1
Introdução

Na Geometria Diferencial clássica o estudo de superfícies imersas em espaços homogêneos tem sido um tema de grande interesse e atraído a atenção de vários pesquisadores, em particular no caso dos espaços homogêneos de dimensão 3. Uma generalização natural para este estudo é entender o que ocorre em dimensões maiores. Neste sentido esta tese busca investigar a geometria e topologia das hipersuperfícies com segunda forma fundamental positiva, imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$. Resultado este que generaliza o teorema de [11] provado para o caso $n = 2$. Mais precisamente mostraremos no Teorema 3.2 que se Σ^n é uma hipersuperfície completa, conexa, imersa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com segunda forma fundamental positiva então Σ^n deve ser mergulhada e além disso, Σ^n é homeomorfa à $\mathbb{S}^n$ ou à $\mathbb{R}^n$ e no segundo caso Σ^n é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^n \times \{0\}$ ou Σ^n tem um fim simples (Vide seção 3.1 para a definição de fim simples).

O interesse por tal tema foi motivado pelos trabalhos publicados nos últimos anos que tiveram como precursor o resultado de J. Hadamard [16], cujo trabalho estudava as superfícies compactas, localmente estritamente convexas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, concluindo que tais superfícies são mergulhadas e homeomorfas à esfera.

Existem generalizações deste resultado, por exemplo: Em 1936, J. Stoker [23] generalizou o resultado de J. Hadamard, mostrando que uma superfície completa, localmente estritamente convexa, imersa em $\mathbb{R}^3$ deve ser mergulhada e homeomorfa à esfera se for fechada ou ao plano se for aberta. No segundo caso, a superfície é um gráfico sobre um domínio planar. Este resultado é conhecido como o teorema de Hadamard-Stoker.

S.S. Chern e R. K. Lashof [3] em 1958 estenderam este resultado para superfícies compactas com $K \geq 0$.

Em 1960, R. Sacksteder [21] mostrou que se uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana completa, conexa e orientável no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ possui todas as curvaturas seccionais não negativas e pelo menos uma é positiva, então, $f(M)$ é o bordo de um corpo convexo.

Usando topologia diferencial, M. do Carmo e E. Lima [7] deram uma prova independente do resultado de Sacksteder, supondo que a segunda forma fundamental é semi-definida e definida em algum ponto de M. Este teorema foi publicado somente em 1972.

Também M. do Carmo e F. Warner [8] em 1970 estenderam o teorema de Hadamard para $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$ adaptando a hipótese sobre as curvaturas. Mostraram que se uma imersão isométrica $f : M \to X^{n+1}$ de uma variedade compacta M^n em uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de curvatura seccional constante $K = \pm 1$, é tal que a segunda forma fundamental de M^n é semi-definida, então M^n é mergulhada como o bordo de um corpo convexo de X^{n+1} e difeomorfa à $\mathbb{S}^n$. O caso completo foi tratado por R.J.Currier [4] em 1989. Ele mostrou que se $f : M \to \mathbb{H}^{n+1}$ é uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n, conexa, completa e orientável de dimensão $n \geq 2$ em uma variedade Riemanniana $\mathbb{H}^{n+1}$, completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante $K = -1$ e se existe um campo de vetores unitários ξ, diferenciável e normal a M^n ao longo de f, tal que os autovalores da segunda forma fundamental II_ξ são maiores ou iguais a um e existe ao menos um ponto em M^n onde todos os autovalores de II_ξ são maiores que um, então: i)M^n é mergulhada; ii)$f(M)$ é o bordo de um corpo convexo em $\mathbb{H}^{n+1}$; iii) M^n é compacta e difeomorfa à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$.

Em 1977, S. Alexander [1] considerou uma imersão isométrica $f : M \to N$ de uma variedade compacta, conexa e orientável M de dimensão $n \geq 2$ em uma variedade de Hadamard N de dimensão $n+1$ e ξ o campo normal unitário em M, mostrando que se as curvaturas seccionais de N satisfazem $K_N \leq -c \leq 0$ (c constante positiva) e ξ pode ser escolhido tal que os autovalores da segunda forma fundamental S_ξ satisfazem $\lambda \geq -\sqrt{c}$ então M é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^n$.

I. Tribuzy [25] em 1978 obteve uma nova generalização. Considerou $f : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica e supôs que a curvatura seccional de N satisfaz $k \geq K_N > 0$, k constante. Supôs ainda que N é não compacta e M é completa e conexa, e que se pode escolher um campo normal unitário ξ em M de modo que os valores próprios λ da segunda forma fundamental de f ao longo de ξ satisfazem $\lambda \geq 2\sqrt{k}$ mostrando que f é um mergulho, M é difeomorfa à esfera e $f(M)$ é bordo de um corpo fortemente convexo de N.

