# 2
# Revisão Bibliográfica

Os principais artigos, livros e apostilas relacionados a esta dissertação foram enumerados durante o presente capítulo. Os principais tópicos de cada um deles, assim como suas conclusões foram abordados de forma a identificar o contexto científico em que a dissertação se encontra. Em alguns casos os assuntos abordados são tão importantes para o entendimento do estudo proposto, que eles voltaram a ser detalhados em capítulos posteriores, como é o caso dos processos estocásticos e do Filtro de Kalman. Os trabalhos aqui expostos fazem parte de um segmento do conhecimento denominado estudo de séries temporais, no qual as próprias séries são utilizadas para modelar os dados. No entanto, há outros ramos na econometria.

Outra metodologia utilizada para modelar os preços é apresentá-lo como função de algumas outras variáveis. GUJARATI (2003) e JOHNSTON E DINARDO (1997) apresentam modelos econométricos nos quais a variável dependente é determinada pelas variáveis independentes. Por exemplo, podería-se construir um modelo de demanda de petróleo como uma função da renda e dos preços. A variável renda determinaria a capacidade dos consumidores para comprar. O preço seria o responsável pela escolha dos consumidores em relação às outras fontes de energia. Outro aspecto que justifica a relevância do estudo é o volume negociado de contratos futuros de petróleo.

Há muita divergência quanto à verdadeira dimensão do mercado de derivativos. SHERIDAN (2008) divulgou um estudo na revista *NewsWeek*, por exemplo, no qual o mercado é estimado em US$ 15 trilhões, e vem duplicando de tamanho a cada dois ou três anos. O objetivo dos investidores, das empresas e das instituições financeiras é buscar nesse mercado além de ganhos de capital, proteção.

Os principais textos que se relacionam com este trabalho, por serem artigos que abordam a modelagem e a previsão do preço do petróleo, são GIBSON E SCHWARTZ (1990) e SCHWARTZ E SMITH (2000). O primeiro artigo modela o preço futuro como uma função do preço à vista, do prazo para expiração dos contratos futuros e do retorno de conveniência (*convinience yield*). Os fatores estocásticos deste modelo são o preço à vista e o retorno de conveniência, e por isso o modelo pertence à classe dos modelos de dois fatores. O segundo artigo, de 2000, também apresenta um modelo de dois fatores, um desvio de curto prazo e uma tendência de longo prazo. Por utilizar fatores estocásticos mais intuitivos o segundo modelo ganhou bastante notoriedade neste segmento de pesquisas.

## 2.1. GIBSON E SCHWARTZ (1990)

Os autores desenvolveram um modelo de dois fatores para a cotação do barril de óleo, no qual as variáveis estocásticas eram o preço *spot* e o retorno de conveniência instantâneo. Desta forma o ativo contingente sobre o petróleo seguiu como uma função do preço à vista, $S$, do retorno de conveniência, $\delta$, e do tempo para a expiração, $\tau$, conforme relação abaixo. As variáveis foram selecionadas, pois o preço do derivativo claramente depende do preço à vista, do tempo para a expiração do contrato e das reservas do produto, as quais são representadas pelo retorno de conveniência.

$$B(S,\delta,\tau) \quad (2)$$

Onde:

$B =$ Valor do derivativo.

Os parâmetros do modelo foram estimados através de dados semanais dos contratos futuros de petróleo, entre Janeiro de 1984 e Novembro de 1988. Artigos anteriores, BRENNAN E SCHWARTZ (1985) e PADDOCK, SIEGEL E SMITH (1988), costumavam considerar apenas uma fonte de incerteza, o preço à vista do barril de petróleo. No entanto, a consideração de que o *convinience yield* é uma espécie de dividendo da *commodity* mostrou-se extremamente realista (ver BRENNAN (1986) e FAMA E FRENCH (1987,1988)). O modelo foi representado pelas seguintes equações:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_1 dz_1 \quad (3)$$

$$d\delta = k(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dz_2 \quad (4)$$

Onde:

$dz_1 dz_2 = \rho dt$ (incrementos correlacionados)

$S$ = preço *spot.*

$\mu$ = *drift.*

$\sigma_1$ = volatilidade do MGB.

