

3 Polítopos

Os polítopos são generalizações dos conceitos conhecidos de polígonos e poliedros. Estas figuras têm relação com os sistemas de raízes estudados nos capítulos anteriores e neste capítulo, o nosso objetivo é estudarmos os chamados Polítopos de Gosset.

3.1 Polítopos convexos

De uma maneira não muito difícil de conceituar, polítopos são basicamente conhecidos como o termo geral da sequência

ponto, segmento, polígono, poliedro,...

Isto é, um polítopo na segunda dimensão é meramente um polígono, enquanto na terceira dimensão é um poliedro. E por analogia podemos perceber outras propriedades, como dois pontos formam um segmento de reta, quatro segmentos de reta formam um quadrado, seis quadrados formam um cubo e etc.

Definição 3.1 $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo, se e somente se, para todos $x, y \in X$ e para todo $s \in [0, 1]$,

$$sx + (1 - s)y \in X$$

Definição 3.2 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$.

$$\text{Fecho convexo}(X) = \left\{ \sum s_i x_i ; x_i \in X, s_i \in [0, 1], \sum s_i = 1 \right\}$$

Definição 3.3 Um polítopo convexo (em \mathbb{R}^n) é o fecho convexo de um conjunto finito (sem perda, os vértices).

Proposição 3.4

1. Um polítopo convexo é uma interseção de finitos semi-espacos;
2. Uma interseção de finitos semi-espacos que seja limitada é um polítopo convexo.

Definição 3.5 A dimensão de um polítopo X é a dimensão do espaço transladado gerado por X .

Definição 3.6 A interseção de um polítopo de dimensão n com um semiplano é uma face do polítopo se tiver dimensão menor do que n .

Seguindo a definição acima, podemos dizer que um vértice é uma face de dimensão 0, enquanto uma aresta é uma face de dimensão 1.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um polítopo de dimensão n . O grupo das simetrias de X é o grupo das isometrias $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\varphi(X) = X$. Note que uma isometria φ é da forma $\varphi v = Qv + v_0$, onde $v_0 \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathcal{O}(n)$.

O grupo das isometrias de um polítopo convexo é sempre finito, contido no grupo das permutações dos vértices.

Definição 3.7 Um polítopo convexo de dimensão $n \geq 2$ é regular se:

1. o grupo das simetrias age transitivamente sobre os vértices;
2. as faces de dimensão $n - 1$ são regulares;
3. o grupo das simetrias age transitivamente sobre as faces de dimensão $n - 1$.

Note que esta definição é recursiva. Um polítopo convexo de dimensão $n = 1$ é um segmento e é regular (por definição).

Definição 3.8 Um polítopo convexo de dimensão n é semi-regular se:

1. o grupo das simetrias age transitivamente sobre os vértice;
2. as faces de dimensão $n - 1$ são regulares;

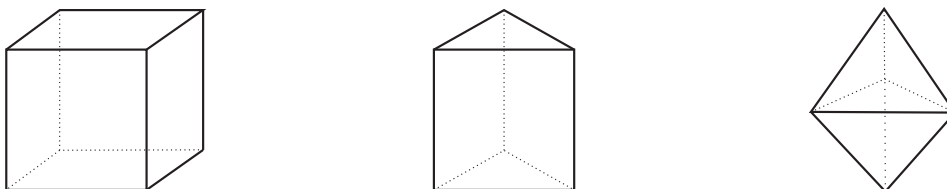


Figura 3.1: Polítopo regular; polítopo semi-regular; polítopo convexo com faces regulares que não é semiregular.

Definição 3.9 Um *simplexo*, α_n , é o fecho convexo de $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$.

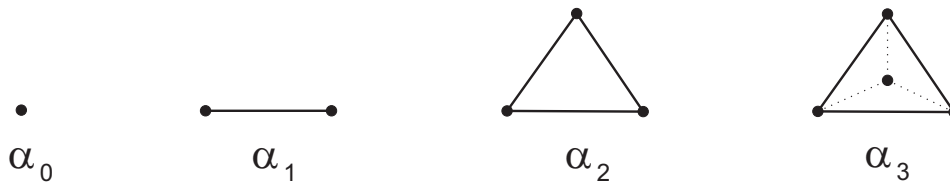


Figura 3.2: Simplexos

Em outras palavras, se chamarmos de α_0 , o espaço de dimensão nula, isto é, um ponto. Se ligarmos um outro ponto a α_0 , obteremos um segmento de reta, α_1 . Se ligarmos um terceiro ponto a α_1 (fora da reta a que pertence este segmento), obtemos um triângulo, α_2 . Já se ligarmos um quarto ponto a α_2 (fora do plano que o contém), obteremos um tetraedro, α_3 . E de forma análoga, se ligarmos um quinto ponto a α_3 (que não pertença ao espaço de dimensão três que o contém), então obteremos um pentatopo α_4 .

Definição 3.10 Um *hiper-octaedro*, β_n , é o fecho convexo de $\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n \in \mathbb{R}^n$.

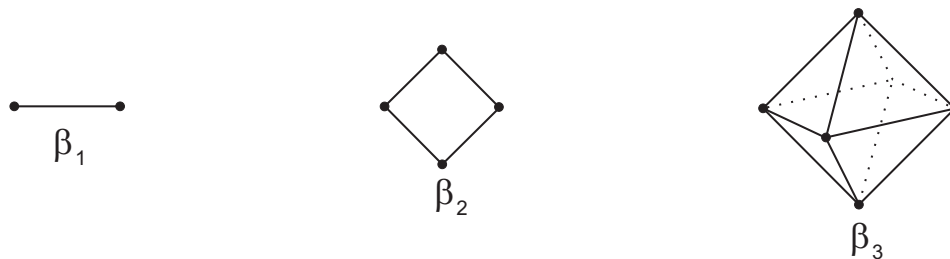


Figura 3.3: Hiper-octaedros

Note que o octaedro β_3 é uma dipirâmide com base β_2 . Mais geralmente, β_n será sempre uma dipirâmide com base β_{n-1} .

Definição 3.11 *Dois vértices de um politopo são vizinhos se pertencem a uma mesma aresta.*

Definição 3.12 *Seja X um politopo convexo de dimensão n , e v um vértice de X . A figura de vértice (de X em v) é o fecho convexo dos vértices de X vizinhos de v , desde que este fecho tenha dimensão $n - 1$.*

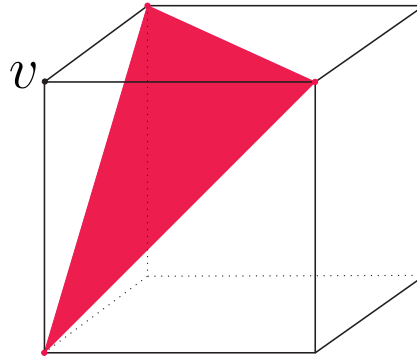


Figura 3.4: Figura de vértice do cubo

Observação 3.13 Não precisaremos aqui definir figuras de vértice de forma mais geral.

