4. Modelos Básicos Utilizados na Avaliação de Opções Reais

Os métodos de avaliação de opções reais devem ter, em primeiro lugar, a capacidade de representar as decisões de investimento sob ambiente de incerteza, ou seja, devem ser capazes de lidar com a relação de decisões ótimas que cada cenário contingente possui. A teoria de opções reais encontrou na teoria das opções financeiras suas bases para também se desenvolver, utilizando muito de seus métodos e conceitos.

As portas para o efetivo inicio da pesquisa e desenvolvimento dos métodos de avaliação de derivativos foram abertas a partir das contribuições dos trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Desde a publicação destes trabalhos, centenas de trabalhos têm sido escritos sobre a avaliação de derivativos, tais como: opções sob diferentes ativos subjacentes, contratos a termo, contratos futuros, swaps, etc.

Estes trabalhos também fazem a transição para a idéia de que muitos "*claims*" (direitos e obrigações), tais como empréstimos, dívida, ações, garantias, podem ser vistos como ativos contingentes. Pode-se afirmar que grande parte da pesquisa em finanças na década de 90 se dedicou em tentar desenvolver modelos para avaliar os diversos instrumentos financeiros derivativos transacionados atualmente.

Esta metodologia de avaliação de opções financeiras tem a seguinte idéia básica: em mercados (dinamicamente) completos pode-se montar uma carteira (dinâmica) que reproduza artificialmente um derivativo, por meio de uma estratégia autofinanciável composta de ativos mobiliários (ações) e o ativo livre de risco deste mercado.

Black e Scholes (1973) e Merton (1973) mostram que o conjunto de *payoffs* de uma opção pode ser replicado por meio desta metodologia. Diversos trabalhos têm se dedicado a esclarecer a natureza das restrições necessárias a montagem de uma estratégia autofinanciável, tal como discutir a restrição de não-negatividade do patrimônio do investidor entre outras que podem ser vistas nos trabalhos de Dybvig e Huang (1989) e Cox e Huang (1989).

Posteriormente, Cox e Ross (1976a, 1976b) se utilizam da idéia da avaliação neutra ao risco, que foi desenvolvida por Harrison e Kreps (1979), onde fizeram a conexão entre avaliação neutra o risco e o argumento de não arbitragem. Um importante resultado neste trabalho foi que a ausência de arbitragem implica na existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco.

Os modelos básicos utilizados na avaliação de opções reais apresentados neste capítulo são: Modelo de Black - Scholes, Modelo Binomial e a Programação Dinâmica, entendidos como os modelos mais utilizados e de onde derivam as diversas abordagens. Além de apresentar estes modelos, este capítulo também abordará alguns importantes conceitos financeiros que serviram para balizar os modelos de avaliação de derivativos financeiros e que foram também adotados pela TOR, tais como: replicação, arbitragem, avaliação neutra ao risco e completude dos mercados.

4.1 Conceitos

4.1.1 Replicação

Diz-se que um portifólio $\theta = (\theta_1,...\theta\kappa)^t$ de ativos S_1, ..., S_k replica o ativo S se o fluxo de caixa do portifólio e do ativo S são os mesmos qualquer que seja o estado da natureza.

Onde: $\theta = (\theta_1,...\theta\kappa)^t$ é um vetor ϵ R^k

Um importante resultado que advém da replicação é que em um mercado sem oportunidades de arbitragem, se um ativo admite um portfólio replicador, então o preço justo deste ativo será o mesmo que o de seu portfólio replicador (também pela *Lei do Preço Único*).

4.1.2 Arbitragem

O conceito de arbitragem é largamente utilizado na moderna teoria de finanças e constitui-se no alicerce da teoria de apreçamento de opções financeiras. A **arbitragem** consiste numa operação realizada por participantes dos mercados futuro, a termo e/ou de opções que deve satisfazer as seguintes condições:

- Seu custo inicial é zero;

- Não há possibilidade desta operação realizar prejuízos no futuro;
- A probabilidade desta operação realizar lucros no futuro deve ser não nula.

Outro modo de defini-la:

Diz-se que uma estratégia é de arbitragem quando é possível montar um portfólio autofinanciável que possua valor inicial igual a zero e valor final nunca negativo, devendo ser estritamente positivo com probabilidade maior que zero.

Numa economia com agentes com preferências estritamente monótonas (preferem sempre “mais a menos” bens), as combinações de preços que proporcionam estratégias de arbitragem tendem a desaparecer rapidamente.

4.1.3 Avaliação Neutra ao Risco

A avaliação neutra ao risco é um artifício para gerar a ficção do “mundo neutro ao risco”, em que ao supor que os agentes sejam neutros ao risco, se estará considerando que não será requerida compensação por risco tomado e que, portanto, o retorno de qualquer ativo será o mesmo do ativo livre de risco.

