vamos introduzir o *parâmetro de adiabaticidade*, que é dado por

$$\gamma = \frac{\Delta m_M^2}{4E |d\theta_M/dx|} = \frac{(\Delta m_M^2)^2}{2E \sin 2\theta_M |dA_{CC}/dx|} . \quad (3.89)$$

Ele determina se ocorrerão transições nas camadas da estrela através da *Probabilidade de Cruzamento*, isto é, a probabilidade de um neutrino com um auto-estado de massa “pular” para outro auto-estado de massa. Esta probabilidade pode ser calculada como [85, 86]

$$P_c = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma\right) \quad . \quad (3.90)$$

Podemos separar as camadas da estrela em três partes distintas:

1. **Caso I:** se em todos os pontos da trajetória do neutrino temos $\gamma \gg 1$, a evolução será *adiabática*, ou seja, não haverá transições entre os neutrinos massivos ou estas serão desprezíveis, pois a Probabilidade de Cruzamento (3.90) será muito pequena (Fig. 3.5) e para um neutrino com $E \sim 10$ MeV, o valor do ângulo de mistura θ_{13} deve obedecer $\sin^2 2\theta_{13} \gtrsim 10^{-3}$. Este seria o caso mais simples, já que implicaria na evolução independente das amplitudes e o efeito da evolução seria apenas um fator de fase e teríamos as oscilações de sabores.
2. **Caso II:** este é o caso quando $\gamma \sim 1$ e $10^{-5} \lesssim \sin^2 2\theta_{13} \lesssim 10^{-3}$, o que faz com que a Probabilidade de Cruzamento varie fortemente de acordo com a energia do neutrino; quanto maior a energia, maior a chance de cruzamento.
3. **Caso III:** esta situação é onde o valor do parâmetro de adiabaticidade é muito menor que a unidade e $\sin^2 2\theta_{13} \lesssim 10^{-5}$, levando a Probabilidade de Cruzamento próximo de um ($P_c \sim 1$), e há grandes chances de ocorrer transições entre os neutrinos massivos. Neste caso dizemos que a evolução é *não-adiabática*.

O ponto de menor valor de γ é chamado de *máxima violação da adiabaticidade* e pode ser calculado a partir da derivada da expressão do $\cos 2\theta$ da eq. (3.77) junto com a utilização da eq. (3.88) para ter a forma

$$\frac{dA_{CC}}{dx} = -\frac{\Delta m_M^2}{\sin^2 2\theta_M} \frac{d \cos 2\theta_M}{dx} \quad , \quad (3.91)$$

de onde podemos obter o valor de γ ao introduzir a eq. (3.89),

$$\gamma = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{2E|d \cos 2\theta_M/dx|} \quad . \quad (3.92)$$

Para o ponto de máxima violação da adiabaticidade temos

$$\left. \frac{d^2 \cos 2\theta_M}{dx^2} \right|_{x=x_{max.viol.}} = 0 \quad , \quad (3.93)$$

e das eqs. (3.77) e (3.81) podemos ver que o ponto de ressonância é dado por

$$\cos 2\theta_M |_{x=x_R} = 0 \quad . \quad (3.94)$$

Então, em geral, o ponto de mínimo de γ não é coincidente com o ponto de ressonância (x_R), mas se a densidade for linear ambos os pontos se igualam (ver Fig. 3.5), conforme pode ser observado fazendo a segunda derivada da eq. (3.93).

3.7.3 Exemplo para Duas Gerações

A produção de neutrinos no interior das estrelas se dá dentro do núcleo, em regiões de alta densidade, $\rho \rightarrow \infty$, e como os neutrinos muônicos e tauônicos