$k$ = taxa de reversão à média.

$\delta$ = retorno de conveniência.

$\alpha$ = tendência de longo prazo.

$\sigma_2$= volatilidade do MRM.

Os processos estocásticos apresentados acima são um movimento geométrico browniano (MGB) e um movimento de reversão à média (MRM). No capítulo três esses processos foram analisados mais profundamente. Neste momento só é preciso ter em mente, que um MGB é um processo que possui uma tendência exponencial no tempo e que o MRM apresenta uma tendência de reversão para uma média de longo prazo.

A equação (3) para a variação do preço à vista é baseada em argumentos de que o preço do barril possui uma distribuição de probabilidade LogNormal. O comportamento do preço é modelado através de uma distribuição LogNormal pelas características semelhantes entre o preço e a distribuição. Assim como a distribuição LogNormal, os preços não podem ser negativos. A distribuição LogNormal é assimétrica à direita, ou apresenta assimetria positiva, o comportamento dos preços também apresenta a média maior que a mediana, e a mediana maior que a moda. Em uma análise mais rigorosa deveriam ser realizados testes estatísticos que comprovassem que os preços podem ser modelados por distribuições LogNormais, no entanto neste texto assume-se isto como premissa. Portanto, as paridades citadas justificam a modelagem sugerida acima. A definição do MRM para o retorno de conveniência é justificada em artigo anterior dos mesmos autores GIBSON E SCHWARTZ (1989) no qual são encontradas fortes evidências empíricas para tal afirmação. Uma rápida explicação para o comportamento de reversão à média do retorno de conveniência pode ser feita pela suposição de que este tende a ser maior quando há escassez do produto, e menor na abundância. Nesse sentido, a ausência de produto no mercado faz com que a remuneração do investidor que armazena o produto suba, o que consequentemente aumenta o desejo por armazenar. Quando o volume armazenado cresce, o retorno de conveniência tende a cair, e desta forma se verifica o comportamento de reversão a uma tendência de longo prazo.

### 2.1.1. Aplicação do Lema de Itô ao Modelo

Através da teoria dos ativos contingentes baseada em argumentos de não arbitragem é possível encontrar uma equação diferencial em termos do derivativo, que no caso é um contrato futuro.

O procedimento para alcançar a equação de variação do contrato futuro encontra-se no Apêndice A. No entanto apresentam-se a seguir os resultados.

Definindo o derivativo como $B$ e sabendo que é função de $S,\ \delta$ e $\tau$, onde $\tau = T - t$. Aplicando o Lema de Itô obtém-se, para taxa de juros sem risco determinística e condições de mercado perfeito, a seguinte relação.

$$\frac{1}{2}B_{SS}S^2{\sigma_1}^2 + \frac{1}{2}B_{\delta\delta}\sigma_2^2 + B_{S\delta}S\rho\sigma_1\sigma_2 + B_S S(r-\delta) + B_\delta[k(\alpha-\delta) - \lambda\sigma_2] - B_\tau - rB = 0 \quad (5)$$

Sujeito à condição inicial de que (para um contrato futuro):

$F(S, \delta, 0) = S$

Onde:

$\lambda$= preço por unidade de risco da taxa de retorno de conveniência.

$F$ representa um contrato futuro.

Na seqüência do artigo é realizada a estimativa dos parâmetros dos processos estocástico do preço à vista e do retorno de conveniência. Depois é feita uma avaliação da capacidade do modelo em precificar contratos futuros. Por último os autores concluem que o modelo demonstrou-se capaz de valorar tanto instrumentos financeiros de curto prazo quanto contratos futuros de longo prazo, desde que o preço por risco do mercado, $\lambda$, esteja atualizado.