Observação 3.14 Todas as figuras de vértice de um politopo semiregular são isométricas (iguais).

3.2

Polítopos de Gosset

Thorald Gosset nasceu em 1869. Segundo Harold S.M. Coxeter, ele se formou em direito após anos de muito estudo, mas sem clientes, dedicou seu tempo a estudar quais figuras regulares existiam em dimensões mais altas. Após redescobrir todas elas, ele começou a enumerar as figuras semiregulares.

Definição 3.15 O prisma triangular da figura 3.1 é o politopo de Gosset \mathcal{G}_3 . \mathcal{G}_n é um politopo semiregular com faces de dimensão $n - 1$ iguais a α_{n-1} ou β_{n-1} e figura de vértice \mathcal{G}_{n-1} .

Proposição 3.16 Existem (únicos) polítopos de Gosset $\mathcal{G}_n, n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Podemos a partir de \mathcal{G}_3 montar \mathcal{G}_4 e assim por diante.

O politopo \mathcal{G}_4 também é chamado de *Tetroctaedro*, por ser formado por tetraedros e octaedros e sua construção de pode ser feita da seguinte maneira: Considere o hipertetraedro α_4 contido em \mathbb{R}^5 com vértices $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. Os vértices das faces α_3 e β_3 de \mathcal{G}_4 são os pontos médios das arestas de α_4 . Escolhendo um desses vértices, digamos $(0, 1, 0, 0, 0)$, a face α_3 é o fecho convexo dos pontos médios das arestas adjacentes a esse vértice, isto é, os pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 formam o tetraedro correspondente a face α_3 . A face β_3 é formada pelo fecho convexo dos 6 pontos médios restantes das arestas adjacentes, isto é, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6 formam o hiper-octaedro correspondente a face β_3 .

Podemos ainda obter informações sobre as faces do tipo α_{n-1} e β_{n-1} . Isto é, como \mathcal{G}_4 tem 10 vértices e cada um deles é adjacente a dois α_3 , temos 20 faces α_3 contadas com multiplicidade. Mas cada α_3 possui 4 vértices, e portanto, \mathcal{G}_4 tem $\frac{20}{4} = 5$ faces α_3 . Além disso, cada vértice é adjacente a três faces β_3 , resultando em 30 faces contadas com multiplicidade, sendo que cada β_3 possui 6 vértices. Logo, \mathcal{G}_4 tem $\frac{30}{6} = 5$ faces β_3 .

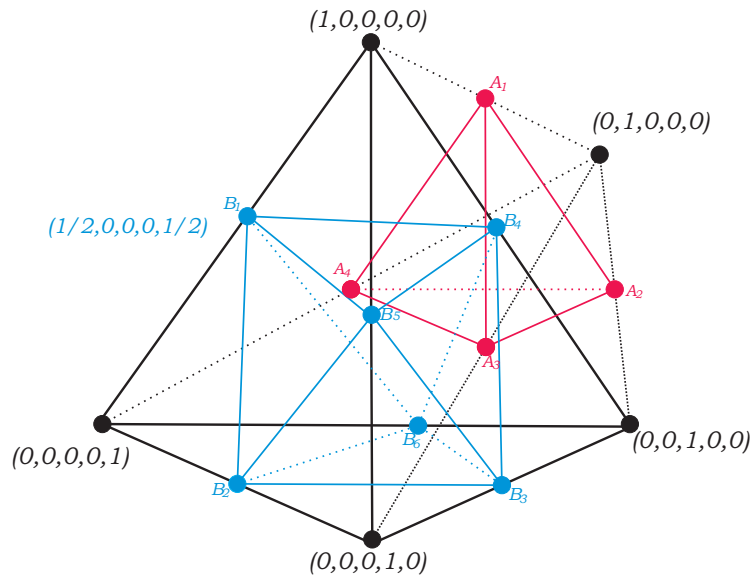


Figura 3.5: Construção das faces α_3 e β_3 de \mathcal{G}_4

O politopo de Gosset de quinta dimensão, \mathcal{G}_5 , que também é conhecido como *Demipenteract*, que quer dizer "metade do hiper-cubo de dimensão 5", é construído tomando-se os vértices alternados do hiper-cubo em \mathbb{R}^5 que tem 32 pontos da forma $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Assim os vértices de \mathcal{G}_5 são os 16 vértices com número par de sinais menos.

Assim, como \mathcal{G}_5 tem 16 vértices e cada um deles é adjacente a cinco α_4 , temos 80 faces α_4 contadas com multiplicidade. Mas cada α_4 possui 5 vértices, e portanto, \mathcal{G}_5 tem $\frac{80}{5} = 16$ faces α_4 . E cada vértice é adjacente a cinco faces β_4 , resultando em 80 faces contadas com multiplicidade, sendo que cada β_4 possui 8 vértices. Logo, \mathcal{G}_5 tem $\frac{80}{8} = 10$ faces β_4 .

3.3

Os politopos de Gosset \mathcal{G}_8 , \mathcal{G}_7 e \mathcal{G}_6

Neste trabalho preferimos usar as construções dos outros capítulos para chegar diretamente em \mathcal{G}_8 .

No capítulo anterior vimos que o reticulado E_8 possui 240 vetores em seu sistema de raízes, isto é, são 240 vetores de norma mínima e estes vetores

são justamente os que descrevem os vértices de \mathcal{G}_8 .

Considere a versão par do 1º sistema de coordenadas do reticulado E_8 .

$$E_8 = \{x \in \mathbb{R}^8 ; x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$$

E considere cada um dos 240 vetores de norma mínima deste reticulado como um vértice de um politopo. Escolhendo um dos vértices, como por exemplo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e calculando quais são os vértices cuja distância é mínima, isto é, igual a $\sqrt{2}$, podemos perceber que ele tem 28 vizinhos da forma $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ e 28 vizinhos da forma $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, permutando as 8 coordenadas, resultando em 56 vizinhos.

Deste modo podemos construir a seguinte figura:

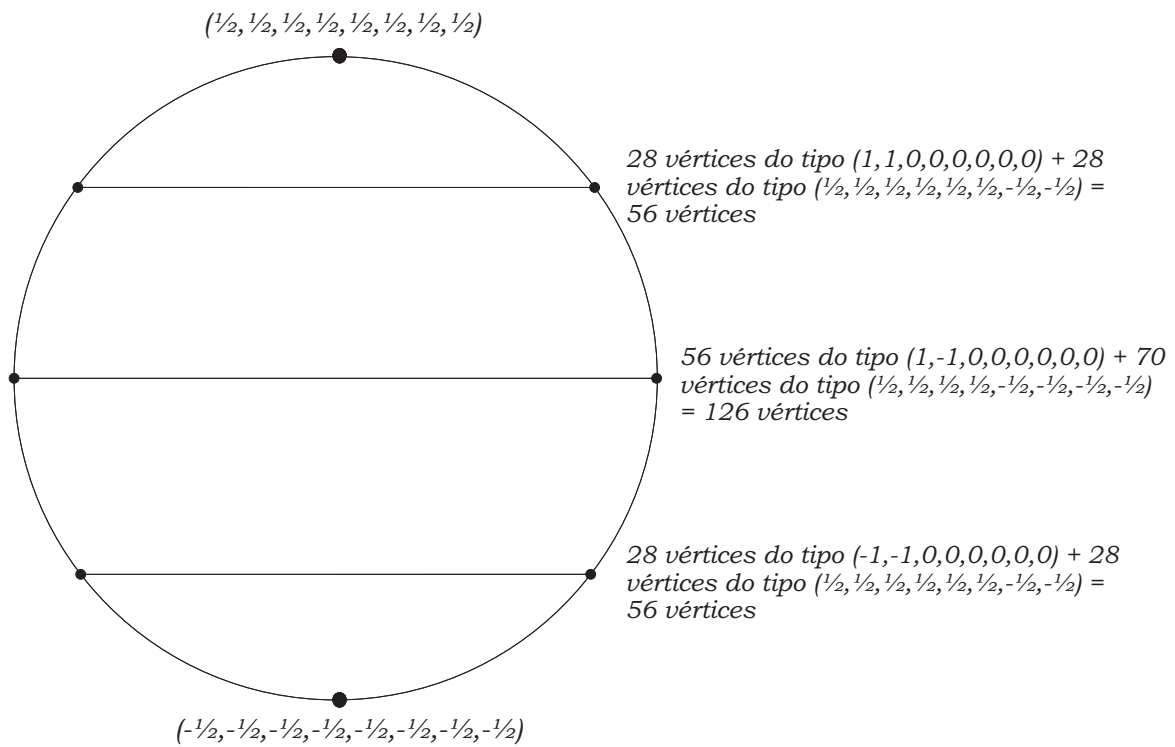
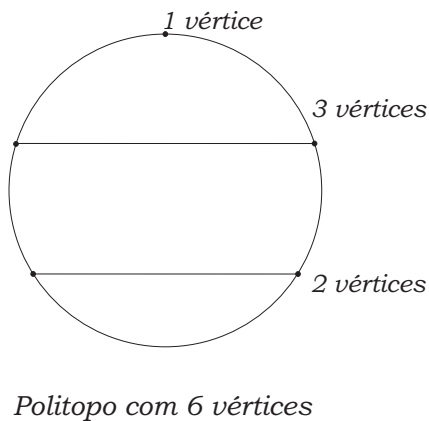
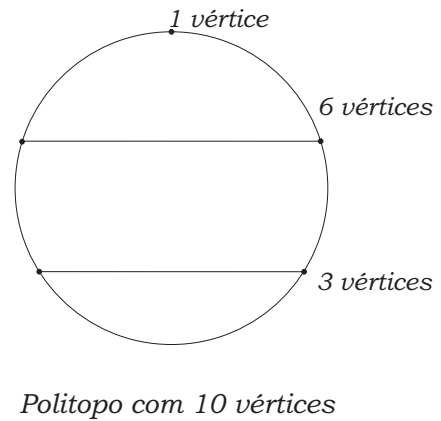
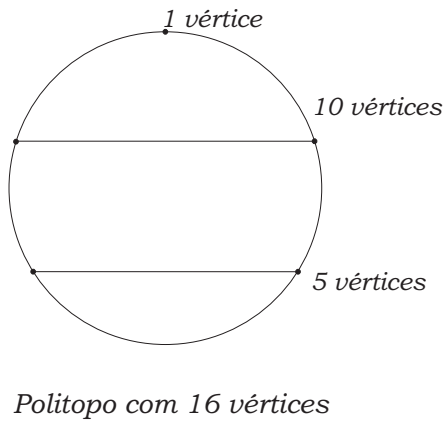
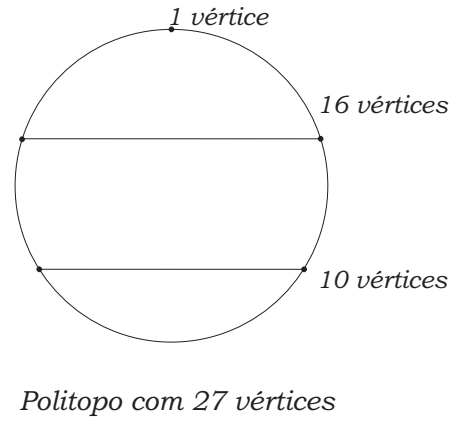
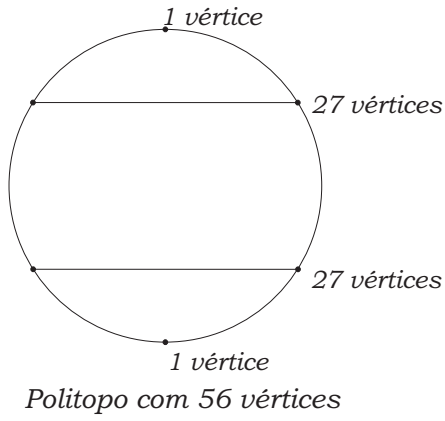
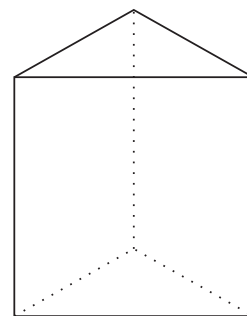


Figura 3.6: Politopo com 240 vértices

Isto quer dizer que a figura de vértice deste politopo é um politopo de 56 vértices, em que cada um desses vértices tem 27 vizinhos. E desta forma obtemos as seguintes figuras, que representam uma sequência de figuras de vértice de cada politopo.



==



Polítopo de Gosset de dim 3

Figura 3.7: Polítopos de 56, 27, 16, 10 e 6 vértices

O último polítopo é o \mathcal{G}_3 , isto é, um prisma de base triangular, pois ao redor de cada face de codimensão 3 vemos um α e 2β 's. Ou seja, em cada um dos 6 vértices deste polítopo temos um triângulo e dois quadrados.

Logo, $\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_5, \mathcal{G}_6, \mathcal{G}_7$ e \mathcal{G}_8 são os polítopos de Gosset de 10, 16, 27, 56 e 240 vértices respectivamente.

E assim, obtemos os seguintes resultados na tabela a seguir:

Dimensão	3	4	5	6	7	8
Vértices	6	10	16	27	56	240
Faces α_{n-1}	2	5	16	72	576	17.280
Faces β_{n-1}	3	5	10	27	126	2.160

\mathcal{G}_8 tem como grupo de simetria o grupo de Coxeter E_8 e sendo assim, este é o último polítopo de dimensão finita da família dos polítopos de Gosset. Coxeter usa a notação 4_{21} por causa das bifurcações do diagrama de Coxeter-Dynkin.

Vimos na seção anterior que \mathcal{G}_8 é um polítopo semiregular de 240 vértices que pertence a oitava dimensão, cujos vértices são os vetores de norma mínima do reticulado E_8 .