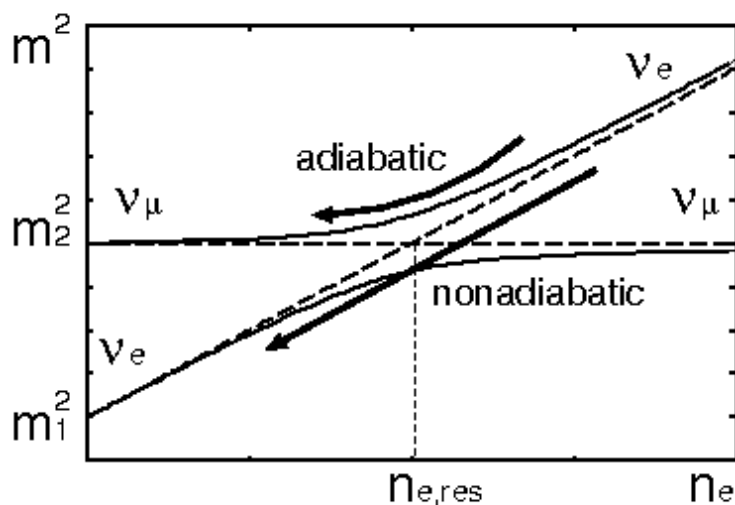


Figura 3.5: Ilustração que mostra a ressonância para dois sabores em um meio inhomogêneo. As linhas pontilhadas mostram os auto-estados de massa efetiva quando não há mistura, e as linhas contínuas indicam a massa efetiva dos auto-estados de sabor, quando existe o efeito de mistura. Note que a menor diferença de massa quadrada efetiva se dá quando a ressonância tem o seu valor mínimo.

são produzidos e reagem igualmente no interior estelar, podemos reduzir o problema para duas gerações no intuito de uma melhor compreensão. Assim, da estrutura da eq. (3.83) temos

$$|\nu_e\rangle = \cos \theta_M(x) |\nu_1^M\rangle + \sin \theta_M(x) |\nu_2^M\rangle \quad , \quad (3.95a)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin \theta_M(x) |\nu_1^M\rangle + \cos \theta_M(x) |\nu_2^M\rangle \quad , \quad (3.95b)$$

onde devido a alta densidade podemos ver o comportamento das funções seno e cosseno dos ângulos de mistura efetivos como

$$\cos 2\theta_M(x) \rightarrow -1 \quad \text{e} \quad \sin 2\theta_M(x) \rightarrow 0 \quad , \quad (3.96)$$

o que implica em

$$\cos \theta_M(x) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \sin \theta_M(x) \rightarrow 1 \quad . \quad (3.97)$$

Nas estrelas, a propagação é feita usando os estados de massa efetiva (ver eq. 3.85), o que significa que temos de rearrumar as eqs. (3.95) para que fiquem como

$$|\nu_1^M\rangle = \cos \theta_M(x) |\nu_e\rangle - \sin \theta_M(x) |\nu_\mu\rangle \quad , \quad (3.98a)$$

$$|\nu_2^M\rangle = \sin \theta_M(x) |\nu_e\rangle - \cos \theta_M(x) |\nu_\mu\rangle \quad . \quad (3.98b)$$

Observando as condições expostas acima, vemos que um neutrino eletrônico, quando criado no núcleo estelar, é quase que puramente ν_2^M e um neutrino muônico quase ν_1^M puro.

Nas camadas mais externas da estrela a densidade torna-se muito menor que no local de criação e, por isso, podemos considerá-la como vácuo, $\rho \rightarrow 0$, o que provoca uma mudança nos ângulos de mistura: do valor efetivo para o valor do vácuo,

$$\cos 2\theta_M(x) \rightarrow \cos 2\theta \quad \text{e} \quad \sin 2\theta_M(x) \rightarrow \sin 2\theta \quad . \quad (3.99)$$

Então, se a propagação for adiabática, isto é, $\gamma \gg 1$, não haverá cruzamento entre os auto-estados de massa ($\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$). Assumindo que o valor do ângulo

de mistura no vácuo seja pequeno, temos que as eqs. (3.98) ficam

$$|\nu_\mu\rangle = |\nu_1^M\rangle \xrightarrow{\gamma \gg 1} |\nu_1^M\rangle \xrightarrow{\text{vácuo}} |\nu_1\rangle = |\nu_e\rangle \quad , \quad (3.100a)$$

$$|\nu_e\rangle = |\nu_2^M\rangle \xrightarrow{\gamma \gg 1} |\nu_2^M\rangle \xrightarrow{\text{vácuo}} |\nu_2\rangle = |\nu_\mu\rangle \quad , \quad (3.100b)$$

isto é, o neutrino criado muônico (eletrônico) possui auto-estado de massa efetiva ν_1^M (ν_2^M) e durante o seu caminho para fora da estrela passa de uma região de alta densidade para outra de baixa densidade, ou vácuo, mas o auto-estado de massa continua o mesmo, mudando apenas o seu valor (no vácuo, a estrutura é análoga a eq. (3.98) apenas com a mudança de valores dos ângulos de mistura) e o neutrino resultante tem o sabor eletrônico (muônico) como pode ser observado na Fig. 3.5.