## 2.2. SCHWARTZ E SMITH (2000)

Neste artigo o modelo escolhido também foi de dois fatores estocásticos, porém as variáveis consideradas estocásticas foram um desvio de curto prazo e uma tendência de longo prazo. O desvio de curto prazo refere-se à diferença entre a tendência de longo prazo e o preço *spot*, já a tendência de longo prazo representa a tendência de evolução para o preço no longo prazo. As variáveis escolhidas são não observáveis, e foram estimadas através dos preços dos contratos futuros. Intuitivamente pode-se dizer que mudanças nos contratos futuros de longo prazo afetam a tendência de longo prazo e que alterações nas diferenças entre os contratos de curto e longo prazo afetam os desvios de curto prazo.

O modelo proposto, diferentemente de grande parte dos modelos propostos, ver BRENNAN (1991), não considera o retorno de conveniência como uma das variáveis estocásticas. No entanto, quando comparado como o modelo proposto em GIBSON E SCHWARTZ (1990), os modelos podem ser escritos como uma combinação linear um do outro. Desta forma, um importante aspecto citado no artigo é que apesar dos fatores estocásticos serem diferentes entre os artigos de GIBSON E SCHWARTZ (1990) e SCHWARTZ E SMITH (2000), no primeiro são o preço à vista e o retorno de conveniência e no segundo o desvio de curto prazo e a tendência de longo prazo, os dois modelos são equivalentes. No entanto, os autores justificam o desenvolvimento de um modelo com tais variáveis estocásticas pelo fato de que o conceito de retorno de conveniência não é muito claro para muitas pessoas. Por outro lado, desvio de curto-prazo e equilíbrio de longo-prazo são idéias mais consistentes, e por conta disso outros autores, como ROSS (1997) e PILOPOVIC (1998), também desenvolveram modelos nos quais os fatores também são interpretados como de curto-prazo e longo-prazo

O modelo escolhido em SCHWARTZ E SMITH (2000) assume um movimento geométrico browniano (MGB) para a evolução do preço de equilíbrio, levando em consideração expectativas de exaustão da oferta, evolução da tecnologia de produção e de exploração, inflação e questões políticas e regulatórias. Os desvios de curto prazo revertem para zero, seguindo um MRM também conhecido como processo de Ornstein-Uhlenbeck, eles representam, por exemplo, variações ocasionadas por mudanças climáticas, cortes de oferta, etc., e são afetados pela capacidade dos participantes do mercado em ajustarem os estoques às mudanças no mercado.

O fato de que o modelo desenvolvido é baseado em dois fatores estocásticos, desvios de curto prazo e tendência de longo prazo, que não são observáveis no mercado, favorecem a utilização de técnicas do Filtro de Kalman para estimar estas variáveis de estado. O procedimento de utilização do Filtro, neste artigo, será descrito nesta mesma seção mais a frente, porém para o algoritmo do Filtro de Kalman será reservado um capítulo em especial.

### 2.2.1.
### O Modelo Proposto

Passando da parte conceitual do modelo para a sua formulação matemática podemos escrever:

$$ln(S_t) = \chi_t + \xi_t \tag{6}$$

Onde:

$S_t$ = preço à vista da *commodity*

$\chi_t$ = desvio de curto prazo

$\xi_t$ = tendência de longo prazo

O modelo assume que $S_t$ têm uma distribuição LogNormal e, portanto, $ln(S_t)$ têm uma distribuição Normal, isso ocorre por causa da distribuição de $\chi_t$ e de $\xi_t$ serem Normais. As variáveis $\chi_t$ e $\xi_t$ possuem distribuições Normais porque as únicas variáveis aleatórias dos processos estocásticos são $dz_\chi$ e $dz_\xi$ que são incrementos aleatórios com distribuição Normal. O $ln(S_t)$ é formado pela soma de duas variáveis aleatórias Normais, portanto, possui distribuição Normal também. As variáveis estocásticas seguirão os seguintes processos estocásticos:

$$d\chi_t = -k\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi \tag{7}$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi \tag{8}$$

$$dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt \tag{9}$$

Onde:

$k$ = taxa de reversão à média

$\sigma_\chi$ = desvio padrão do desvio de curto prazo

$dz_\chi$ = incremento do processo browniano padrão do desvio de curto prazo

$\mu_\xi$ = tendência de crescimento da tendência de longo prazo

$\sigma_\xi$ = desvio padrão da tendência de longo prazo

$dz_\xi$ = incremento do processo browniano padrão da tendência de longo prazo

$\rho_{\chi\xi}$ = correlação entre os incrementos

As equações acima definem as variáveis de estado em termos de suas variações, mas deseja-se obter a evolução destas variáveis em termos absolutos. Desta forma, o vetor de valores esperados das distribuições Normais destas variáveis em função do tempo, assumindo $\chi_0$ e $\xi_0$ como valores inicias das variáveis, será dado por:

$$E[(\chi_t, \xi_t)] = \left[e^{-kt}\chi_0, \xi_0 + \mu_\xi t\right] \quad (10)$$

A demonstração de como chegar ao valor esperado do MRM e do MGB será feita no terceiro capítulo onde foram demonstradas algumas características dos processos estocásticos constantes nesta dissertação. No entanto, é possível constatar que o valor esperado do desvio de curto-prazo tende a zero quando o tempo tende a infinito, e que a velocidade em que ele vai a zero depende da constante $k$. O equilíbrio de longo prazo apresenta uma tendência proporcional ao tempo e à taxa de crescimento do processo. A matriz de variâncias e covariâncias destas distribuições Normais também será detalhada no próximo capítulo, por ora nos limitamos a enunciá-la para podermos descrever as características dos processos estocásticos.

$$Cov[(\chi_t, \xi_t)] = \begin{bmatrix} (1 - e^{-2kt})\frac{\sigma_\chi^2}{2k} & (1 - e^{-kt})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k} \\ (1 - e^{-kt})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k} & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix} \quad (11)$$

Onde o termo da primeira linha e primeira coluna representa a variância de $\chi_t$, os termos da primeira linha e segunda coluna e da segunda linha e primeira coluna representam a covariância entre $\chi_t$ e $\xi_t$ e o termo da segunda linha e segunda coluna representa a variância de $\xi_t$.

Como $ln(S_t) = \chi_t + \xi_t$, então $ln(S_t)$ também apresentará distribuição Normal com média e variância dados por:

$$E[ln(S_t)] = E[\chi_t + \xi_t] = E[\chi_t] + E[\xi_t] = e^{-kt}\chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t$$

Logo,

$$E[ln(S_t)] = e^{-kt}\chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t \quad (12)$$

Sabe-se que

$$Var[A + B] = Var[A] + Var[B] + 2Cov[A, B]$$

Então, aplicando às variáveis do modelo chega-se a

$$Var[ln(S_t)] = Var[\chi_t + \xi_t] = Var[\chi_t] + Var[\xi_t] + 2Cov[\chi_t, \xi_t]$$

$$Var[ln(S_t)] = (1 - e^{-2kt})\frac{\sigma_\chi^2}{2k} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-kt})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k} \quad (13)$$

Caso se queira obter o valor esperado e variância do preço à vista em função do tempo, deve-se utilizar a função geradora de momentos. Em HOEL, PORT E STONE (1971) a função geradora de momentos é enunciada conforme Apêndice

B. Aplicando a função geradora de momentos para o logaritmo do preço à vista é possível obter o logaritmo do valor esperado do preço à vista, e consequentemente o valor esperado do preço à vista.

$$ln\,(E[S_t]) = E[ln(S_t)] + \frac{1}{2}Var[ln(S_t)]$$

Substituindo pelos valores encontrados em (12) e (13):

$$ln\,(E[S_t]) = e^{-kt}\chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t +$$

$$\frac{1}{2}\left((1-e^{-2kt})\frac{\sigma_\chi^2}{2k} + \sigma_\xi^2 t + 2(1-e^{-kt})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k}\right) \tag{14}$$