Em 2009, J. Espinar, J. Gálvez e H. Rosenberg [11] estenderam o teorema de Hadamard-Stoker para superfícies imersas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ assumindo que uma tal superfície é conexa, completa e tem curvaturas principais positivas, provando que tal superfície é propriamente mergulhada e é homeomorfa à esfera se for fechada ou à $\mathbb{R}^2$ se for aberta. No segundo caso, Σ é um gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ ou Σ tem um fim simples.

J. Espinar e H. Rosenberg [13] em 2010 provaram que se $\Sigma \subset M^n \times \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície localmente estritamente convexa, conexa, propriamente imersa, onde M^n é uma variedade *1/4 - pinched*, então Σ é propriamente mergulhada e homeomorfa a $\mathbb{S}^n$ ou a $\mathbb{R}^n$. No segundo caso, Σ tem um fim *top* ou *bottom*. (Σ tem um fim *top* E (respectivamente *bottom*) se para toda sequência divergente $\{p_n\} \subset E$ a função altura $h : \Sigma \to E$ vai para $+\infty$ (respectivamente $-\infty$)).

Também em 2010 em uma colaboração com José Espinar [14] mostramos um teorema tipo Hadamard-Stoker-Currier para superfícies imersas em variedades Riemannianas de dimensão 3 que se fibram sobre uma superfície Riemanniana e cujas fibras são trajetórias de um campo vetorial Killing unitário. Mais precisamente, consideramos $\Sigma \subset \mathcal{M}(\kappa, \tau)$, onde $\mathcal{M}(\kappa, \tau)$ é uma variedade Riemanniana de dimensão 3 que se fibra sobre uma superfície de Hadamard estrita, i.e., $\mathbb{M}^2$ tem curvatura Gaussiana κ limitada por uma constante negativa. (Aqui κ é a curvatura de Gauss de $\mathbb{M}^2$ e τ é a curvatura do fibrado).

Mostramos essencialmente que se Σ é uma superfície completa, conexa, imersa em $\mathcal{M}(\kappa, \tau)$ tal que as curvaturas principais $k_i(p) > |\tau(p)|, \forall p \in \Sigma$, onde $\mathcal{M}(\kappa, \tau)$ é uma variedade Riemanniana de dimensão 3 que se fibra sobre uma superfície de Hadamard estrita, i.e., $\mathbb{M}^2$ tem curvatura Gaussiana κ limitada por uma constante negativa, então Σ é propriamente mergulhada. Além disso, Σ é homeomorfa à $\mathbb{S}^2$ ou à $\mathbb{R}^2$. No segundo caso, Σ tem um fim simples ou Σ é um gráfico Killing sobre um domínio convexo em $\mathbb{M}^2$.

Este resultado pode ser aplicado a superfícies em $\widetilde{PSL(2, \mathbb{R})}$ cujas curvaturas principais são maiores que a curvatura da fibra τ.

Também, como consequência do teorema acima obtemos o seguinte resultado: Seja Σ uma superfície completa, conexa imersa em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura extrínseca positiva, onde $\mathbb{M}^2$ é uma superfície de Hadamard com curvatura Gaussiana limitada por uma constante negativa. Então Σ é propriamente mergulhada e limita um domínio estritamente convexo em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, Σ é homeomorfa ou à $\mathbb{S}^2$ ou à $\mathbb{R}^2$. No segundo caso, Σ é ou um gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{M}^2$ ou Σ tem um fim simples.

Vale observar que em um espaço produto temos que $\tau = 0$, e portanto como a curvatura extrínseca é o produto das curvaturas principais, então é suficiente saber que a curvatura extrínseca seja positiva. Além disso, o resultado acima é bom, no sentido que existem superfícies completas, mergulhadas com curvatura extrínseca positiva e um fim simples em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (Veja [11]).

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, iniciamos estabelecendo a notação, apresentando algumas definições e fatos elementares da geometria Riemanniana, além de alguns cálculos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No capítulo 3 é demonstrado o teorema principal (Teorema 3.2), objeto de estudo deste trabalho, onde a idéia da prova é analisar essencialmente dois casos que dependem ou não da existência de um ponto $p \in \Sigma^k$ com um hiperplano tangente vertical, sendo que para analisar tais situações precisaremos trabalhar com folheações por hiperplanos verticais em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ e usar uma proposição(Proposição 3.1) que será fundamental na demonstração. Exibimos também neste capítulo um exemplo de hipersuperfície com um fim simples em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

É importante ressaltar que o que fizemos nesta tese é apenas uma etapa, visto que existem outros espaços a serem estudados, como por exemplo: $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}$ é variedade de Hadamard de dimensão n, espaços de Heisenberg de dimensão n, dentre outros. É possível que resultados tipo Hadamard-Stoker sejam válidos nestes espaços.