2
Reticulados e empacotamento esférico

Alguns grupos de Coxeter têm a propriedade notável de que seu sistema de raízes gera um reticulado. Este é o caso dos grupos $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{E}_7$ e $\mathbf{E}_6$ e desta maneira podemos ver de forma mais clara do que no capítulo anterior a sua construção.

2.1
Reticulados

Definição 2.1 *Seja $\beta = \{v_1, ..., v_m\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ com $m \leq n$. Chamamos de reticulado de dimensão m o conjunto do $\mathbb{R}^n$ da forma*

$$\Lambda_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x = \sum a_i v_i, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

O conjunto β é a base deste reticulado.

Observação 2.2 *Note que um reticulado Λ_β é um subgrupo aditivo de $(\mathbb{R}^n, +)$. Em particular, a soma ou a diferença de quaisquer dois vetores do reticulado ainda é um vetor do reticulado.*

Observação 2.3 *Note também que Λ_β é um conjunto discreto, ou seja, para qualquer compacto K de $\mathbb{R}^n$, temos que $\Lambda_\beta \cap K$ é finito.*

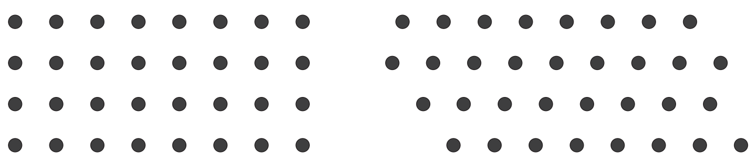

Figura 2.1: Reticulados em $\mathbb{R}^2$

Definição 2.4 *Seja $\Lambda_\beta \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado com base $\beta = \{v_1, ..., v_m\}$ e $m \leq n$. O conjunto*

$$P_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x = \sum \lambda_i v_i, 0 \leq i < 1\}$$

é chamado de domínio fundamental ou região fundamental de Λ_β com relação a base β.

Exemplo 5 *Seja* $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^2$*. O reticulado gerado por* β *é o conjunto* $\Lambda_\beta = \{a(1,0)+b(0,1)\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}\} = \{(a,b)\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$ *e o domínio fundamental* P_β *é o quadrado unitário* $[0,1)^2$.

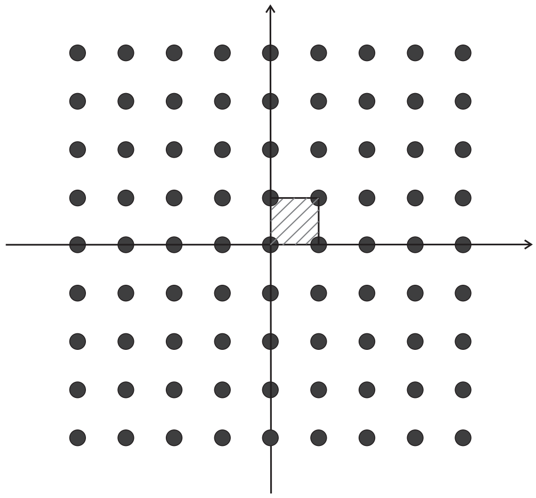

Figura 2.2: Reticulado $\mathbb{Z}^2$ e seu domínio fundamental

Note que há diversas formas de se escolher uma base e um domínio fundamental para o reticulado, mas o volume da região fundamental é unicamente determinado por Λ. De fato, uma matriz de mudança de base deve ser invertível no conjunto das matrizes com coeficientes inteiros, donde seu determinante é igual a ± 1.