Na equação diferencial de Black- Scholes cria-se um “mundo neutro ao risco”, pois nenhuma de suas variáveis depende das preferências dos agentes. Isto ocorre por que é construída de modo a não envolver o retorno esperado (ou *drift*) do ativo subjacente, que é crescente com a aversão ao risco dos agentes.

No Modelo Binomial também não aparecem variáveis que estejam relacionadas com as preferências dos agentes, o modelo se baseia no processo estocástico do ativo subjacente para calcular o valor das opções.

O fato da avaliação neutra ao risco independer conjunto de preferências dos agentes, torna indiferente que se assuma qualquer perfil de preferências para os agentes. Daí se assumirá, por exemplo, que os agentes sejam neutros ao risco, o que simplificará a solução de alguns problemas, pois permitirá que seja considerado que o retorno requerido de qualquer ativo seja a taxa livre de risco, que é conhecida.

4.1.4 Completude dos Mercados

Informalmente, um mercado será completo quando o número de ativos linearmente independentes for igual ao número de estados possíveis da natureza. Isto faz com que, em mercados completos, qualquer derivativo possa ser artificialmente replicado pelo ativo subjacente e pelo ativo livre de risco (este portfólio replicador pode ser dinamicamente rebalanceado).

Assim, tem-se que, em um mercado completo, os derivativos podem ser ditos redundantes, pois para cada um deles existirá uma estratégia autofinanciável composta somente por ativos primários, com comportamento exatamente igual ao do próprio derivativo replicado. Esta “redundância” combinada com a hipótese de não arbitragem permitirá a valoração de quaisquer derivativos (em mercados completos).

Os mercados incompletos, por sua vez, serão aqueles mercados em que o número de ativos linearmente independentes é menor que o número de estados possíveis da natureza.

4.2 Modelo Binomial

O primeiro trabalho a fazer uso da abordagem binomial foi de Sharpe (1978), realizando-a de forma intuitiva com o objetivo de explanar a respeito do preço das opções. Posteriormente, o modelo binomial foi mostrado mais pormenorizadamente e implementado por Cox, Ross e Rubinstein (1979) e Rendleman e Bartter (1979), onde foi também demonstrada a ligação entre este modelo e o modelo de Black e Scholes.

O modelo binomial é expresso graficamente por um diagrama denominado arvore binomial que representa os diferentes caminhos que podem ser seguidos pelo preço do ativo subjacente (na concepção inicial, a ação) durante a vida da opção. A abordagem do modelo binomial se dá em tempo discreto, o modelo geral pode ser caracterizado do seguinte modo:

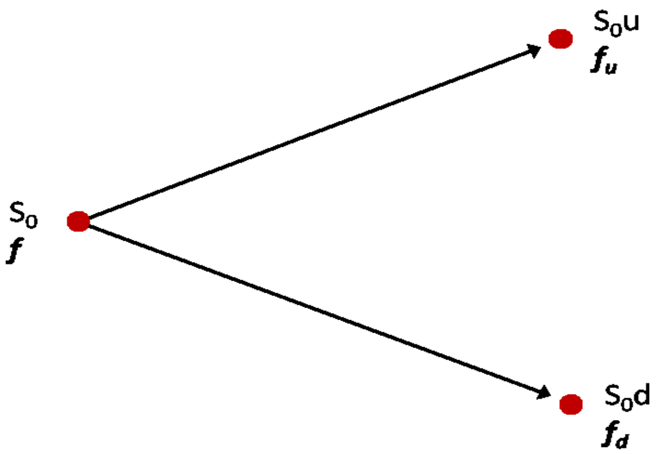
Seja f o preço de uma opção financeira e S_0 o preço de seu ativo subjacente. Supõe-se que esta opção expire dentro de um prazo T e que, durante a vida desta opção, o preço de seu ativo subjacente possa subir de S_0 para um novo nível S_0u, ou descer de S_0 para S_0d, onde $u > 1$ e $d < 1$. Na verdade, o modelo impõe uma restrição um pouco maior para que seja atendida a condição de não arbitragem:

$$0 < d < (1 + r) < u$$

Existem diversas variações na literatura para escolha dos parâmetros de u e d, Cox, Ross e Rubinstein fazem uma escolha conveniente para que o ativo subjacente siga uma distribuição log-normal[7] quando considerado intervalos de tempo suficientemente pequeno. Isto consiste em fazer $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = 1/u$

Quando o preço do ativo subjacente vai a S_0u, o *payoff* da opção é f_u e quando o preço do ativo subjacente vai a S_0d, o *payoff* da opção é f_d. Esta distribuição de preços e *payoff´s* está ilustrada na figura abaixo.

