2
Preliminares

Um problema clássico em geometria é determinar quando uma variedade $\mathcal{M}$ pode ser imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana $\mathcal{N}$. Neste capítulo temos como objetivo apresentar alguns conceitos e notações básicas da teoria de variedades imersas, em particular para hipersuperfícies imersas no espaço produto $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, n \geq 2$.

2.1
Generalidades sobre as imersões isométricas

Sabemos que uma imersão $f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^{n+m=k}$ entre duas variedades é dita isométrica, se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall\, u, v \in T_p\mathcal{M}, \forall\, p \in \mathcal{M}^n. \tag{2-1}$$

Se $f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^{n+m=k}$ é uma imersão e $\mathcal{N}$ é uma variedade Riemanniana, então a métrica Riemanniana de $\mathcal{N}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em $\mathcal{M}$ dada pela equação (2-1). A métrica assim definida em $\mathcal{M}$ é chamada métrica induzida por f. Vale ressaltar que por f ser localmente um mergulho, podemos identificar localmente $\mathcal{M}$ com $f(\mathcal{M})$ e cada campo $\mathcal{X} \in T\mathcal{M}$ com a sua imagem $df(\mathcal{X})$. Usando esta identificação, para cada $p \in \mathcal{M}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} T_{f(p)}\mathcal{N} &= df_p(T_p\mathcal{M}) \oplus [df_p(T_p\mathcal{M})]^{\perp} \\ &= T_p\mathcal{M} \oplus (T_p\mathcal{M})^{\perp}. \end{aligned}$$

Assim se indicarmos $T\mathcal{M}$ como o fibrado tangente a $\mathcal{M}$ e $T\mathcal{M}^{\perp}$ sendo o fibrado normal a $\mathcal{M}$, temos que

$$f^*(T\mathcal{N}) = T\mathcal{M} \oplus T\mathcal{M}^{\perp},$$

onde $f^*(T\mathcal{N})$ é o fibrado induzido por f. Relacionada a esta decomposição podemos definir a projeção tangente

$$()^{\top} : T\mathcal{N}_{|f(\mathcal{M})} \to T\mathcal{M}$$

e a projeção normal

$$()^{\perp} : T\mathcal{N}_{|f(\mathcal{M})} \to T\mathcal{M}^{\perp}.$$

Dados campos de vetores $X, Y \in T\mathcal{M}$, temos que $\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{N}$.

Segue da unicidade desta conexão que $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ é a conexão Riemanniana de M, que será denotada por ∇.

Definição 2.1 *Seja $\alpha : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \to T\mathcal{M}^{\perp}$ definida por:*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

A aplicação α é chamada a segunda forma fundamental da imersão f (às vezes indicada por II), e a equação

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

é denominada Fórmula de Gauss.

Das propriedades das conexões Riemannianas $\overline{\nabla}$ e ∇ segue que α é bilinear e simétrica.

Vamos considerar campos de vetores X de $T\mathcal{M}$ e ξ de $T\mathcal{M}^{\perp}$, e denotaremos $S_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é $S_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T$.

Se $Y \in T\mathcal{M}$ e $\xi \in T\mathcal{M}^{\perp}$ então $\langle Y, \xi \rangle = 0$.

Como para todo $Y \in T\mathcal{M}$ temos

$$0 = X\langle \xi, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \rangle,$$

a fórmula de Gauss dá que

$$\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Agora, como α é uma aplicação simétrica, a expressão acima mostra que $S_\xi : T\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ é um operador linear sobre $C^\infty(\mathcal{M})$ (anel das funções diferenciáveis em $\mathcal{M}$) e simétrico, isto é, $\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle X, S_\xi Y \rangle$ $\forall X, Y \in T\mathcal{M}$. A aplicação S_ξ é chamada *operador forma* ou *operador de Weingarten.*

Tomando a componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla^{\perp}_X \xi$, temos uma conexão compatível com a métrica no fibrado normal $T\mathcal{M}^{\perp}$, chamada de conexão normal da imersão f. Assim obtemos a *Fórmula de Weingarten*

$$\overline{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi.$$

No caso em que a codimensão da imersão é 1, i.e., $f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^{n+1}$; $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ é então denominada uma *hipersuperfície*. Sejam $p \in \mathcal{M}$, $\xi \in T_p\mathcal{M}^{\perp}$ e $|\xi| = 1$. Como S_ξ é linear e simétrica, então pode ser diagonalizada por uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, ..., e_n\}$ com valores próprios reais $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, isto é, $S_\xi(e_i) = \lambda_i e_i$. Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são ambas orientáveis e estão orientadas então o vetor ξ fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base na orientação de $\mathcal{M}$, $\{e_1, ..., e_n, \xi\}$ seja uma base na orientação de $\mathcal{N}$. E neste caso, denominamos os e_i direções principais e os λ_i curvaturas principais de f.