Definição 2.5 *Sejam* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *um reticulado e* $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ *uma base deste reticulado. Se* $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in})$ *para* $i = 1, ..., n$*, chamamos de matriz geradora do reticulado* Λ *a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ . \quad . & & . \\ . & . & . \\ . & & . \quad . \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

Assim, com as mesmas hipóteses da definição 2.1, podemos descrever o reticulado como sendo

$$\Lambda = \{\lambda M\ ;\ \lambda \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Definição 2.6 *A matriz* $A = MM^{\perp}$ *é chamada de Matriz de Gram do reticulado* Λ*.*

Definição 2.7 *Definimos o determinante de um reticulado* Λ *como sendo*

$$\det \Lambda = \det A = (\det M)^2 = (vol(P_\beta))^2.$$

2.2 Empacotamento reticulado

Definição 2.8 *Um empacotamento esférico em* $\mathbb{R}^n$ *é uma distribuição de esferas de mesmo raio* ρ *no* $\mathbb{R}^n$ *de forma que a interseção entre quaisquer duas esferas tenha no máximo um ponto.*

Definição 2.9 *Um empacotamento reticulado é um empacotamento esférico em que o conjunto dos centros das esferas formam um reticulado* Λ *no* $\mathbb{R}^n$*.*

Pela definição acima vimos que podemos descrever um empacotamento esférico apenas conhecendo o centro e o raio das esferas. E além disto, se u e v são centros de esferas, então também há esferas com centros $u+v$ e $u-v$, isto é, o conjunto de centros forma um conjunto aditivo.

Definição 2.10 *A densidade do reticulado é a proporção do espaço que é ocupado por esferas , isto é, é a razão entre o volume da uma esfera e o volume da região fundamental. Mais precisamente, temos*

$$\Delta = \frac{V_n}{(\det \Lambda)^{1/2}}$$

onde $V_n = \dfrac{\rho^n \pi^{n/2}}{(n/2)!}$ *é o volume de uma esfera n-dimensional de raio* ρ*.*

Definição 2.11 *A densidade dos centros é dada por*

$$\delta = \frac{\Delta}{V_n} = \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda}}.$$

Para $\delta = 1$*,* δ *é o número médio de centros por unidade de volume.*

Em um empacotamento há lacunas entre as esferas; alguns pontos destas lacunas são chamados de buracos:

Definição 2.12 *Um buraco de* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *é um máximo local da função*

$$d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2-1}$$

$$v \mapsto \min_{w \in \Lambda} \| v - w \| \tag{2-2}$$

Definição 2.13 *Um buraco fundo é um máximo global da função descrita acima.*

Definição 2.14 *O raio de recobrimento é a distância do ponto do reticulado a um buraco fundo.*

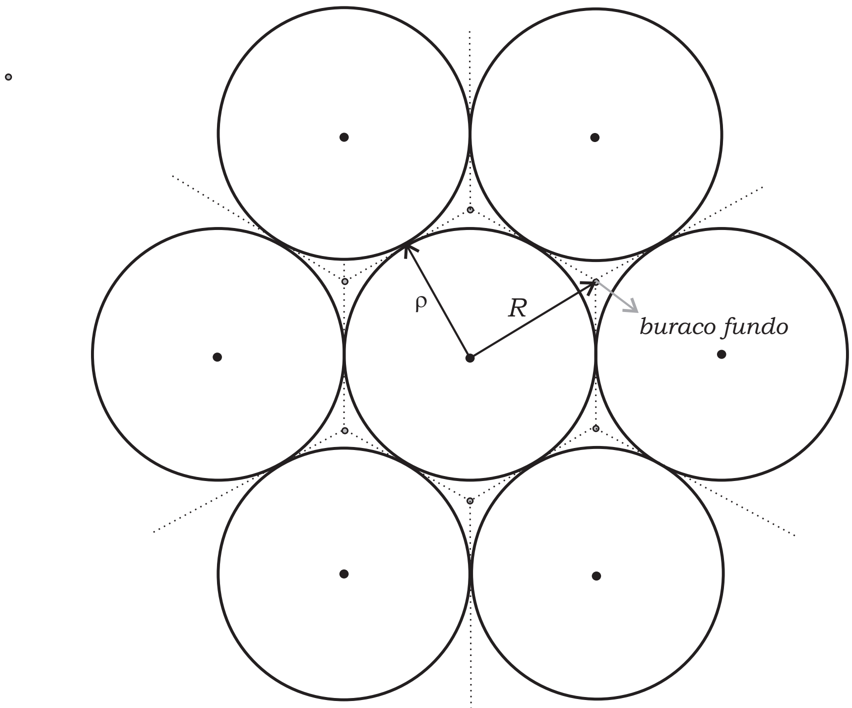

Figura 2.3: Empacotamento num reticulado hexagonal

2.3 Os reticulados $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ e $\mathbf{D}_n$

O reticulado $\mathbf{A}_n$ é representado pelo diagrama de Coxeter-Dynkin abaixo