Além disso, vimos também que cada vértice deste polítopo tem 56 vizinhos, o que nos diz que \mathcal{G}_8 tem $\frac{240 \cdot 56}{2} = 6720$ arestas, isto é, faces de dimensão 1.

Podemos estudar as faces de dimensão 2 fazendo a seguinte projeção:

$$p : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^2 \tag{3-1}$$

$$(x_1, \dots, x_8) \mapsto (x_3 + \dots + x_8, x_1 + x_2) \tag{3-2}$$

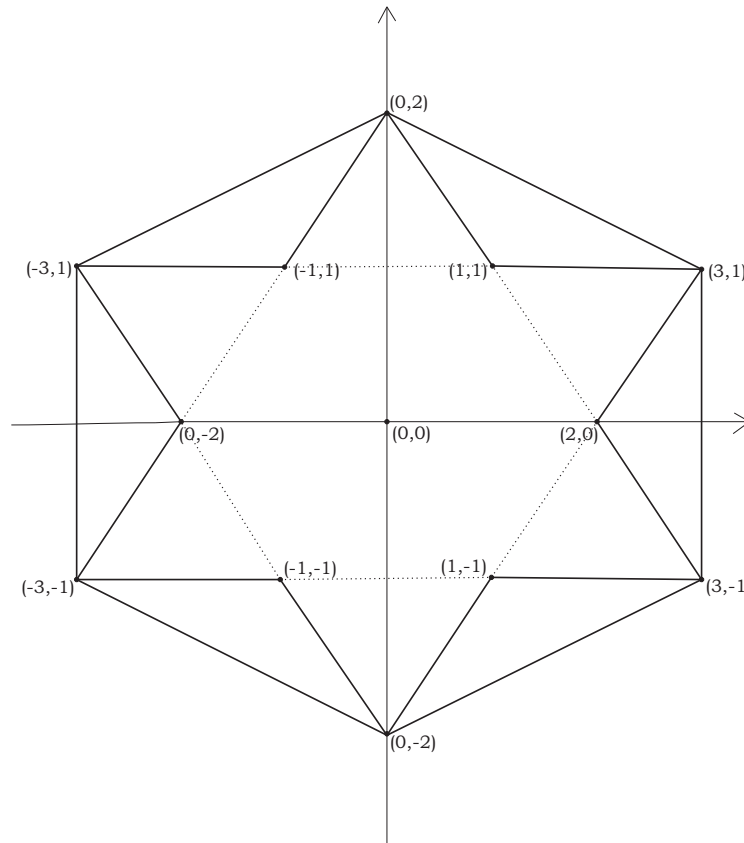


Figura 3.8: Projeção em \mathbb{R}^2

A partir daí, podemos observar que:

- a coordenada $(1, 1)$ representa 12 vértices do tipo $(1, 0; 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ e 15 do tipo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, resultando em 27 vértices;
- a coordenada $(2, 0)$ representa 15 vértices do tipo $(0, 0; 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ e 12 do tipo $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, resultando em 27 vértices;

Assim, como o vértice $(1, 1)$ é vizinho comum a $(0, 2)$ e $(3, 1)$, cada aresta de \mathcal{G}_8 tem 27 faces de dimensão igual a 2 e isso resulta em $\frac{6720 \cdot 27}{3} = 60480$ faces de dimensão 2.

Além disso pode-se dizer que:

- Cada face de dimensão 2 é adjacente a 16 faces de dimensão 3, o que resulta em $\frac{6720 \cdot 16}{4} = 241920$ faces de dimensão 3;
- cada face de dimensão 3 é adjacente a 10 faces de dimensão 4, o que resulta em $\frac{241920 \cdot 10}{5} = 483840$ faces de dimensão 4;
- cada face de dimensão 4 é adjacente a 6 faces de dimensão 5, o que resulta em $\frac{483840 \cdot 6}{6} = 483840$ faces de dimensão 5;

As faces de dimensão 6 são sempre simplexos, mas de dois tipos: $\alpha\beta$ e $\beta\beta$. Isto é, analogamente em dimensão mais baixa temos:

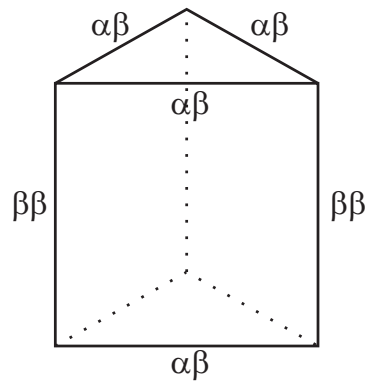


Figura 3.9: \mathcal{G}_3

Assim, cada face de dimensão 5 é adjacente a 3 faces de dimensão 6, uma do tipo $\alpha\beta$ e duas do tipo $\beta\beta$, o que resulta em $\frac{483840 \cdot 1}{7} = 69120$ faces $\alpha\beta$ de dimensão 6 e $\frac{483840 \cdot 2}{7} = 138240$ faces $\beta\beta$ de dimensão 6.

E para finalizar, como cada vértice de \mathcal{G}_8 é adjacente a 576 α_6 , então temos $\frac{576 \cdot 240}{8} = 17280$ faces α_7 e como cada vértice também é adjacente a 126 β_6 , então temos $\frac{126 \cdot 240}{14} = 2160$ faces β_7 .

Podemos obter uma projeção como abaixo, na qual levamos as 8 coordenadas de cada um dos 240 vértices nas suas três primeiras coordenadas, isto é,

$$p : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{3-3}$$

$$(x_1, \dots, x_8) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \tag{3-4}$$