Figura 4 – Preço da Ação e da Opção em Árvore Binomial de passo único



Supõe-se um portfólio com posição comprada em δ ativos subjacentes e posição vendida em uma opção. O valor de δ é calculado apropriadamente de modo que o portfólio seja sem risco. Assim, caso o movimento do ativo subjacente tenha sido de subida, o valor deste portfólio será:

$$S_0u\delta - f_u$$

E caso o movimento do ativo subjacente tenha sido de descida o valor do portfólio será:

$$S_0d\delta - f_d$$

[7] O interesse particular nesta distribuição é o fato de não permitir valores negativos, o que é bem conveniente em se tratando de preço de ações ordinárias, por exemplo.

Como este portfólio foi montado de modo apropriado para que fosse livre de risco, seu valor deverá ser o mesmo nos dois estados da natureza, portanto:

$$S_0u\delta - f_u = S_0d\delta - f_d \tag{4.1}$$

$$\delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \tag{4.2}$$

Pelo argumento de não arbitragem, o portfólio, por ser sem risco, deverá ter a mesma rentabilidade do ativo livre de risco deste mercado, r. O valor presente deste portfolio[8] é denotado por:

$$(S_0u\delta - f_u)\, e^{-rT} \tag{4.3}$$

O custo para montar este portfolio será de:

$$S_0\delta - f$$

Tem-se então que:

$$S_0\delta - f = (S_0u\delta - f\,)e^{-rT}$$

$$f = S_0\delta - (S_0u\delta - f\,)e^{-rT}$$

Substituindo-se o valor de δ nesta equação e simplificando, obtêm-se:

$$f = e^{-rT}[\, pf_u + (1 - p)\, f_d]$$

Em que:

$$p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d}$$

Neste contexto, *p* poderá ser interpretado como a probabilidade neutra ao risco. Com esta interpretação a equação afirma que o valor de uma opção financeira hoje é o seu valor esperado futuro (com probabilidades neutras ao risco) descontado a taxa livre de risco.

[8] Como em (4.2) foi escolhido um delta de modo que o portfólio obtivesse o mesmo valor qualquer que fosse o estado da natureza, é indiferente (4.3) se utilizar de qualquer um dos "lados" da paridade expressa em (4.1).

O equivalente pode ser afirmado para o ativo subjacente, ou seja:

$$E^Q(S_T) = pS_0u + (1 - p)S_0d$$

$$E^Q(S_T) = pS_0(u - d) + S_0d$$

Donde *p* pode ser substituído pela relação já apresentada, obtendo-se:

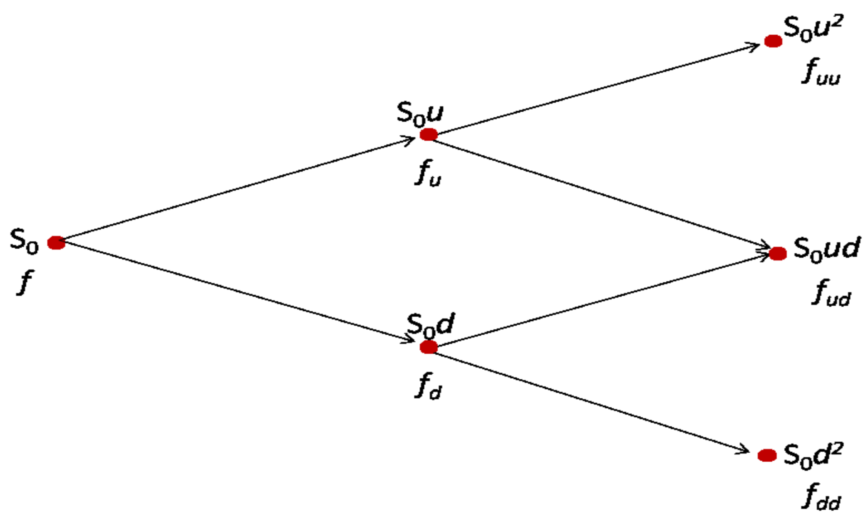
$$E^Q(S_T) = S_0e^{rT}$$

Isto demonstra que o resultado obtido pelo modelo Binomial, a partir de argumentos de não arbitragem é equivalente ao assumido pela avaliação neutra ao risco.

Estes resultados podem ser generalizados com a extensão da árvore a diversos passos. É possível mostrar que os cenários centrais serão mais prováveis que os cenários extremos (intuitivamente, muito mais "caminhos" levam aos cenários centrais que aos extremos).

A representação da extensão da árvore binomial para dois passos está expressa a seguir:

Figura 5 – Árvore Binomial de dois passos



4.3 O Modelo de Black - Scholes

Dois trabalhos são considerados marcos na teoria de opções financeiras, são eles: *The Pricing of options and Corporate Liabilities* e *Theory of Racional option Pricing,* escritos por Black e Scholes (1973) e Merton (1973), respectivamente.