Figura 2.4: $\mathbf{A}_n$

E descrito pelo conjunto

$$\mathbf{A}_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\ ;\ \sum x_i = 0\}$$

Note que usamos $n+1$ coordenadas neste reticulado, que é de dimensão n. E uma base para este reticulado pode ser construída pelos vetores

$$v_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, -1, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, v_n = (0, 0, \cdots, -1, 1)$$

já que $\langle v_i, v_{i+1}\rangle = -1$ para $i = 1, \ldots, n-1$ e além disso, quaisquer dois geradores que não estejam ligados por uma aresta formam um ângulo reto neste reticulado.

Seja W o grupo de reflexão gerado por

$$R_i w = w - 2\frac{\langle v_i, w\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} R_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ R_2(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (x_1, x_3, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &\vdots \\ R_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (x_1, x_3, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

Logo, R_i troca as coordenadas x_i e x_j, e W é o grupo S_{n+1}, o grupo das permutações de $n+1$ elementos e W também pode ser visto como o grupo de simetrias de um hiper-tetraedro.

O reticulado $\mathbf{B}_n$ é descrito pelo diagrama de Coxeter-Dynkin abaixo

Figura 2.5: $\mathbf{B}_n$

Este reticulado é gerado pelos $n-1$ vetores da forma

$$v_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, -1, \cdots, 0), \cdots, v_{n-1} = (0, 0, \cdots, 1, -1)$$

e para completarmos esta base usaremos o vetor $v_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$, que satisfaz as condições do seu diagrama de Coxeter-Dynkin
Assim, $\mathbf{B}_n$ é o conjunto formado por todos os vetores com norma mínima igual a 1 ou 2.

Seu grupo de reflexões é gerado por

$$\begin{aligned} R_1(x_1, \ldots, x_n) &= (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ R_2(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, x_3, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ R_n(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, x_3, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n) \end{aligned}$$

que é o grupo das permutações de n elementos com sinais. Este grupo também pode ser visto como o grupo das simetrias do hiper-cubo.

Agora considere o reticulado $\mathbf{D}_n$ em $\mathbb{Z}^n$ dos vetores v tais que a soma das coordenadas é par. Logo, $\mathbf{D}_n$ é descrito pelo conjunto

$$\mathbf{D}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \ ; \ \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\}$$

Este reticulado é gerado pelos $n-1$ vetores da forma

$$v_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0), v_2 = (0, 1, -1, \cdots, 0), \cdots, v_{n-1} = (0, 0, \cdots, 1, -1)$$

e para completarmos esta base usaremos o vetor $v_n = (0, 0, \cdots, 1, 1)$, que satisfaz as condições do seguinte diagrama de Coxeter-Dynkin

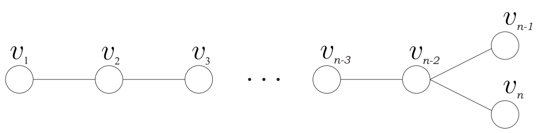

Figura 2.6: $\mathbf{D}_n$

Isto é,

- $\langle v_i, v_i \rangle = 2$, para todo $i = 1, \ldots, n$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = -1, \langle v_1, v_i \rangle = 0$, para todo $i > 2$
- $\langle v_2, v_3 \rangle = -1, \langle v_2, v_i \rangle = 0$, para todo $i > 3$
- $\langle v_{n-2}, v_{n-1} \rangle = \langle v_{n-2}, v_n \rangle = -1$
- $\langle v_n, v_{n-1} \rangle = 0$

Seja o grupo de reflexão gerado por

$$\begin{aligned} R_1(x_1, \ldots, x_n) &= (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ R_2(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, x_3, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ R_n(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, -x_n, -x_{n-1}) \end{aligned}$$

Estas reflexões geram o grupo $\mathbf{D}_n$, que é o grupo das permutações com número par de sinais de menos. Geometricamente, este é o grupo das simetrias do hiper-cubo sendo que pintamos os vértices em duas cores de forma alternada.