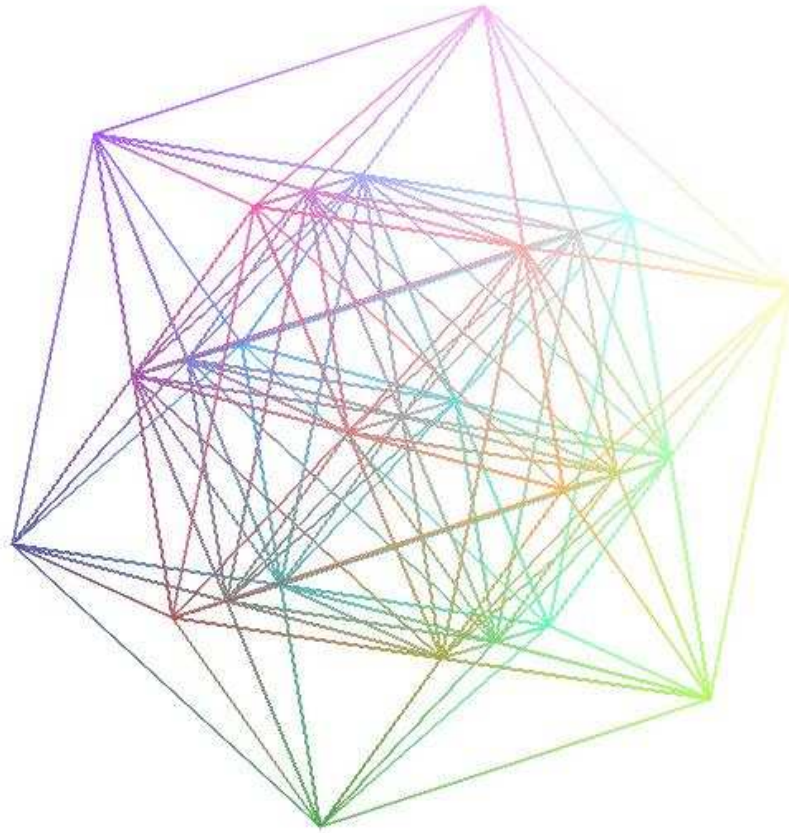


Figura 3.10: Projeção de \mathcal{G}_8 em \mathbb{R}^3

O polítopo de Gosset \mathcal{G}_7 , também chamado por Coxeter de 3_{21} , é formado pela figura de vértice do polítopo \mathcal{G}_8 . Isto é, \mathcal{G}_7 é um polítopo semiregular com 56 vértices e podemos construí-lo como na figura 3.5, escolhido o vértice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de \mathcal{G}_8 , os vizinhos deste são os vértices de \mathcal{G}_8 que estão a uma distância igual a $\sqrt{2}$. Assim, \mathcal{G}_7 , neste caso, é formado pelo fecho convexo de

- 28 vértices do tipo $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- 28 vértices do tipo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

O polítopo \mathcal{G}_7 também pode ser construído como o fecho convexo dos vizinhos de um buraco do reticulado E_7 . Como já vimos no capítulo anterior, E_7 tem 126 vetores de norma mínima que formam os vértices de um polítopo que não é semiregular.

Por exemplo, tome o ponto $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Os pontos que estão a uma distância igual a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ são:

- $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$;
- $(-1, 0; 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, que permutados somam 12 pontos;
- $(-1, -1; 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, que permutados somam 15 pontos;
- $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que permutados somam 15 pontos;
- $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que permutados somam 15 pontos;
- $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

O polítopo \mathcal{G}_6 , também chamado por Coxeter de 2_{21} , é a figura de vértice do polítopo \mathcal{G}_7 . Ou seja, \mathcal{G}_6 é um polítopo semiregular com 27 vértices.

As tabelas abaixo nos mostram como são as faces de \mathcal{G}_7 e de \mathcal{G}_6 .

Dimensão	0	1	2	3	4	5	6
Faces de \mathcal{G}_7	56 α_0	756 α_1	4032 α_2	10080 α_3	12096 α_4	2016 $\alpha\beta$	576 α_6
						4032 $\beta\beta$	126 β_6

Dimensão	0	1	2	3	4	5
Faces de \mathcal{G}_6	27 α_0	216 α_1	720 α_2	1.080 α_3	216 $\alpha\beta$	72 α_5
					432 $\beta\beta$	27 β_5

3.4 Projeções Ortogonais

Construção da projeção ortogonal de \mathcal{G}_8 será feita com detalhes, já as demais serão omitidas, já que são feitas de forma análoga.

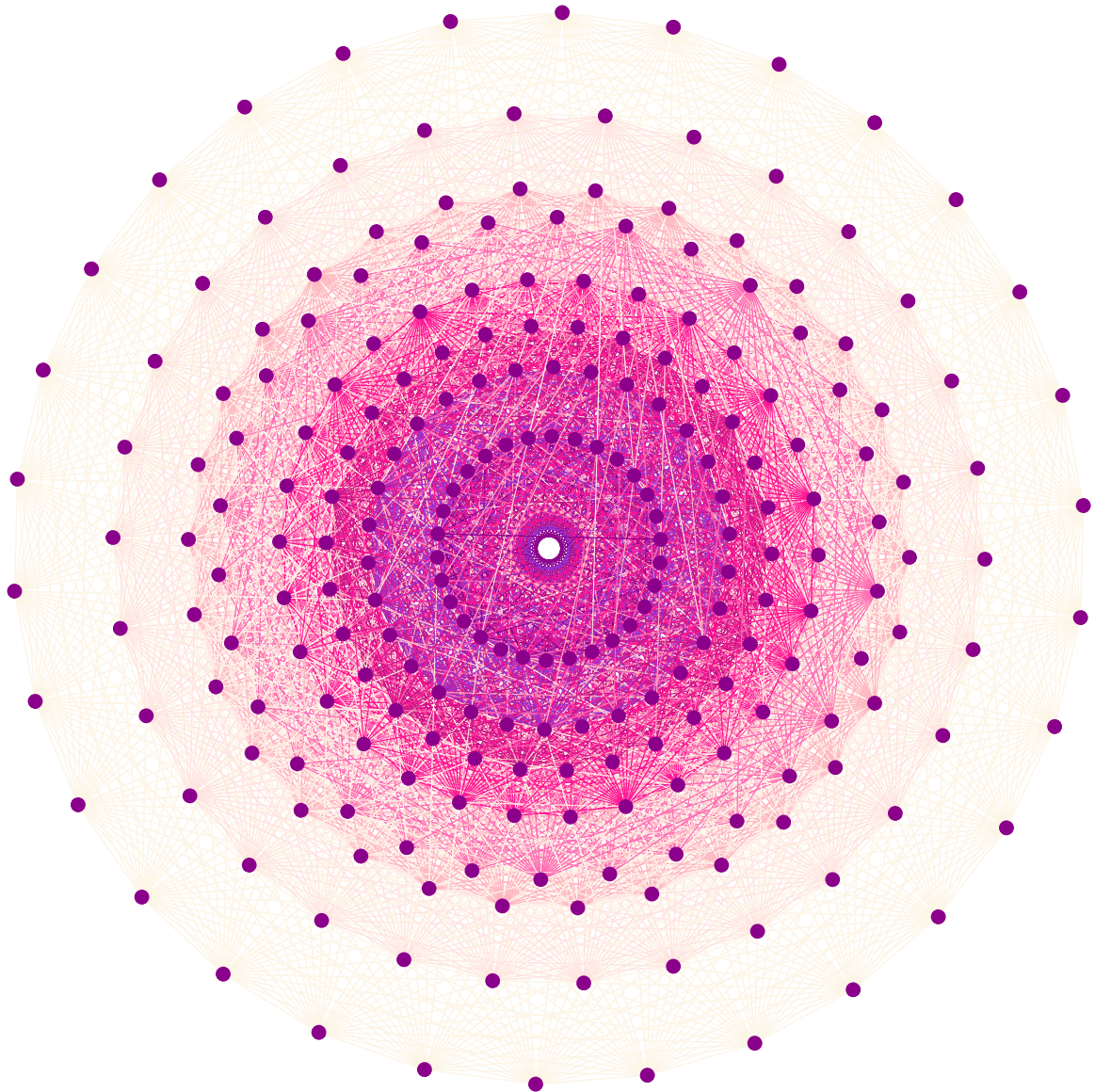


Figura 3.11: Projeção ortogonal de \mathcal{G}_8 em \mathbb{R}^2

Para a construção desta projeção tome uma base do reticulado E_8 formada pelos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & v_2 &= (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ v_3 &= (0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0), & v_4 &= (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0), \\ v_5 &= (0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0), & v_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0), \\ v_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1), & v_8 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ um vetor de \mathbb{R}^8 . A reflexão com respeito ao vetor v_1 é dada por

$$Rv_1 = x - 2 \frac{\langle v_1, x \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

Esta reflexão é associada a matriz $A_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De maneira análoga obtemos as outras 7 matrizes, sendo elas como em A_1 mas com permutações das colunas i com $i + 1$, onde $2 \leq i \leq 7$.