Agora, se $\gamma \ll 1$ ocorre a transição entre os auto-estados de massa ($\nu_1^M \rightarrow \nu_2^M$) na passagem do neutrino pela região de ressonância, ou seja, o esquema de (3.100) fica

$$|\nu_\mu\rangle = |\nu_1^M\rangle \xrightarrow{\gamma \ll 1} |\nu_2^M\rangle \xrightarrow{\text{vácuo}} |\nu_2\rangle = |\nu_\mu\rangle \quad , \quad (3.101a)$$

$$|\nu_e\rangle = |\nu_2^M\rangle \xrightarrow{\gamma \ll 1} |\nu_1^M\rangle \xrightarrow{\text{vácuo}} |\nu_1\rangle = |\nu_e\rangle \quad . \quad (3.101b)$$

Se considerarmos antineutrinos, as eqs. (3.95) não sofrem alterações, mas como o potencial é negativo para os antineutrinos, a eq. (3.96) passa a ter a forma

$$\cos 2\theta_M(x) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \sin 2\theta_M(x) \rightarrow 0 \quad , \quad (3.102)$$

implicando em $\theta_M = 0$. Observando as eqs. (3.98), mas utilizando o novo valor do ângulo de mistura efetiva, vemos que o antineutrino eletrônico é criado como $\bar{\nu}_1^M$ e o antineutrino muônico como $\bar{\nu}_2^M$. Quando a densidade torna-se menor ($\rho \rightarrow 0$) há a mudança nos ângulos de mistura que passam a ter os valores equivalentes ao vácuo, como explicamos para o caso dos neutrinos. Assim, se a propagação for adiabática, isto é, $\gamma \gg 1$, reescrevemos as eqs. (3.100) como

$$|\bar{\nu}_e\rangle = |\bar{\nu}_1^M\rangle \xrightarrow{\gamma \gg 1} |\bar{\nu}_1^M\rangle \xrightarrow{\text{vácuo}} |\bar{\nu}_1\rangle = |\bar{\nu}_e\rangle \quad , \quad (3.103a)$$

$$|\bar{\nu}_\mu\rangle = |\bar{\nu}_2^M\rangle \xrightarrow{\gamma \gg 1} |\bar{\nu}_2^M\rangle \xrightarrow{\text{vácuo}} |\bar{\nu}_2\rangle = |\bar{\nu}_\mu\rangle \quad , \quad (3.103b)$$

onde podemos perceber que o antineutrino eletrônico (muônico), criado como

$\bar{\nu}_1^M$ ($\bar{\nu}_2^M$) não muda de sabor em seu trajeto de fuga da estrela, isto é, não oscila.

Para o caso em que $\gamma \ll 1$, o resultado será o mesmo, tendo em vista que não haverá o cruzamento entre os auto-estados dos antineutrinos massivos, pois não existe ponto de ressonância no canal dos antineutrinos.

Concluindo, podemos dizer que a densidade pela qual o neutrino passa no seu trajeto em direção ao espaço é importante para ocorrer ou não a oscilação de sabor, onde para um índice de adiabaticidade alto temos oscilação enquanto que para um valor baixo de gama (γ) as oscilações são fortemente suprimidas. Por outro lado, por não haver ponto de ressonância que afete a propagação dos antineutrinos, estes percorrem o caminho sem sofrer oscilações.

3.8

Probabilidade de Oscilação e Fluxo de Neutrinos em Detectores

A Fig. 3.6 [84] nos mostra a evolução dos neutrinos e antineutrinos desde o local de onde são criados, no interior da pré-SN, em alta densidade, até escaparem da estrela, alcançando o espaço (vácuo - próximo do zero da abscissa), tanto para a hierarquia normal (a) quanto para a hierarquia invertida (b). Também podemos notar as duas camadas de ressonância: alta (H) para neutrinos atmosféricos e baixa (L) para os neutrinos solares e que situam-se em posições diferentes, dependendo da hierarquia adotada. No caso da hierarquia normal (à esquerda) as camadas de ressonância afetam apenas a propagação dos neutrinos, enquanto que para a hierarquia invertida (à direita) a camada de alta ressonância influencia a propagação dos antineutrinos e não afeta os neutrinos.

Subdividimos esta seção em duas partes: a primeira, considerando hierarquia normal e a segunda, para hierarquia invertida, sendo que dentro de cada parte subdividimos o estudo para o fluxo dos neutrinos, antineutrinos e o efeito da conversão.