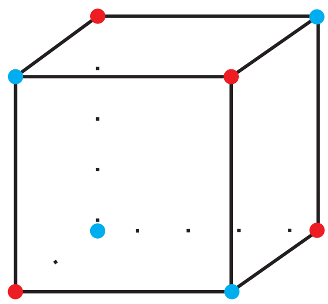

Figura 2.7: Cubo com vértices alternados em duas cores

2.4 O reticulados E_8

Existem diversas formas possíveis para obtermos um conjunto de geradores para o reticulado $\mathbf{E}_8$. Vamos apresentar algumas delas:

1º sistema de coordenadas de $\mathbf{E}_8$ - versão par

Considere em $\mathbb{R}^8$ o reticulado $\mathbf{D}_8$, isto é, vetores em $\mathbb{Z}^8$ com a soma das coordenadas sendo par. Sendo assim, os vetores deste reticulado são:

$$\begin{gathered}
v_1 = (1,-1,0,0,0,0,0,0)\ ,\ v_2 = (0,1,-1,0,0,0,0,0),\\
v_3 = (0,0,1,-1,0,0,0,0)\ ,\ v_4 = (0,0,0,1,-1,0,0,0),\\
v_5 = (0,0,0,0,1,-1,0,0)\ ,\ v_6 = (0,0,0,0,0,1,-1,0),\\
v_7 = (0,0,0,0,0,0,1,-1)\ ,\ v_8 = (0,0,0,0,0,0,1,1).
\end{gathered}$$

Note que $\mathbf{D}_8$ tem as seguintes propriedades:

– $\forall v_1, v_2 \in \mathbf{D}_8, \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{Z}$,

– $\forall v \in \mathbf{D}_8, \langle v, v\rangle \in 2\mathbb{Z}$.

É possível aumentar $\mathbf{D}_8$, acrescentando por exemplo o vetor $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, preservando todas estas propriedades. Desta forma, $\mathbf{E}_8 = \mathbf{D}_8 \cup (\mathbf{D}_8 + (\frac{1}{2})^8)$. Assim, um vetor pertence a este reticulado se e somente se suas coordenadas são inteiras ou todas são da forma $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ e a soma das coordenadas é par.

Em outras palavras, podemos definir o reticulado neste sistema como sendo o conjunto

$$\mathbf{E}_8 = \{x \in \mathbb{R}^8\ ;\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}, \textstyle\sum x_i \equiv 0 \pmod 2\}$$

1º sistema de coordenadas de $\mathbf{E}_8$ - versão ímpar

O sistema de coordenadas ímpares é obtido trocando o sinal de qualquer coordenadas. Um vetor pertence a este reticulado se e somente se suas coordenadas são inteiras e a soma das coordenadas é par ou são todas da forma $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ sendo a soma destas, ímpar.

Logo, podemos definir o reticulado neste sistema como sendo o conjunto

$$\mathbf{E}_8 = \{x \in \mathbb{R}^8\ ;\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}, \textstyle\sum x_i \equiv 2x_1 \pmod 2\}$$

2º sistema de coordenadas de $\mathbf{E}_8$

Considerando agora o espaço vetorial $(\mathbb{Z}/(2))^3$ sobre $\mathbb{Z}/(2)$, com os 8 elementos:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

Temos 14 subconjuntos de $(\mathbb{Z}/(2))^3$, que são os hiperplanos, isto é, subspaços translados de codimensão igual a 1, como por exemplo $W_0 = \{000, 001, 010, 011\}$. Estes subconjuntos têm as seguintes propriedades:

- Para todo subconjunto, existe um único subconjunto disjunto, a saber, o complemento (planos paralelos).
- Dados dois subconjuntos distintos e não disjuntos, a interseção tem exatamente dois elementos (uma reta).
- A diferença simétrica de dois conjuntos é $\emptyset$ (planos iguais), $(\mathbb{Z}/(2))^3$ (planos paralelos) ou um dos 14 planos.