E a última matriz de reflexão como abaixo:

$$A_8 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

O elemento de Coxeter, que é o produto destas 8 matrizes de reflexão, é igual a

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

cujo número de Coxeter, que é a ordem do elemento de Coxeter, é igual a 30, já que $M^{30} = I_8$, onde I_8 é a matriz identidade de ordem 8.

O polinômio característico de M é $p(t) = t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$ e com ajuda do software Maple encontramos 8 autovalores complexos e seus autovetores associados.

Escolhendo um dos autovetores, chamaremos de u_1 o vetor de \mathbb{R}^8 cujas coordenadas são formadas pelas partes reais das oito coordenadas do autovetor escolhido e chamaremos de w_1 o vetor de \mathbb{R}^8 cujas coordenadas são formadas pelas partes imaginárias das oito coordenadas do mesmo autovetor.

Temos assim

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1.140976084 \\ 0.7962719514 \\ 0.5269240368 \\ 0.3447041310 \\ 0.2575761217 \\ 0.2693479189 \\ 0.7051620000 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_1 = \begin{pmatrix} -0.7548521365 \\ -0.4286386299 \\ -0.03788564864 \\ 0.4003290186 \\ 0.8668532956 \\ 1.341297827 \\ 0.7090462265 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A seguir, ortogonalizamos os vetores u_1 e w_1 . Assim, defina agora

$$\begin{aligned} un_1 &:= \frac{u_1}{\sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle}} \\ wt_1 &:= w_1 - \langle un_1, w_1 \rangle \cdot un_1 \\ wn_1 &:= \frac{wt_1}{\sqrt{\langle wt_1, wt_1 \rangle}} \end{aligned}$$

Sejam α_i , $i = 1, \dots, 240$, os vértices de \mathcal{G}_8 , os pontos da projeção em \mathbb{R}^2 são da forma $p_i = (a_i, b_i)$, onde $a_i = \langle un_1, \alpha_i \rangle$ e $b_i = \langle wn_1, \alpha_i \rangle$.

Logo, a figura 3.11 nos mostra os 240 de pontos $\mathcal{G}_8 \subset \mathbb{R}^8$ em \mathbb{R}^2 desta projeção, onde ligamos os pontos cuja distância entre eles em \mathbb{R}^8 é mínima, isto é, igual a $\sqrt{2}$, e as cores são determinadas pelas normas dos vetores em \mathbb{R}^2 .

Abaixo está a projeção ortogonal do polítopo formado pelos 126 vértices do reticulado E_7 .

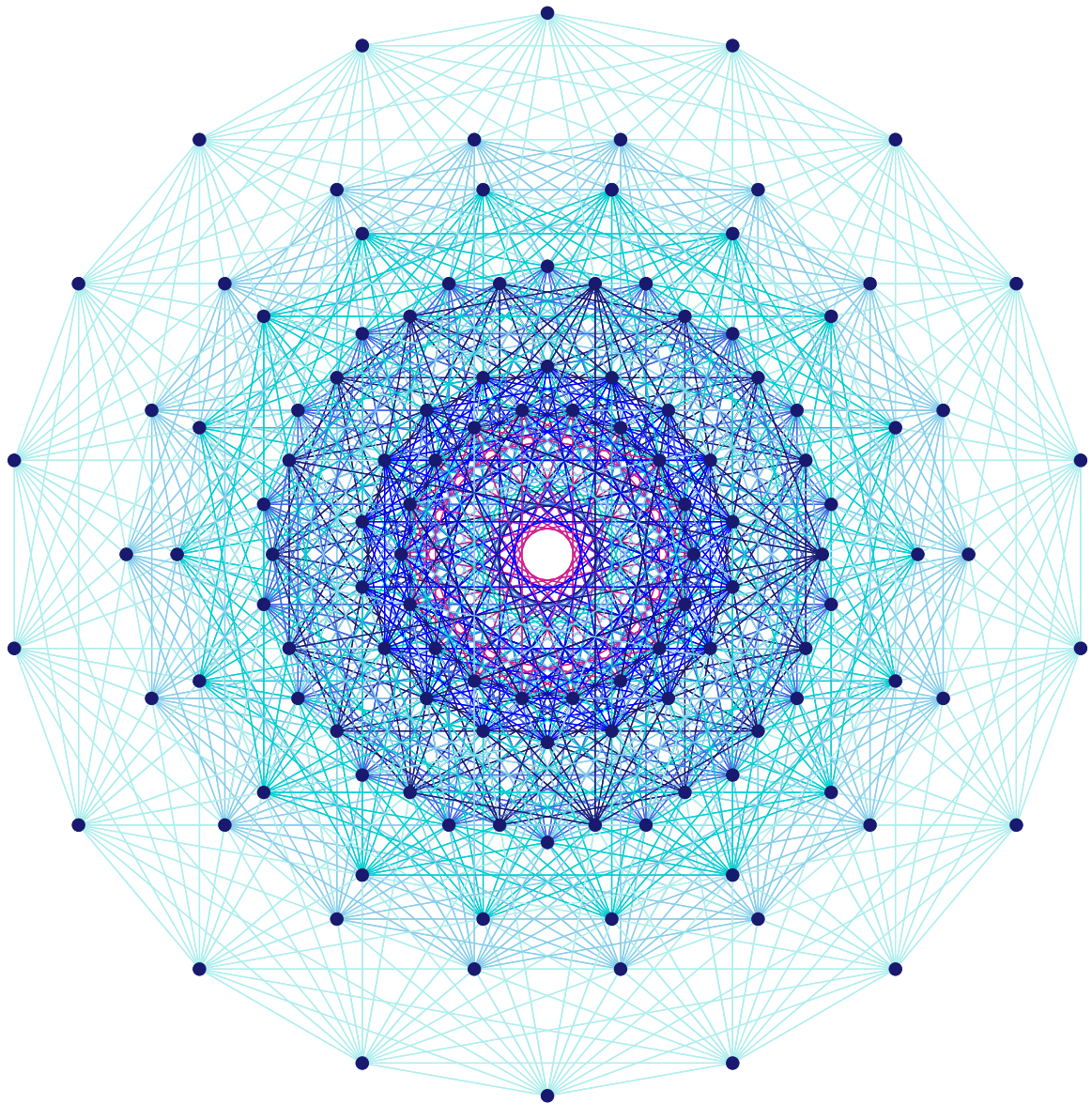


Figura 3.12: Projeção ortogonal de E_7 em \mathbb{R}^2

A figura abaixo mostram dois círculos com 27 pontos projetados mais dois pontos projetados no centro totalizando os 56 vértices de \mathcal{G}_7 .