A importância destes trabalhos se dá por eles terem originado um modelo, construído a partir da hipótese de não arbitragem, que determina o valor justo de uma opção européia sem pagamento de dividendos, a partir de variáveis observáveis. Este modelo ficou conhecido como modelo de Black e Scholes.

O modelo de Black - Scholes se utiliza do pressuposto de que é possível construir uma carteira livre de risco em intervalos infinitesimais, pela combinação adequada de posições "compradas" e "vendidas" no ativo subjacente e no derivativo.

Quando o mercado se encontra em equilíbrio, ou quando não há oportunidades de arbitragem, os ativos (ou carteiras) que apresentam os mesmos resultados (mesmos *payoff´s* em todos estados da natureza) devem apresentar também o mesmo preço. Do contrário, existiriam oportunidades de arbitragem, que seriam exploradas pelos agentes deste mercado, até que este mercado chegasse a um estado de equilíbrio em que estes preços coincidam.

A equação de avaliação de opções européias de compra definidas sobre um ativo subjacente que não reparte dividendos, derivada por Black & Scholes, parte dos pressupostos a seguir:

- Não existem imperfeições de mercado, custos de transação, impostos e oportunidades de arbitragem;
- Todos os ativos são perfeitamente divisíveis e são transacionados de forma continua no tempo;
- A taxa de juros de curto prazo livre de risco é conhecida e constante;
- A volatilidade do retorno do ativo subjacente é constante[9];
- O ativo subjacente segue o Movimento Geométrico Browniano de modo que sua variação infinitesimal num intervalo (t, t + dt) possa ser modelada pela seguinte expressão:

$$dS_t = \alpha S_t d_t + \sigma S_t dz_t$$

Onde:

[9] A volatilidade do ativo subjacente será o único parâmetro da equação de Black & Scholes que não é diretamente observável. Atualmente, a hipótese sobre a homocedasticidade da volatilidade vem sendo questionada em função da constatação do fato estilizado entre a volatilidade implícita do preço de mercado da opção e seu preço de exercício, denominado *Sorriso da Volatilidade*.

S_t representa o preço do ativo subjacente no momento t, αdt e $\sigma^2 dt$ a esperança e a variância da variação infinitesimal do preço do ativo subjacente e dz_t a variação de um processo de Wiener no mesmo intervalo temporal, a saber:

$$dz_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}, \text{ sendo } \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

A partir destas condições ideais, seria, então, possível construir uma carteira livre de risco com uma combinação adequada entre o ativo subjacente e o derivativo, onde se toma uma posição vendida em $\partial F_t/\partial S_t$ unidades de ativos subjacentes por cada unidade de opção.

A rentabilidade desta carteira no intervalo (t, t + dt) será igual a soma dos retornos do derivativo e do ativo subjacente, ponderados por suas respectivas quantidades, isto é:

$$dF_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t}\, dS_t$$

Pela hipótese de equilíbrio, para que não haja oportunidades de arbitragem, a rentabilidade desta carteira, construída adequadamente para ser livre de risco, deverá coincidir o rendimento do ativo livre de risco desta economia (r), a saber:

$$dF_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t = r(F_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t}\, S_t)$$

Desenvolvendo dF pelo lema de Itô, simplificando e reordenando, obtêm-se a seguinte equação (não estocástica e de derivadas parciais):

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial F_t}{\partial S_t} + \frac{\partial F_t}{\partial t} - rF_t = 0}$$

As características do derivativo é que definirão as condições de contorno que resolvem esta equação diferencial[10].

4.4 Método da Programação Dinâmica

O termo programação dinâmica foi originalmente usado na década de 1940 por Richard Bellman para descrever o processo de resolução de problemas com decisões seqüenciais. Para os problemas de "parada ótima" utiliza-se uma classe particular de programação dinâmica em que as decisões são binárias em qualquer período: exerce a opção ou não exerce a opção. O

---

[10] Diversos métodos numéricos para a resolução da equação diferencial parcial de Black-Scholes podem ser encontrados em JAMES, Peter. **Option Theory**, p.87- 102, 2003.

método da programação dinâmica "quebra" a seqüência de decisões em duas componentes: a decisão que será tomada imediatamente e o conjunto de decisões subseqüentes. A parte correspondente ao conjunto das decisões subseqüentes é representada por uma função de valor que deve exprimir os *payoffs* esperados das decisões ótimas nestes períodos subseqüentes que deverá ser descontado por uma taxa de desconto exógena ρ. Assim, o exercício imediato da opção significa a escolha por aquele *payoff* terminal correspondente e o não exercício - a espera – significará a expectativa de um *payoff* maior (ou conjunto de *payoffs*, caso o ativo subjacente gere dividendos até seu exercício) para um exercício mais tardio da opção.

A partir desta modelagem, a solução do problema consistirá na otimização das decisões (expressa pelos *payoff´s* resultantes) que se inicia no último período e retroage até o instante inicial.