O reticulado $\mathbf{E}_8$, neste sistema de coordendadas, é dado interpretando as posições do vetor como elementos de $(\mathbb{Z}/(2))^3$, e este tem as seguintes propriedades:

- $\forall v_1, v_2 \in \mathbf{E}_8, \langle v_1, v_2 \rangle \in 2\mathbb{Z}$.
- $\forall v \in \mathbf{E}_8, \langle v, v \rangle \in 4\mathbb{Z}$.

Sendo assim, esse sistema de coordenadas é constituído por pontos da forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{R}^8$, tal que

$$x_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \{i\ ;\ x_i \in 2\mathbb{Z}\} = \begin{cases} \emptyset, \text{ou} \\ (\mathbb{Z}/(2))^3, \text{ou} \\ \text{um dos 14 hiperplanos.} \end{cases}$$

A partir de agora, apresentaremos características importantes de $\mathbf{E}_8$.

Vetores da base de $\mathbf{E}_8$

Vamos relacionar o 1º sistema de coordendas - versão ímpar,

$$\mathbf{E}_8 = \{x \in \mathbb{R}^8\ ;\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}, \sum x_i \equiv 2x_1 \pmod 2\}$$

com o diagrama de Coxeter-Dynkin

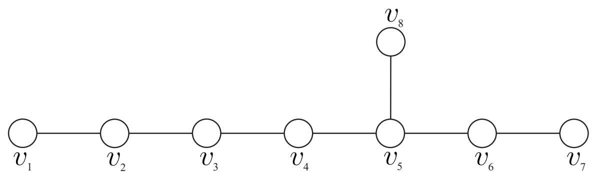

Figura 2.8: $\mathbf{E}_8$

visto no capítulo anterior. Cada vértice é um elemento do reticulado e este diagrama pode nos dar informações sobre os ângulos formados pelos vetores da base do $\mathbf{E}_8$. Podemos observar pelo diagrama que v_1 e v_2 formam um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$, já que $m(v_1, v_2) = 3$. Além disso, v_1 deve formar um ângulo reto com os demais vetores da base, já que $m(v_1, v_i) = 2$, para $i \in \{3, ..., 8\}$. O mesmo ocorre com as duplas de vetores que estão ligadas pela aresta neste diagrama, isto é, $m(v_2, v_3) = m(v_3, v_4) = m(v_4, v_5) = m(v_6, v_7) = m(v_8, v_5) = 3$, e já as duplas que não estão ligadas por uma aresta, formam um ângulo reto entre eles. Imitando a construção de A_7 podemos tomar os 7 primeiros vetores como $v_1 = (-1, 1, 0^6)$, $v_2 = (0, -1, 1, 0^5)$, $v_3 = (0^2, -1, 1, 0^4)$, $v_4 = (0^3, -1, 1, 0^3)$, $v_5 = (0^4, -1, 1, 0^2)$, $v_6 = (0^5, -1, 1, 0)$ e $v_7 = (0^6, -1, 1)$, pois $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1$, para $i \in \{1, ..., 6\}$ e $\|v_i\| = \sqrt{2}$, o que nos diz que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e portanto, $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$, como desejado.

O oitavo vetor forma um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com v_5, pois $m(v_8, v_5) = 3$ e além disso, este também forma um ângulo reto com os demais. Então, uma boa escolha é o vetor da forma $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, já que $\langle v_8, v_5 \rangle = -1$ e $\langle v_8, v_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7$.

Além disso, podemos perceber que cada um destes vetores pertecem ao reticulado, e como são 8 vetores linearmente independentes, os vetores $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ como descritos acima, formam uma base para o reticulado $\mathbf{E}_8$.