## 2.2.2. Processo Neutro ao Risco

Um artifício muito utilizado para valorar contratos futuros é a transformação de um processo estocástico real em um processo estocástico neutro ao risco, conforme DUFFIE (1992) que apresenta uma ferramenta rigorosa de valoração neutra ao risco. Em SCHWARTZ (1995), o autor utiliza a penalização do processo por um prêmio de risco para então poder simular o processo neutro ao risco, o que é justificado pelo fato de que as variáveis de estado do modelo são precificadas de acordo com o *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* desenvolvido por MERTON (1973) e COX ET AL. (1985). Essa mudança de medida é realizada devido à dificuldade encontrada em determinar a taxa de desconto adequada ao risco. Neste sentido, o processo é dito neutro ao risco quando pode ser descontado no tempo pela taxa de desconto livre de risco, e seus fluxos de caixa são equivalentes aos fluxos de caixa reais diminuídos por um prêmio de risco.

Os processos estocásticos do modelo de SCHWARTZ E SMITH (2000) transformados em processos neutros ao risco são:

$$d\chi_t = (-k\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \tag{15}$$

$$d\xi_t = (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \tag{16}$$

$$dz_\chi^* dz_\xi^* = \rho_{\chi\xi}dt \tag{17}$$

Onde:

$\lambda_\chi$ = Prêmio de risco de curto prazo.

$\lambda_\xi$ = Prêmio de risco de longo prazo.

$dz_\chi^* =$ Incremento do processo browniano padrão do desvio de curto prazo no mundo neutro ao risco.

$dz_\xi^* =$ Incremento do processo browniano padrão da tendência de longo prazo no mundo neutro ao risco

Podemos observar que o desvio de curto prazo não reverte mais para zero e sim para $-\frac{\lambda_\chi}{k}$, e que a nova tendência do MGB é $\mu_\xi^* = \mu_\xi - \lambda_\xi$. Os novos valores do vetor de médias e da matriz de variâncias covariâncias serão:

$$E^*[(\chi_t, \xi_t)] = \left[e^{-kt}\chi_0 - (1 - e^{-kt})\frac{\lambda_\chi}{k}, \xi_0 + \mu_\xi^* t\right] \quad (18)$$

$$Cov^*[(\chi_t, \xi_t)] = Cov[(\chi_t, \xi_t)] \quad (19)$$

A maneira de se alcançar os resultados acima é semelhante à dos anteriores, a qual será demonstrada no próximo capítulo. Os asteriscos denotam valores esperados e variâncias referentes à medida neutra ao risco. O valor esperado e a variância do $ln(S_t)$ sob medida neutra ao risco será:

$$E^*[ln(S_t)] = E^*[\chi_t + \xi_t] = E^*[\chi_t] + E^*[\xi_t]$$

$$E^*[ln(S_t)] = e^{-kt}\chi_0 - (1 - e^{-kt})\frac{\lambda_\chi}{k} + \xi_0 + \mu_\xi^* t \quad (20)$$

$$Var^*[ln(S_t)] = Var[ln(S_t)] \quad (21)$$

Comparando as equações (20) e (21) com as dos processos com medidas reais, a diferença são os termos $-(1 - e^{-kt})\frac{\lambda_\chi}{k}$ e $-\lambda_\xi t$ o que vai ao encontro da teoria que diz que o processo neutro ao risco possui sua tendência penalizada em relação ao processo real.

O próximo desafio é valorar o contrato futuro, já que o valor esperado e a variância do preço à vista em função do tempo já foi determinado. Considerando $F_{T,0}$ como o valor do contrato futuro que expira em $T$ no tempo zero, e sabendo que através da ferramenta de valoração neutra ao risco o valor deste contrato é igual ao valor esperado do preço à vista em $T$, podemos escrever o valor do contrato futuro como:

$$ln\left(F_{T,0}\right) = ln(E^*[S_T]) \quad (22)$$

Pode-se demonstrar conforme Apêndice B que:

$$ln\left(F_{T,0}\right) = ln(E^*[S_T]) = E^*[ln(S_T)] + \frac{1}{2}Var^*[ln(S_t)]$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente para o valor esperado e a variância na medida de martingale equivalente

$$ln(F_{T,0}) = e^{-kT}\chi_0 + \xi_0 + A(T) \tag{23}$$

Onde:

$$A(T) = \mu_\xi^* T - (1 - e^{-kT})\frac{\lambda_\chi}{k} + \frac{1}{2}((1 - e^{-2kT})\frac{\sigma_\chi^2}{2k} + \sigma_\xi^2 T + 2(1 - e^{-kT})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k})$$