Definição 2.2 *Dizemos que uma hipersuperfície Σ imersa é localmente (estritamente) convexa se e somente para todo $p \in \Sigma$, a segunda forma fundamental é positiva definida.*

2.2
Modelos para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$

O espaço hiperbólico n - dimensional consiste de uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional constante negativa -1. Passamos agora a descrever três modelos clássicos para este espaço:

1. **Modelo do semi-espaço superior**

   Para cada inteiro $n \geq 2$ definimos o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ sendo o conjunto

   $$\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

   munido com a métrica Riemanniana

   $$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2}{x_n^2}.$$

   O bordo infinito de $\mathbb{H}^n$, denotado por $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ é definido por

   $$\partial_\infty \mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Observe que a menos da projeção canônica de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^{n-1}$: $(x_1,...,x_{n-1},x_n) \to (x_1,...,x_{n-1})$, podemos identificar $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ a $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. O bordo assintótico ou bordo infinito de um conjunto $U \subset \mathbb{H}^n$ é definido como $\partial_\infty U = \overline{U} \cap \partial_\infty \mathbb{H}^n$, onde $\overline{U}$ é o fecho de U em $x_n \geq 0 \cup \{\infty\}$.

As retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$, e os círculos de $\mathbb{H}^n$ cujos planos são perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e cujos centros estão neste hiperplano são geodésicas de $\mathbb{H}^n$.

As subvariedades totalmente geodésicas são as interseções com $\mathbb{H}^n$ dos hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ ortogonais a $\mathbb{R}^{n-1}$, e as interseções com $\mathbb{H}^n$ das esferas de $\mathbb{R}^n$ com centro no $\mathbb{R}^{n-1}$.

As isometrias do espaço hiperbólico neste modelo são as restrições a $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ das transformações conformes de $\mathbb{R}^n$ que levam $\mathbb{H}^n$ sobre si mesmo. Para detalhes ver [9] e [20].

2. **Modelo de Poincaré (ou modelo da bola)**

Neste modelo $\mathbb{H}^n$ é representado como a bola aberta centrada na origem,

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 < 1\},$$

e introduzimos em $\mathbb{B}^n$ a métrica

$$ds^2 = 4\frac{dx_1^2 + ... + dx_n^2}{(1-|x|^2)^2}$$

onde $|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$.

Vamos denotar o bordo infinito de $\mathbb{B}^n$ como $\partial_\infty \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}_\infty = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$.

Temos que a variedade Riemanniana $\mathbb{B}^n$ com tal métrica é isométrica ao espaço $\mathbb{H}^n$. Podemos considerar a translação T de $\mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = x + (0,...,0,-1)$ e S a inversão de $\mathbb{R}^n$ com respeito à esfera centrada no ponto $p_0 = (0,...,0,-2)$ e de raio 2. Colocando $I_\mathbb{B} = S \circ T$ temos então:

$$I_\mathbb{B}(x) = \frac{T(x) - p_0}{|T(x) - p_0|^2} + p_0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

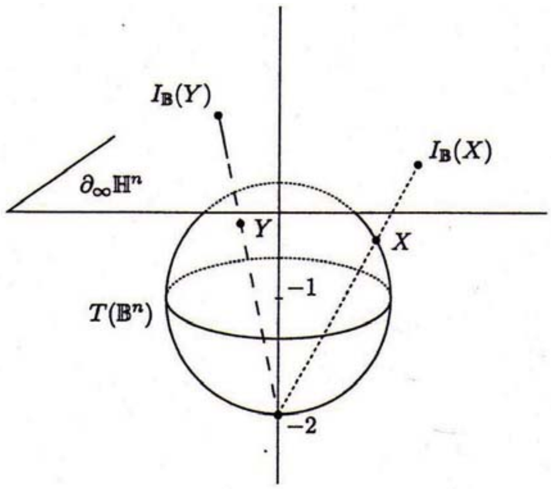

Figura 2.1: Isometria no Modelo da Bola

As geodésicas neste modelo são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais ao bordo infinito.

As subvariedades totalmente geodésicas neste modelo são as interseções de $\mathbb{B}^n$ com um plano ou esfera que intersecta o bordo de $\mathbb{B}^n$ ortogonalmente.