É possível adaptarmos a base anterior para a versão par deste sistema de coordenadas. Se trocarmos um número ímpar de sinais das coordenadas de v_8, para obtermos por exemplo o vetor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Observe que os vetores $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ainda formam com v_8 os ângulos pedidos, e se tomarmos $v_7 = (0^6, 1, 1)$, vemos que este também satisfaz todas as propriedades pedidas.

Matriz Geradora de $\mathbf{E}_8$

Uma matriz geradora para $\mathbf{E}_8$ é

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Outra matriz geradora, obtida por escalonamento, é

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E como esta é uma matriz triangular, não é difícil ver que seu determinante é igual a 1.

Densidades de $\mathbf{E}_8$

A densidade do reticulado $\mathbf{E}_8$, que é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, é igual a $\frac{\pi^4}{384} \cong 0.2537...$, a densidade dos centros é igual a $\frac{1}{16}$. Além disso o centro das esferas são os pontos do reticulado, sendo assim, o raio de cada esfera é dado pela metade da distância entre o centro de duas esferas vizinhas, ou seja, o raio é igual a metade da norma mínima, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vetores de norma mínima de $\mathbf{E}_8$

Os vetores de $\mathbf{E}_8$ com norma mínima igual a 2 são da forma:

– $(\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, onde as coordenadas não-nulas são permutadas. Devemos escolher duas posições e com a troca de sinal, obtemos um total de $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 4 = 112$ vetores

– $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$, onde escolhemos livremente 7 sinais e o oitavo fica determinado, o que resulta em $2^7 = 128$ vetores deste tipo.

Assim, $\mathbf{E}_8$ tem no total 240 vetores com norma mínima 2.

Veremos no próximo capítulo que estes 240 vetores são os vértices de um politopo semiregular, chamado politopo de Gosset de dimensão 8; dois estes vértices são ligados por uma aresta, se a distância entre eles for mínima.

Empacotamento de $\mathbf{E}_8$

O número de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho é igual a 240. O raio destas esferas é o maior possível para que possamos distribui-las de forma que fiquem centradas nos pontos do reticulado de $\mathbf{E}_8$ e obter um empacotamento. Além disso, o raio de recobrimento é igual a $\rho\sqrt{2} = 1$.

Existem dois tipos de buracos. Os buracos fundos que são pontos da forma $(1, 0^7)$, que são cercados por 16 pontos do reticulado e os buracos rasos que são pontos do tipo $((\frac{1}{6})^7, \frac{5}{6})$, cercados por 8 pontos do reticulado.

2.5
Os reticulados $\mathbf{E}_7$ e $\mathbf{E}_6$

Os reticulados $\mathbf{E}_7$ e $\mathbf{E}_6$ são subconjuntos de $\mathbf{E}_8$, assim podemos descrevê-los de acordo com a escolha de um dos sistemas de coordenadas de $\mathbf{E}_8$.

Sistemas de coordenadas de $\mathbf{E}_7$

O reticulado $\mathbf{E}_7$ consiste dos vetores de $\mathbf{E}_8$ que são perpediculares a qualquer vetor de norma mínima v que pertença a $\mathbf{E}_8$.

$$\mathbf{E}_7 = \{x \in \mathbf{E}_8 \ ; \ \langle x, v\rangle \ = 0, v \in \mathbf{E}_8\}$$

Considere o sistema de coordenadas par de $\mathbf{E}_8$ e tomando $v = ((\frac{1}{2})^8)$, assim obtemos:

$$\mathbf{E}_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbf{E}_8 \ ; \ \sum x_i = 0\}$$

E pelo sistema de coordenadas ímpar de $\mathbf{E}_8$ e tomando $v = ((\frac{1}{2})^7, -\frac{1}{2})$, obtemos:

$$\mathbf{E}_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbf{E}_8 \ ; \ \sum x_i = 2x_8\}$$

Ou em qualquer sistema de coordenadas, tomando $v = (0^6, 1, -1)$, temos:

$$\mathbf{E}_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbf{E}_8 \ ; \ x_7 = x_8\}$$

Vetores da base de $\mathbf{E}_7$

Como podemos ver, $\mathbf{E}_7$ é um subconjunto de $\mathbf{E}_8$, sendo assim, não é difícil obtermos uma base para este reticulado.