### 2.2.3. Aplicando o Filtro de Kalman ao Modelo

Através das relações acima os autores seguem para a estimação das variáveis de estado, o desvio de curto prazo e a tendência de longo prazo, e dos parâmetros do modelo. Nesta fase foi utilizado o Filtro de Kalman sem, no entanto, haver uma preocupação em explicitar exaustivamente seu funcionamento, o que será feito no capítulo quatro, especialmente dedicado ao Filtro de Kalman.

A equação de transição, responsável pela atualização das variáveis de estado, será dada por:

$$\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{\phi x_{t-1}} + \boldsymbol{G v_t} \tag{24}$$

$t = 1, \ldots, n_T$

Obs.: As variáveis em negrito representam vetores quando minúsculas e matrizes quando maiúsculas.

Onde $\boldsymbol{x_t}$ é o vetor de variáveis de estado, $\boldsymbol{\phi}$ é a matriz de atualização do vetor de estado no tempo, $\boldsymbol{v_t}$ é um vetor de erros aleatórios e $\boldsymbol{G}$ é uma matriz de atualização destes ruídos.

Aplicando ao modelo proposto, e discretizando as equações dos processos estocásticos referentes às variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix}\chi_t \\ \xi_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ \mu_\xi \Delta t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e^{-k\Delta t} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_{t-1} \\ \xi_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v_{1t} \\ v_{2t}\end{bmatrix} \tag{25}$$

$t = 1, \ldots, n_T$

Onde:

$Var[\boldsymbol{v_t}] = \boldsymbol{Q} \equiv Cov[(\chi_{\Delta t}, \xi_{\Delta t})]$

$$Cov[(\chi_{\Delta t}, \xi_{\Delta t})] = \begin{bmatrix}(1 - e^{-2kt})\frac{\sigma_\chi^2}{2k} & (1 - e^{-kt})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k} \\ (1 - e^{-kt})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k} & \sigma_\xi^2 t\end{bmatrix} \tag{26}$$

$\Delta t$ = tamanho da discretização do tempo

$n_T$ = número de períodos de dados

A equação (25) permite observar que o equilíbrio de longo-prazo apresenta uma tendência igual a $\mu_\xi^*$ a cada período, acrescida de um distúrbio aleatório $v_{2t}$ que possui características dadas pela equação (26). O desvio de curto-prazo apresenta uma tendência de reversão à média dada por $e^{-k\Delta t}$.

A outra equação do Filtro de Kalman é conhecida como Equação de Medida. Ela explicita a relação entre as variáveis observáveis e as variáveis não observáveis. No modelo do artigo as variáveis observáveis em cada tempo são os contratos futuros com diferentes prazos para sua expiração. A Equação de Medida será representada por:

$$\boldsymbol{z_t} = \boldsymbol{H_t x_t} + \boldsymbol{u_t} \tag{27}$$

Aplicando ao modelo proposto:

$$\begin{bmatrix} ln\, F_{T_1} \\ \vdots \\ ln\, F_{T_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T_1) \\ \vdots \\ A(T_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-kT_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-kT_n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Onde:

$\boldsymbol{u_t} \equiv \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{bmatrix}$ = vetor serialmente descorrelacionado, normalmente distribuído e com $E[\boldsymbol{u_t}] = \boldsymbol{0}$ e $Cov[\boldsymbol{u_t}] = \boldsymbol{R}$.