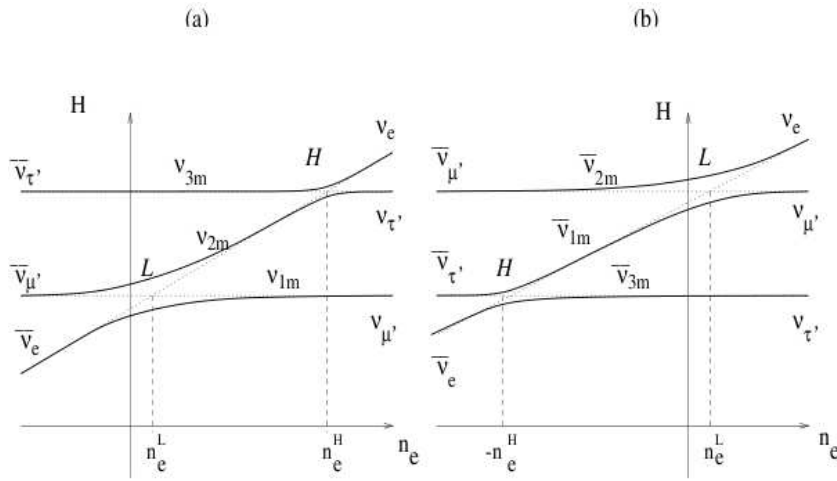


Figura 3.6: Diagramas dos níveis de cruzamento para as hierarquias a) normal e b) invertida. As linhas sólidas mostram a evolução da Hamiltoniana efetiva como função da densidade eletrônica enquanto que as linhas pontilhadas correspondem aos sabores. Densidade negativa é referente ao caso dos antineutrinos.

3.8.1 Hierarquia Normal

Neutrinos

A produção de neutrinos no interior das estrelas se dá dentro do núcleo, em regiões de alta densidade, $\rho \rightarrow \infty$ (ou $\rho \gg \rho_H, \rho_L$), o que leva a uma forte supressão das misturas e observando a Fig. 3.6a vemos que eles são criados como,

$$\nu_e = \nu_3^M \quad , \quad \nu_\mu = \nu_1^M \quad , \quad \nu_\tau = \nu_2^M \quad , \quad (3.104)$$

e vamos considerar os fluxos dos auto-estados neste local como originais e da forma

$$F_1^{0(M)} = F_x^0 \quad , \quad F_2^{0(M)} = F_x^0 \quad , \quad F_3^{0(M)} = F_e^0 \quad , \quad (3.105)$$

onde denotamos pelo subíndice x os neutrinos tauônicos e muônicos, tendo em vista que eles reagem da mesma forma (corrente neutra) e são gerados em quantidades iguais.

As duas camadas de ressonância que vimos na subseção 3.7.1 são independentes no que diz respeito à dinâmica de transição. Então podemos denominar de P_H e P_L as probabilidades de cruzamento dos auto-estados massivos nas regiões de alta e baixa densidade, respectivamente.

Vamos analisar primeiramente o fluxo do auto-estado ν_1 ao chegar na superfície da estrela. O neutrino originado eletrônico (ν_3^M) tem uma probabilidade $P_H P_L$ de chegar à superfície como ν_1 , pois houve o cruzamento $\nu_3^M \rightarrow \nu_2^M$ e posteriormente a troca $\nu_2^M \rightarrow \nu_1^M$ antes dele sair para o espaço. Assim, a contribuição dos neutrinos eletrônicos originais pode ser expressa

$$F_1 = P_H P_L F_e^0 \quad . \quad (3.106)$$

Os neutrinos muônicos no centro da estrela (ν_1^M) que oscilaram para o tipo eletrônico podem ser encontrados da seguinte maneira: sabemos que a quantidade de neutrinos massivos que mudam seu auto-estado é dado pela probabilidade P_L , então o número de neutrinos massivos que permaneceu no mesmo auto-estado de massa é $(1 - P_L)$. Desse modo,

$$F_1 = (1 - P_L) F_x^0 \quad , \quad (3.107)$$

e para o neutrino criado com sabor tauônico seguimos a mesma lógica do muônico usada acima para obtermos

$$F_1 = (1 - P_H) F_x^0 \quad . \quad (3.108)$$

O fluxo total de neutrinos que chegam à superfície da pré-supernova é encontrado ao somarmos as eqs. (3.106 - 3.108)

$$\begin{aligned} F_1 &= P_H P_L F_e^0 + (1 - P_L) F_x^0 + (1 - P_H) F_x^0 \\ &= P_H P_L F_e^0 + (1 - P_H P_L) F_x^0 \quad . \end{aligned} \quad (3.109)$$