Pelo diagrama de Coxeter-Dynkin de $\mathbf{E}_7$

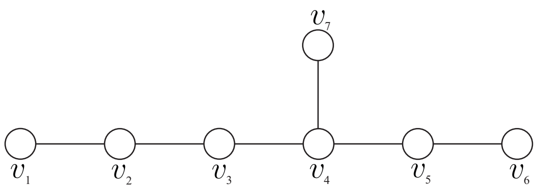

Figura 2.9: $\mathbf{E}_7$

podemos perceber as relações entre os ângulos dos geradores deste reticulado. Neste conjunto temos 7 geradores, digamos, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$, e assim como em $\mathbf{E}_8$, o ângulo formado por v_1 e v_2 é igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$, e o ângulo entre v_1 e os demais vetores deve ser reto. E de forma análoga podemos ver as relações entre os outros pares de vetores deste conjunto.

Se considerarmos o sistema de coordenadas par de $\mathbf{E}_8$, não fica difícil perceber quais são os 6 primeiros geradores de $\mathbf{E}_7$. Se tomarmos $w = ((\frac{1}{2})^8)$, os vetores da forma $v = (-1, 1, 0^6)$ são todos perpediculares a w e obedecem os ângulos pedidos, isto é, $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1$ para $i \in \{1, ..., 5\}$.

Sendo assim, só nos resta saber quem seria o sétimo gerador, o que também não fica difícil de se perceber que como este vetor pertence a $\mathbf{E}_8$ e deve formar um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com o vetor v_4, e deve ter ângulo reto com os demais, além de também ser perpedicular ao $w = ((\frac{1}{2})^8)$. Logo, o melhor candidato é o vetor $v_7 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Note que estes 7 vetores pertecem a $\mathbf{E}_7$, isto é, são vetores de $\mathbf{E}_8$ cujas somas das coordenadas são nulas e todos são perpediculares a w. Além disso, como estes vetores são linearmente independentes, estes formam então uma base para o reticulado $\mathbf{E}_7$.

Matriz Geradora de $\mathbf{E}_7$

A matriz geradora de $\mathbf{E}_7$ é a matriz cujas as linhas são os vetores da base, a saber:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Densidades de $\mathbf{E}_7$

A densidade de $\mathbf{E}_7$, que é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, é igual a $\frac{\pi^3}{105} \cong 0.2953...$, já a densidade dos centros é igual a $\frac{1}{16}$.

Vetores de norma mínima de $\mathbf{E}_7$

Os vetores de $\mathbf{E}_7$ com norma mínima igual a 2 são da forma:

– $(-1, 1, 0^6)$, onde as coordenadas não-nulas são permutadas, então obtemos um total de $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 56$ vetores

– $((\dfrac{1}{2})^4, (\dfrac{-1}{2})^4)$, onde o sinal de quatro coordenadas deve ser negativo e o sinal das outras 4 deve ser positivo e então resulta em 70 vetores deste tipo.

Assim, $\mathbf{E}_7$ tem no total de 126 vetores com norma mínima 2.

Empacotamento de $\mathbf{E}_7$

O número de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho é igual a 126. Além disso o centro das esferas são os pontos do reticulado, sendo assim, o raio de cada esfera é dado pela metade da distância entre o centro de duas esferas vizinhas, ou seja, o raio é igual a metade da norma mínima, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Além disso, o raio de recobrimento é igual a $\rho\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. E os buracos fundos são pontos da forma $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Os vetores de $\mathbf{E}_8$ perpendiculares a qualquer $\mathbf{A}_2$-subreticulado V em $\mathbf{E}_8$ formam os vetores que pertencem ao reticulado $\mathbf{E}_6$.