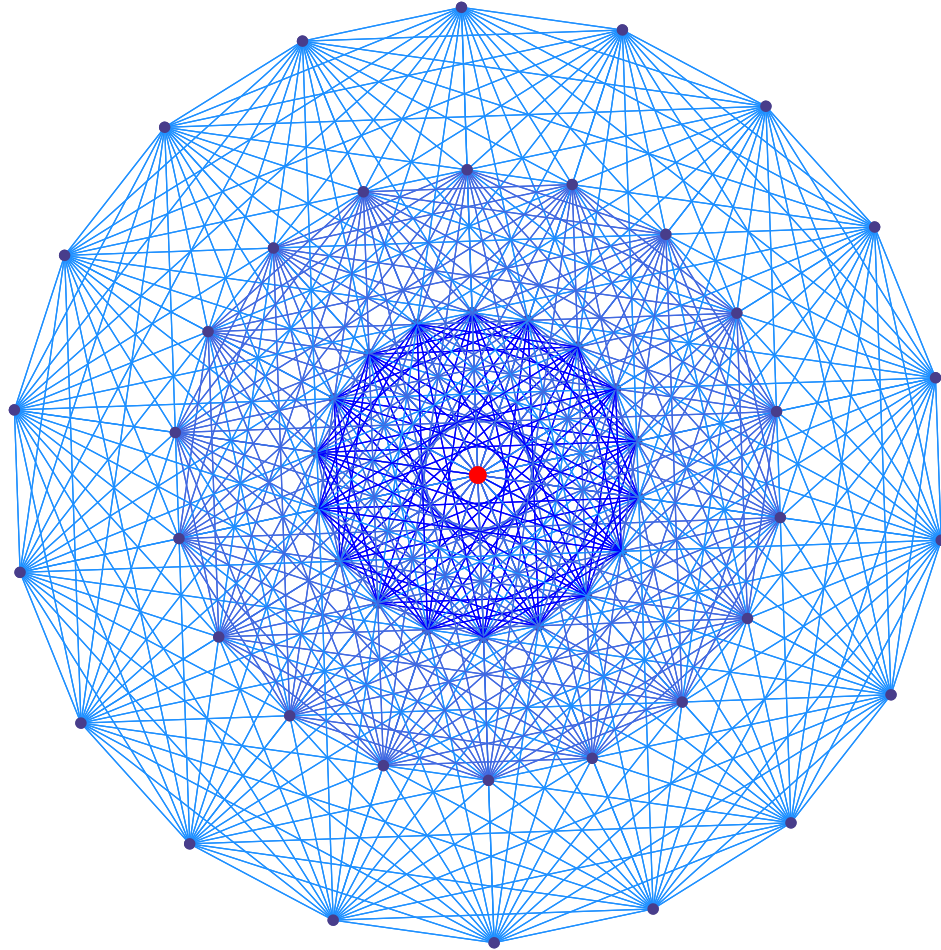


Figura 3.13: Projeção ortogonal de \mathcal{G}_7 em \mathbb{R}^2

Abaixo está a projeção ortogonal do polítopo formado pelos 72 vértices do reticulado E_6 .

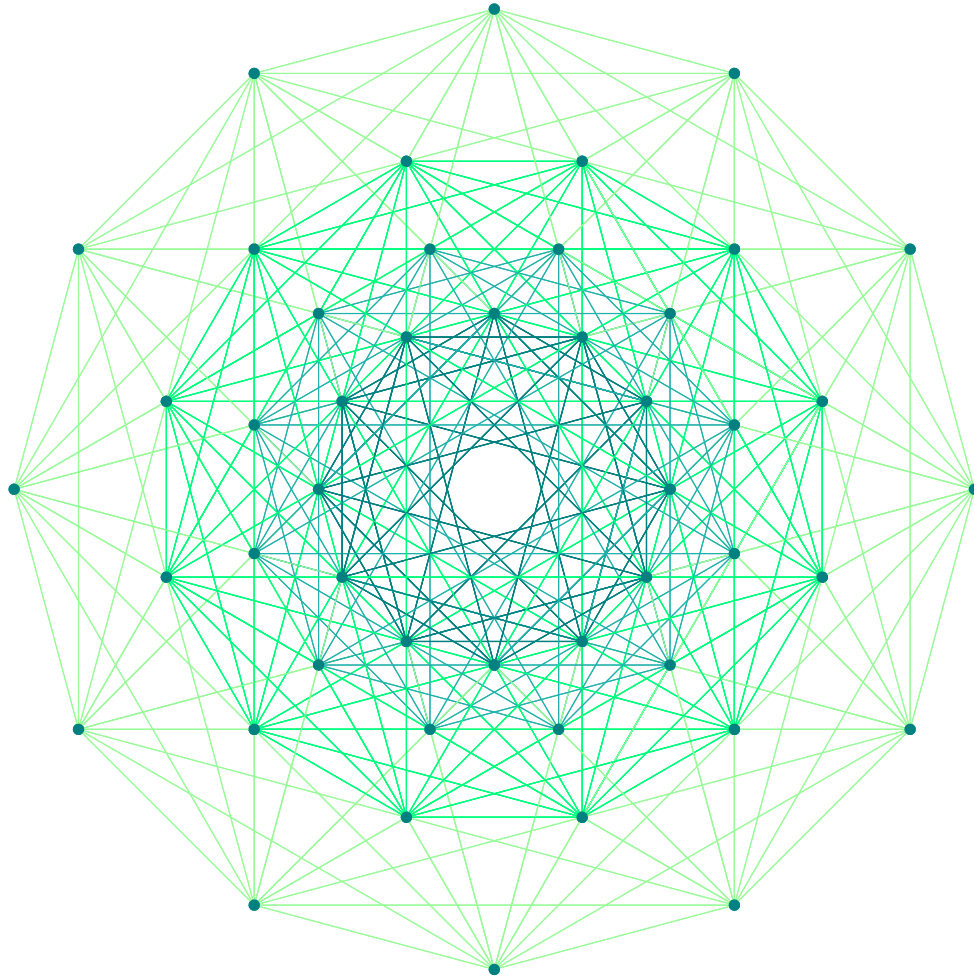


Figura 3.14: Projeção ortogonal de E_6 em \mathbb{R}^2

A figura abaixo mostram dois círculos com 12 pontos projetados mais três pontos projetados no centro totalizando os 27 vértices de \mathcal{G}_6 .