Usando o mesmo raciocínio para os outros 2 auto-estados de massa, obtemos

$$\begin{aligned} F_2 &= P_H (1 - P_L) F_e^0 + P_L F_x^0 + (1 - P_H) (1 - P_L) F_x^0 \\ &= (P_H - P_H P_L) F_e^0 + (1 - P_H + P_H P_L) F_x^0 \quad , \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} F_3 &= (1 - P_H) F_e^0 + P_H F_x^0 + 0 F_x^0 \\ &= (1 - P_H) F_e^0 + P_H F_x^0 \quad . \end{aligned} \quad (3.111)$$

Como os detectores utilizados atualmente têm capacidade de captar apenas os sabores, não os auto-estados de massa, precisamos reescrever as eqs. (3.109) e

(3.110) como

$$F_i = a_i F_e^0 + (1 - a_i) F_x^0 \quad , \quad (3.112)$$

onde

$$a_1 = P_H P_L \quad , \quad a_2 = P_H (1 - P_L) \quad , \quad a_3 = 1 - P_H \quad . \quad (3.113)$$

Levando em conta a condição de unitariedade da matriz de mistura e usando a eq. (3.112) podemos encontrar o fluxo dos neutrinos eletrônicos que chegam à Terra como

$$\begin{aligned} F_e &= \sum_i |U_{ei}|^2 F_i \\ &= \sum_i |U_{ei}|^2 a_i F_e^0 + (1 - \sum_i |U_{ei}|^2 a_i) F_x^0 \quad , \end{aligned} \quad (3.114)$$

e é possível, de novo, modificar a expressão (3.114) para

$$F_e = p F_e^0 + (1 - p) F_x^0 \quad , \quad (3.115)$$

sendo que

$$p \equiv \sum_i |U_{ei}|^2 a_i \quad , \quad (3.116)$$

pode ser compreendido como a probabilidade de sobrevivência total do neutrino eletrônico.

Sabendo que o fluxo total de neutrinos das três espécies permanece constante, podemos determinar os fluxos de ν_μ e ν_τ que chegam ao planeta como

$$\begin{aligned} F_e^0 + 2F_x^0 &= F_e + F_\mu + F_\tau \\ F_\mu + F_\tau &= F_e^0 + 2F_x^0 - F_e \\ &= (1 - p)F_e^0 + (1 + p)F_x^0 \quad . \end{aligned} \quad (3.117)$$

Chamamos a atenção para o fato da divergência dos pacotes de onda, isto é, qualquer coerência entre os auto-estados de massa é desfeita no trajeto para a Terra. Isto significa que os fluxos que chegam aqui não possuem qualquer ligação entre os auto-estados de massa [84].

Antineutrinos

Em densidades muito altas ($\rho \gg \rho_H, \rho_L$) a mistura dos auto-estados de massa é fortemente suprimida, semelhante ao caso dos neutrinos. Então, observando novamente a Fig. 3.6a, mas agora pelo lado esquerdo, vemos que a produção dos antineutrinos se dá como

$$\bar{\nu}_e = \bar{\nu}_1^M \quad , \quad \bar{\nu}_\mu = \bar{\nu}_2^M \quad , \quad \bar{\nu}_\tau = \bar{\nu}_3^M \quad , \quad (3.118)$$

e os fluxos iniciais serão

$$\bar{F}_1^{0(M)} = \bar{F}_e^0 \quad , \quad \bar{F}_2^{0(M)} = \bar{F}_x^0 \quad , \quad \bar{F}_3^{0(M)} = \bar{F}_x^0 \quad . \quad (3.119)$$

Há uma forte supressão na matéria sobre o já diminuto ângulo θ_{13} , fazendo com que a transição $\bar{\nu}_1 \leftrightarrow \bar{\nu}_3$ seja desprezível (veja Fig. 3.6). Então o $\bar{\nu}_3^M$ propaga-se adiabaticamente, de modo que

$$\bar{\nu}_\tau = \bar{\nu}_3^M \rightarrow \bar{\nu}_3 = \bar{\nu}_\tau \quad . \quad (3.120)$$