Sistemas de coordenadas de $\mathbf{E}_6$

$$\mathbf{E}_6 = \{x \in \mathbf{E}_8 \; ; \; \langle x, v\rangle = 0, \; \forall v \in V\}$$

Da mesma forma que em $\mathbf{E}_7$, temos diversas possibilidades para o sistema de coordendas de $\mathbf{E}_6$, como por exemplo, pelo sistema par de coordenadas de $\mathbf{E}_8$ e tomando $v = \langle (1, 0^6, 1), (\frac{1}{2}^8)\rangle$, obtemos:

$$\mathbf{E}_6 = \{x \in \mathbf{E}_8 \; ; \; x_1 + x_8 = x_2 + ... + x_6 = 0\}$$

E em ambos sistemas de coordenadas, se tomarmos $v = \langle (0^5, 1, -1, 0), (0^6, 1, -1)\rangle$, obtemos:

$$E_6 = \{x \in \mathbf{E}_8 \; ; \; x_6 = x_7 = x_8\}.$$

Vetores da base de $\mathbf{E}_6$

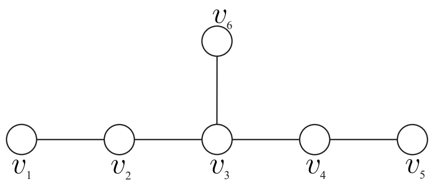

Figura 2.10: $\mathbf{E}_6$

Como $\mathbf{E}_6 \subset \mathbf{E}_8$ podemos considerar o sistema de coordenadas par de $\mathbf{E}_8$ e relacioná-lo ao diagrama de Coxeter-Dynkin de $\mathbf{E}_6$. Desta forma, podemos escolher o primeiro vetor como sendo $v_1 = (0, -1, 1, 0^6)$. Este vetor deve formar um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com o segundo vetor, e o ângulo entre v_1 e os demais vetores deve ser reto. E de forma análoga podemos ver as relações entre 4 seguintes vetores deste conjunto. Desta maneira, podemos considerar os vetores $v_1 = (0, -1, 1, 0^6), v_2 = (0^2, -1, 1, 0^5), v_3 = (0^3, -1, 1, 0^3), v_4 = (0^4, -1, 1, 0^2), v_5 = (0^5, -1, 1, 0)$, são boas escolhas, já que estes pertecem a $\mathbf{E}_6$ e satisfazem aos ângulos pedidos.

O último vetor, deve formar um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com v_3 e deve ter ângulo reto com os demais. Logo, o melhor candidato é o vetor $v_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Estes 6 vetores pertecem a $\mathbf{E}_6$, isto é, são vetores de $\mathbf{E}_8$, cujas somas das primeira e última coordenadas são iguais a soma das demais e resultando em zero. Além disso, como estes vetores são linearmente independentes, estes formam então uma base para o reticulado $\mathbf{E}_6$.

Matriz Geradora de $\mathbf{E}_6$

A matriz geradora de $\mathbf{E}_6$ é a matriz cujas as linhas são os vetores da base, a saber:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Densidades de $\mathbf{E}_6$

A densidade de $\mathbf{E}_6$, que é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, é igual a $\frac{\pi^3}{48\sqrt{3}} \cong 0.379...$, já a densidade do centro é igual a $\frac{1}{8\sqrt{3}}$.

Vetores de norma mínima de $\mathbf{E}_6$

Os vetores de $\mathbf{E}_6$ com norma mínima igual a 2 são da forma:

- $(0; 1, -1, 0^4; 0)$, num total de 30 vetores deste tipo;
- $\pm(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}^3, -\frac{1}{2}^3; -\frac{1}{2})$, num total de 40 vetores deste tipo;
- $\pm(1; 0^6; -1)$, sendo somente 2 possibilidades.

Assim, $\mathbf{E}_6$ tem um total de 72 vetores com norma mínima 2.

Empacotamento de $\mathbf{E}_6$

O número de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho é igual a 72. Além disso o centro das esferas são os pontos do reticulado, sendo assim, o raio de cada esfera é dado pela metade da distância entre o centro de duas esferas vizinhas, ou seja, o raio é igual a metade da norma mínima, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Além disso, seu raio de recobrimento é igual a $\rho\sqrt{\frac{8}{3}} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$.