Toda aplicação conforme $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ de $\mathbb{B}^n$ sobre si mesmo é uma isometria de $(\mathbb{B}^n, ds^2)$ sobre si mesmo.

3. **O Modelo do Hiperbolóide ou modelo de Lorentz**

   Em $\mathbb{R}^{n+1}$ considere a pseudo-métrica $<,>$, definida por

$$< x, y >= -x_0 y_0 + x_1 y_1 + ... + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n, \qquad (2\text{-}2)$$

   onde $x = (x_0, ..., x_n)$ e $y = (y_0, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Esta pseudo-métrica é induzida pela forma quadrática

$$Q(x_0, ..., x_n) = -(x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2.$$

   O produto interno definido pela equação (2-2) é chamado produto interno de Lorentz e $(\mathbb{R}^{n+1}, <,>)$ é chamado Espaço de Lorentz e indicado por $\mathbb{L}^{n+1}$. Dado um número real $r > 0$, considere a hipersuperfície

$$\{x \in \mathbb{L}^{n+1}; < x, x >= -1/r^2\}.$$

   Essa hipersuperfície (hiperbolóide de duas folhas) tem duas componentes conexas. Escolhemos a componente conexa correspondente a $x_n > 0$ e pomos

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; x_0 > 0 \; e \; < x, x >= -1/r^2\},$$

com a métrica induzida $<,>= -dx_0^2 + \sum_{i=1}^n dx_i^2$ pelo produto interno Lorentziano. Vale ressaltar que esta métrica em $\mathbb{H}^n$ é de fato Riemanniana.

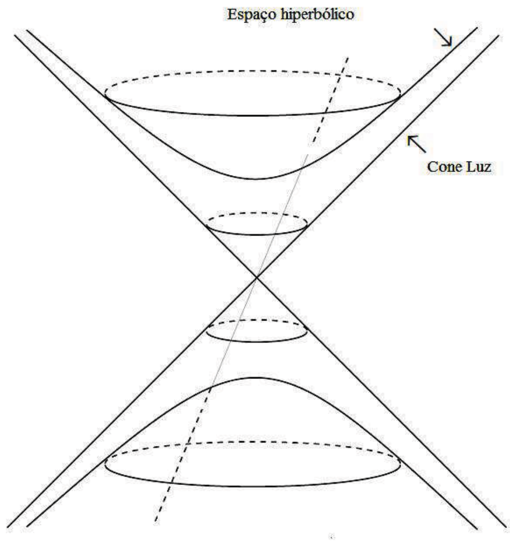

Figura 2.2: Modelo do Hiperbolóide

O bordo infinito de $\mathbb{H}^n$, $\partial_\infty\mathbb{H}^n$, está identificado com o conjunto de retas contidas no cone luz $\mathbb{V}^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{L}^{n+1} : -(x_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 0\}$.

As geodésicas neste modelo são interseções de 2−planos passando pela origem de $\mathbb{L}^{n+1}$ com $\mathbb{H}^n$, ou seja, ramos de hipérboles.

As subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}^n$ são $\mathbb{H}^n \cap P$, onde P é subespaço vetorial de $\mathbb{L}^{n+1}$.

As isometrias positivas de $\mathbb{H}^n$ são as restrições a $\mathbb{H}^n$ das isometrias positivas de $\mathbb{L}^{n+1}$. Por consequência, o grupo de isometrias positivas de $\mathbb{H}^n$ é $SO(n,1) = \{N \in M_{n+1}(\mathbb{R}) | detN > 0, N^tQN = Q\}$ onde Q é a matriz $\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$.

2.3 Métrica Produto

Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ e $\overline{\pi} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ as projeções naturais. Definimos uma métrica Riemanniana em $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ da seguinte maneira:

$$< u, v >_{(p,q)} = < d\pi u, d\pi v >_p + < d\overline{\pi} u, d\overline{\pi} v >_q$$

para todo $(p,q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $u, v \in T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$. Denominamos a métrica definida acima de métrica produto. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Riemannianas e considere o produto $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ com a métrica produto. Sejam ∇^1 e ∇^2 as conexões, respectivamente, de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Denotaremos por ∇ a conexão Riemanniana de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ definida por

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla^1_{Y_1} X_1 + \nabla^2_{Y_2} X_2,$$

$\forall\ X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$. Tal conexão chama-se conexão produto.

2.4 O espaço $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Denotando por $x_1, ..., x_n$ as coordenadas de $\mathbb{H}^n$ e por t a coordenada em $\mathbb{R}$ definiremos o espaço $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ sendo o conjunto

$$\{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_n^2 < 1\},$$

munido da métrica produto

$$<,> = ds^2 + dt^2, onde$$

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + ... + dx_n^2)}{(1 - (x_1^2 + ... + x_n^2))^2}$$

é a métrica de $\mathbb{H}^n$ e dt^2 é a métrica de $\mathbb{R}$.