Do mesmo modo que fizemos para o caso dos neutrinos, vamos chamar de \bar{P}_H e \bar{P}_L as probabilidades de cruzamento dos auto-estados massivos dos antineutrinos em altas e baixas densidades, respectivamente. Também podemos utilizar o mesmo raciocínio para montarmos a expressão dos fluxos

$$\bar{F}_e = \bar{p}\bar{F}_e^0 + (1 - \bar{p})\bar{F}_x^0 \quad , \quad (3.121)$$

e

$$\bar{F}_\mu + \bar{F}_\tau = (1 - \bar{p})\bar{F}_e^0 + (1 + \bar{p})\bar{F}_x^0 \quad , \quad (3.122)$$

sendo \bar{p} novamente a probabilidade de sobrevivência, agora para os antineutrinos. Sua forma é igual a da eq. (3.116),

$$\begin{aligned} \bar{p} &\equiv \sum_i |U_{ei}|^2 a_i \\ &= |U_{e1}|^2(1 - \bar{P}_L) + |U_{e2}|^2 \bar{P}_L \quad . \end{aligned} \quad (3.123)$$

Como já mencionamos anteriormente, os neutrinos do múon e do tau reagem do mesmo modo, via corrente neutra. O mesmo vale para suas anti-

partículas. Então, daqui em diante, vamos denotá-los apenas por F_x , sem a necessidade de distinguí-los. Agora vamos levar em consideração os casos de conversão.

Efeitos da Conversão

Os neutrinos produzidos pelo Sol, chamados de *neutrinos solares*, representam a conversão ressonante $\nu_e \rightarrow \nu_2$ que ocorre no interior da nossa estrela. Observando o lado esquerdo da Fig. 3.6a podemos ver que os antineutrinos não passam por nenhuma camada de ressonância, embora haja alguma transição $\bar{\nu}_1 \leftrightarrow \bar{\nu}_2$ o que significa que a propagação se dá adiabaticamente ($\bar{P}_L \simeq 0$). Da eq. (3.123) podemos determinar a probabilidade de sobrevivência dos antineutrinos eletrônicos

$$\bar{p} \simeq |U_{e1}|^2 \simeq \cos^2 \theta_{\odot} \quad , \quad (3.124)$$

onde, na última igualdade, fizemos $\cos \theta_{13} \simeq 1$. Podemos obter o valor numérico para o resultado mostrado na eq. (3.124) ao lembrarmos que $\sin^2 \theta_{\odot} \sim 0.3$ [15].

Para calcularmos a probabilidade de sobrevivência dos neutrinos eletrônicos, utilizamos a Fig. 4 da ref. [84] para vermos que em baixa densidades temos $P_L \simeq 0$. Das eqs. (3.113) e (3.116) temos

$$\begin{aligned} p &\simeq |U_{e2}|^2 P_H + |U_{e3}|^2 (1 - P_H) \\ &= (\sin \theta_{e2} \cos \theta_{e3})^2 P_H + (\sin \theta_{e3})^2 (1 - P_H) \\ &= \sin^2 \theta_{\odot} P_H + |U_{e3}|^2 (1 - P_H) \quad . \end{aligned} \quad (3.125)$$

Como não conhecemos ainda o valor de θ_{13} , apenas sabemos o seu limite superior ($\simeq 13^\circ$), temos de calcular a probabilidade P_H nos três casos de ressonância.

Caso I: este é o caso de evolução adiabática, então $P_H \simeq 0$, deixando a eq. (3.125) na forma

$$p = |U_{e3}|^2 \quad , \quad (3.126)$$

assim, o espectro que podemos esperar na Terra é

$$F_e \approx |U_{e3}|^2 F_e^0 + (1 - |U_{e3}|^2) F_x^0 \approx F_x^0 \quad , \quad (3.127)$$

$$\bar{F}_e \approx \cos^2 \theta_\odot \bar{F}_e^0 + \sin^2 \theta_\odot F_x^0 \quad , \quad (3.128)$$

$$4F_x \approx F_e^0 + \sin^2 \theta_\odot \bar{F}_e^0 + (2 + \cos^2 \theta_\odot) F_x^0 \quad . \quad (3.129)$$

Destacamos alguns fatos relevantes: o canal ν_e é suprimido pelo ângulo de θ_{13} , aparecendo no canal ν_x ; o espectro de $\bar{\nu}_e$ é uma mistura de seus originais ($\bar{\nu}_e$) e do espectro de ν_x ; e o espectro de ν_x contém partes de todos os espectros originados no núcleo da estrela.