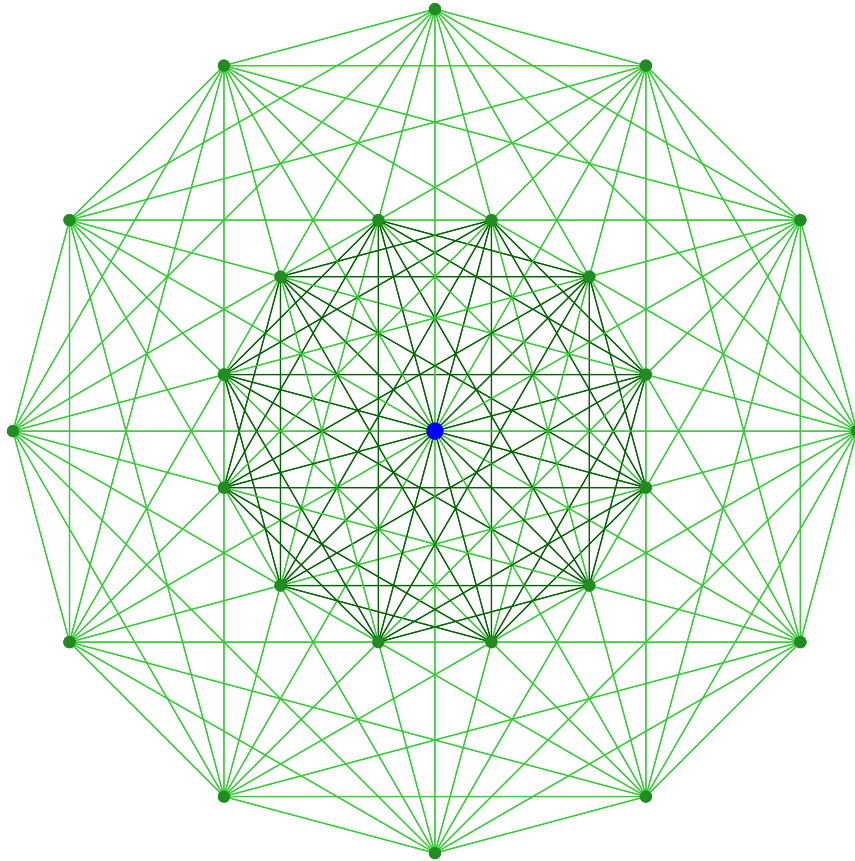


Figura 3.15: Projeção ortogonal de \mathcal{G}_6 em \mathbb{R}^2

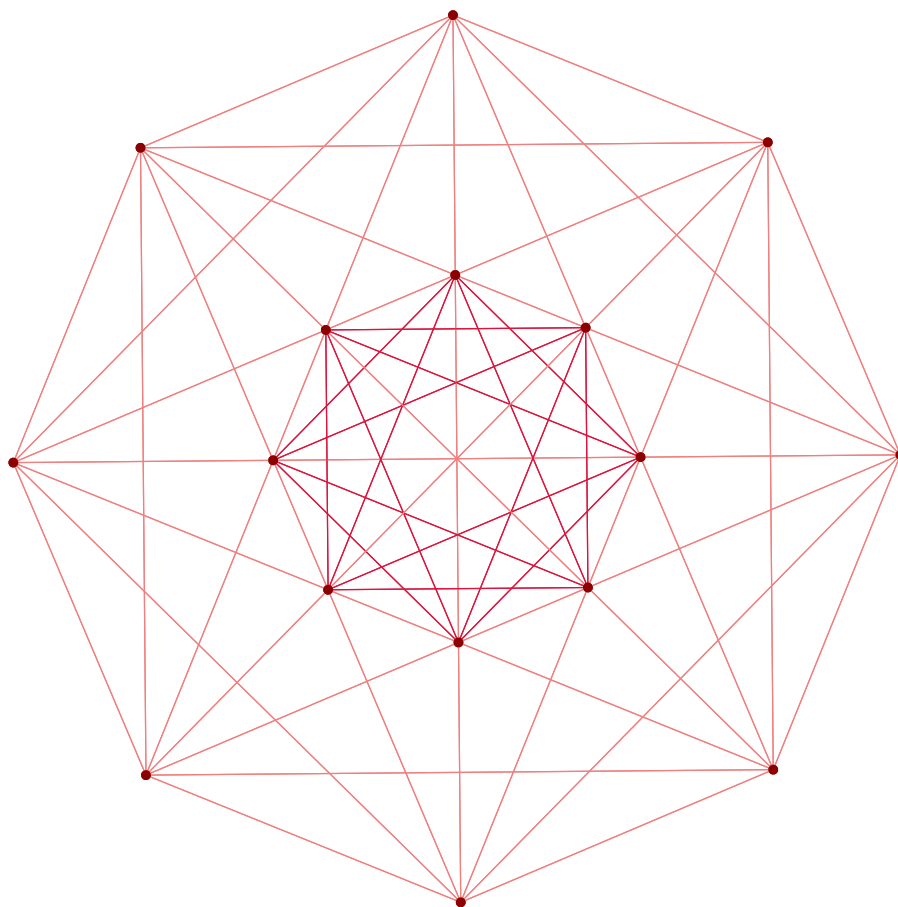


Figura 3.16: Projeção ortogonal de \mathcal{G}_5 em \mathbb{R}^2

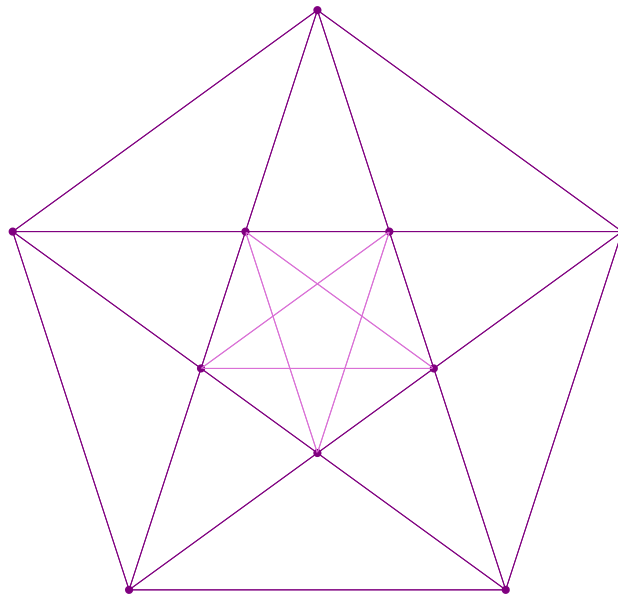


Figura 3.17: Projeção ortogonal de \mathcal{G}_4 em \mathbb{R}^2

As projeções ortogonais de E_7 e E_6 foram feitas de forma análoga a projeção feita para \mathcal{G}_8 . Para as projeções ortogonais de \mathcal{G}_7 , \mathcal{G}_6 , \mathcal{G}_5 e \mathcal{G}_4 usamos o mesmo elemento de Coxeter que usado em E_7 , E_6 , D_5 e A_4 respectivamente.