Para um contrato futuro, por exemplo, aquele que expira um mês à frente, a equação (28) acima seria determinada da seguinte maneira

$$ln\, F_{T_1} = e^{-kT_1}\chi_t + \xi_t + \mu_\xi^* T_1 - (1 - e^{-kT_1})\frac{\lambda_\chi}{k} + \frac{1}{2}\left((1 - e^{-2kT_1})\frac{\sigma_\chi^2}{2k} + \sigma_\xi^2 T_1 + 2(1 - e^{-kT_1})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{k}\right) + u_{1t}$$

Na equação acima o logaritmo do contrato futuro é relacionado com o prazo para expiração $T_1$, com as variáveis de estado e uma constante que também depende do tempo para maturação do contrato.

A única variável introduzida no Filtro de Kalman, além das determinadas anteriormente na construção do modelo, é o erro de medida ($u_{1t}$).

Inicia-se o processo de estimativa através de uma distribuição preliminar para as variáveis de estado $[\chi_0, \xi_0]$, a qual se supõe ter um vetor de média $\boldsymbol{x}_0$ e uma matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{P}_0$. A cada período subseqüente roda-se o Filtro recursivamente, sempre calculando, através do vetor de variáveis observáveis, do vetor prévio de médias das variáveis de estado e da sua matriz de variâncias e covariâncias, as distribuições posteriores das variáveis de estado. As relações do vetor de médias e da matriz de variâncias e covariâncias utilizando toda a informação até o tempo $t$, serão atualizadas através das equações a seguir.

As equações de correção no tempo são definidas como:

$$\boldsymbol{K_t} = \boldsymbol{P_{t^-}} \boldsymbol{H'_t} [\boldsymbol{H_t} \boldsymbol{P_{t^-}} \boldsymbol{H'_t} + \boldsymbol{R_t}]^{-\mathbf{1}} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{P_{t^+}} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K_t} \boldsymbol{H_t}] \boldsymbol{P_{t^-}} \quad (30)$$

$$\boldsymbol{x_{t^+}} = \boldsymbol{x_{t^-}} + \boldsymbol{K_t} [\boldsymbol{z_t} - \boldsymbol{H_t} \boldsymbol{x_{t^-}}] \quad (31)$$

As equações de atualização no tempo do algoritmo do Filtro de Kalman são:

$$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{t+1})^-} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{P_{t^+}} \boldsymbol{\phi'} + \boldsymbol{GQG'} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{t+1})^-} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{x_{t^+}} \quad (33)$$

O vetor previsto de médias das variáveis de estado $\boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{t+1})^-}$ e a matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{t+1})^-}$ são baseados no que é conhecido até o tempo $t$. O vetor de médias das variáveis observáveis $\boldsymbol{H_t x_{t^-}}$ é a previsão para o período $t$, baseadas nas informações de $t - 1$. A matriz $\boldsymbol{K_t}$, conhecida como Ganho de Kalman, define uma correção para a previsão $\boldsymbol{x_{t^-}}$ baseada na diferença entre o logaritmo dos contratos futuros e a previsão para o tempo $t$.

A estimação das variáveis de estado é feita rodando-se o Filtro algumas vezes. A variância das variáveis de estado irá tender assintoticamente a um valor, independentemente da sequência de preços observados e da distribuição escolhida a priori para as variáveis de estado. Isso indicará que os valores ótimos das variáveis de estado foram encontrados pelo algoritmo do Filtro.

O algoritmo do Filtro de Kalman também pode calcular os valores dos parâmetros do modelo se paralelamente a ele for introduzido um algoritmo de maximização da verossimilhança. O procedimento consiste na variação dos parâmetros e re-rodagem do Filtro de Kalman, calcula-se então a verossimilhança do modelo com os parâmetros escolhidos para cada rodada e, assim, procuram-se quais parâmetros são mais adequados àqueles dados.

No caso deste modelo há sete parâmetros que devem ser estimados por esse processo $\left(k, \sigma_\chi, \mu_\xi, \sigma_\xi, \rho_{\chi\xi}, \lambda_\chi, \mu_\xi^*\right)$, além dos termos da matriz de variâncias e covariâncias dos erros de medida $(\boldsymbol{R})$.