Caso II: nesta situação a probabilidade de cruzamento depende bastante da energia dos neutrinos, mas podemos dizer, baseado na Fig. 3.6 do lado esquerdo que

$$\nu_e \rightarrow \nu_2, \nu_3 \quad , \quad \nu_\mu \rightarrow \nu_1 \quad , \quad \nu_\tau \rightarrow \nu_2, \nu_3 \quad , \quad (3.130)$$

observando a eq. (3.125) vemos que o 1º termo é maior que o 2º. Assim,

$$p \approx \sin^2 \theta_\odot P_H \quad , \quad (3.131)$$

novamente, a partir de p e \bar{p} podemos calcular os fluxos

$$F_e \approx \sin^2 \theta_\odot P_H F_e^0 + (1 - \sin^2 \theta_\odot P_H) F_x^0 \quad , \quad (3.132)$$

$$\bar{F}_e \approx \cos^2 \theta_\odot \bar{F}_e^0 + \sin^2 \theta_\odot F_x^0 \quad , \quad (3.133)$$

$$4F_x \approx (1 - \sin^2 \theta_\odot P_H) F_e^0 + \sin^2 \theta_\odot \bar{F}_e^0 + (3 - \sin^2 \theta_\odot + \sin^2 \theta_\odot P_H) F_x^0 \quad . \quad (3.134)$$

Para este caso podemos ver que as características de todos os espectros são compostos.

Caso III: aqui temos que a evolução ocorre de modo não adiabático, fazendo que a probabilidade de cruzamento entre os auto-estados massivos seja próximo da unidade, $P_H \approx 1$, e a probabilidade de sobrevivência proveniente da eq. (3.125) fica

$$p = \sin^2 \theta_\odot \quad , \quad (3.135)$$

e observando a Fig. 3.6 temos que os novos auto-estados de massa para os sabores serão

$$\nu_e = \nu_2 \quad , \quad \nu_\mu = \nu_1 \quad , \quad \nu_\tau = \nu_3 \quad . \quad (3.136)$$

Aqui também temos que os fluxos para cada espectro será composto, análogo ao do caso II.

3.8.2

Hierarquia Invertida

Agora vamos considerar que o auto-estado de massa mais leve é o ν_3 e os auto-estados ν_1 e ν_2 são muito mais pesados e degenerados. Na Fig. 3.6b vemos que temos a camada de alta ressonância (ρ_H) no setor dos antineutrinos e a de baixa ressonância (ρ_L) no de neutrinos.

Neutrinos

O local onde os neutrinos são gerados é de densidade muito alta ($\rho \gg \rho_H, \rho_L$) o que suprime a mistura dos auto-estados de massa. Neste ponto temos

$$\nu_e = \nu_2^M \quad , \quad \nu_\mu = \nu_1^M \quad , \quad \nu_\tau = \nu_3^M \quad . \quad (3.137)$$

O neutrino eletrônico gerado no núcleo chega na camada de ressonância para baixas densidades ainda com seu auto-estado de massa em ν_2^M , pois a camada de ressonância para altas densidades está no canal dos antineutrinos. Então, a probabilidade do auto-estado ν_2^M passar para ν_1^M será P_L e de permanecer como ν_2^M será de $(1 - P_L)$. Os fluxos originais podem ser descritos como

$$F_1^{0(M)} = F_x^0 \quad , \quad F_2^{0(M)} = F_e^0 \quad , \quad F_3^{0(M)} = F_x^0 \quad , \quad (3.138)$$

e os fluxos totais dos neutrinos na superfície da estrela são

$$F_1 = P_L F_e^0 + (1 - P_L) F_x^0 \quad , \quad (3.139a)$$

$$F_2 = (1 - P_L) F_e^0 + P_L F_x^0 \quad , \quad (3.139b)$$

$$F_3 = F_x^0 \quad . \quad (3.139c)$$

Usando a eq. (3.112) temos que

$$a_1 = P_L \quad \text{e} \quad a_2 = (1 - P_L) \quad , \quad (3.140)$$

que nos leva à probabilidade de sobrevivência (p) do neutrino eletrônico na forma

$$\begin{aligned} p &\equiv \sum_i |U_{ei}|^2 a_i \\ &= |U_{e1}|^2 P_L + |U_{e2}|^2 (1 - P_L) \quad . \end{aligned} \quad (3.141)$$

Antineutrinos

Para os antineutrinos, temos que no local de criação seus auto-estados são relacionados com os sabores como

$$\bar{\nu}_e = \bar{\nu}_3^M \quad , \quad \bar{\nu}_\mu = \bar{\nu}_2^M \quad , \quad \bar{\nu}_\tau = \bar{\nu}_1^M \quad , \quad (3.142)$$

de acordo com a Fig. 3.6b, e a relação dos fluxos iniciais é

$$\bar{F}_1^{0(M)} = F_x^0 \quad , \quad \bar{F}_2^{0(M)} = F_x^0 \quad , \quad \bar{F}_3^{0(M)} = \bar{F}_e^0 \quad . \quad (3.143)$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para os neutrinos, podemos encontrar a probabilidade de sobrevivência do antineutrino eletrônico como

$$\bar{p} = |U_{e1}|^2 \bar{P}_H (1 - \bar{P}_L) + |U_{e2}|^2 \bar{P}_H \bar{P}_L + |U_{e3}|^2 (1 - \bar{P}_H) \quad . \quad (3.144)$$

Efeitos da Conversão

As transições dos neutrinos na camada de baixa densidade (ρ_L) são adiabáticas ($P_L \simeq 0$). Então a probabilidade de sobrevivência do neutrino eletrônico representado na eq. (3.141) fica

$$p \approx |U_{e2}|^2 \approx \sin^2 \theta_\odot \quad , \quad (3.145)$$

e o espectro fica

$$F_e \approx \sin^2 \theta_\odot F_e^0 + \cos^2 \theta_\odot F_x^0 \quad . \quad (3.146)$$

As transições dos antineutrinos em baixa densidade também se dão adiabaticamente, fazendo $\bar{P}_L \simeq 0$. Na camada de alta densidade, ρ_H , o espectro do $\bar{\nu}_e$ depende da localização de $|U_{e3}|^2$, semelhante ao que temos para o caso da hierarquia normal.

Caso I: setor adiabático, isto é, $\bar{P}_H \simeq 0$, deixando a eq. (3.144) na forma $\bar{p} \simeq |U_{e3}|^2$ e como o valor de $|U_{e3}|^2$ é muito pequeno podemos ver que o espectro do $\bar{\nu}_e$ é praticamente o espectro original do ν_x , que pode ser escrito como

$$\bar{F}_e \simeq F_x^0 \quad . \quad (3.147)$$

Uma característica deste caso é: os espectros dos neutrinos são compostos, isto é, misturados pelas transições, mas o espectro do antineutrino eletrônico é praticamente o original do ν_x .

Caso II: é quando as transições dependem da energia dos neutrinos. Todos os espectros são compostos devido as transições que sofrem, em maior ou menor grau.

Caso III: aqui temos que $P_H \simeq 1$ e os parâmetros de mistura e as características do espectro são idênticas ao caso III da hierarquia normal,

$$\bar{F}_e \approx \cos^2 \theta_\odot \bar{F}_e^0 + \sin^2 \theta_\odot F_x^0 \quad . \quad (3.148)$$

3.9 Identificação do Espectro de Massa

Na seção anterior vimos como o fluxo dos neutrinos e antineutrinos é afetado pela densidade da estrela, de modo a aumentar ou diminuir consideravelmente a ocorrência de oscilações durante a fuga destas partículas em direção à Terra. Os resultados encontrados acima para os diferentes casos e

Caso	Hierarquia	p	\bar{p}
I	Normal	$ U_{e3} ^2$	$\cos^2 \theta_\odot$
	Invertida	$\sin^2 \theta_\odot$	$ U_{e3} ^2$
II	Normal	$\sin^2 \theta_\odot P_H$	$\cos^2 \theta_\odot$
	Invertida	$\sin^2 \theta_\odot$	$\cos^2 \theta_\odot P_H$
III	Normal	$\sin^2 \theta_\odot$	$\cos^2 \theta_\odot$
	Invertida	$\sin^2 \theta_\odot$	$\cos^2 \theta_\odot$

Tabela 3.3: Tabela que mostra os dados obtidos neste capítulo para as probabilidades de sobrevivência do neutrino e antineutrino eletrônico.

a dependência do tipo de hierarquia estão mostrados na tabela 3.3. Os casos I e III para os antineutrinos são os que utilizamos neste trabalho (além da situação em que não há oscilação) e o valor do ângulo com o qual trabalhamos foi de 34° .