Denotamos por $\pi : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n \times \{0\}$ a projeção usual. Chamaremos de slices cada cópia de $\mathbb{H}^n$, ou seja, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos o slice $\mathbb{H}^n \times \{t\}$. Se γ é uma geodésica contida no slice $\mathbb{H}^n \times \{0\} \equiv \mathbb{H}^n$, chamaremos $\gamma \times \mathbb{R}$ o 2-plano vertical em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Observe que um plano vertical é isométrico a $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.3 *Seja $\widetilde{\sigma}$ um $(n-1)-$ plano hiperbólico em $\mathbb{H}^n$. Chamamos $P^n = \widetilde{\sigma} \times \mathbb{R}$ o hiperplano vertical em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.*

Dizemos que $\Sigma \subset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica se as geodésicas de Σ também são geodésicas do espaço ambiente. Daí concluímos que os slices $\mathbb{H}^n \times \{t\}$ e os hiperplanos verticais são totalmente geodésicos.

No decorrer do trabalho, usaremos com frequência folheações por hiperplanos verticais em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Tornaremos a partir de agora esta definição mais precisa.

Definição 2.4 *Seja P^n um hiperplano vertical em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, e seja $\gamma(t)$ uma geodésica horizontal orientada em $\mathbb{H}^n$, com t parâmetro de comprimento de arco ao longo de γ, $\gamma(0) = p_0 \in P$ e $\gamma'(0)$ ortogonal a P em p_0. Definimos a folheação orientada de hiperplanos verticais ao longo de γ, denotada por $P_\gamma(t)$, sendo hiperplanos verticais ortogonais a γ no ponto $\gamma(t)$ com $P = P_\gamma(0)$.*

É importante observar que as isometrias de $\mathbb{H}^n \times \{t\}$ seguidas de isometrias de $\{p\} \times \mathbb{R}$ são isometrias de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Desta forma, como as isometrias de $\mathbb{R}$ são as translações e reflexões, temos que as isometrias de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ são as isometrias provenientes das isometrias de $\mathbb{H}^n$ seguidas de uma translação vertical ou uma reflexão sobre um slice.

Em particular no caso $n = 2$, temos que se $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ é uma isometria positiva segue que:

1. Se f tem um único ponto fixo em $\mathbb{H}^2$, então f é isometria elíptica.
2. Se f tem um único ponto fixo no $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ e nenhum em $\mathbb{H}^2$, então f é isometria parabólica.
3. Se f tem dois pontos fixos no $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ e nenhum em $\mathbb{H}^2$, então f é isometria hiperbólica.

Por exemplo, as rotações hiperbólicas em torno de um ponto de $\mathbb{H}^2$ caracterizam uma isometria elíptica. Como exemplo de isometria parabólica, podemos citar as translações euclidianas horizontais: $f(z) = z + a$. E no caso de isometria hiperbólica as homotetias:$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0)$, com foco no bordo assintótico. Para um estudo mais aprofundado veja [19].

Lembramos ainda que $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é um espaço homogêneo, isto é, para cada $x, y \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ existe uma isometria de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ que leva x a y.

Definição 2.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio e seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em Ω. O gráfico vertical de u é o subconjunto de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ dado por*

$$Gr(u) = \{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}; (x_1, ..., x_n) \in \Omega \ \ e \ \ t = u(x_1, ..., x_n)\}.$$

2.4.1 Conexões

Utilizando o modelo do semi-espaço superior para $\mathbb{H}^n$ vamos encontrar os colchetes entre os campos E_i, E_j, com $i, j = 1, 2, ..., n+1$. Neste modelo temos que $\lambda = \dfrac{1}{x_n}$.

A partir de agora, vamos encontrar os colchetes $[E_i, E_j]$ e as conexões $\overline{\nabla}_{E_i} E_j$. Estes cálculos serão usados na seção 3.2.

Seja $\{E_1, E_2, ..., E_n, E_{n+1}\}$ o referencial ortonormal em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ dado por:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1}; \\ E_2 &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2}; \\ &\vdots \\ E_n &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_n}; \\ E_{n+1} &= \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

onde λ é o fator conforme da métrica e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\}$ é o referencial natural de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

De forma geral temos que:

$$\begin{aligned}
[E_i, E_j] &= \overline{\nabla}_{E_i} E_j - \overline{\nabla}_{E_j} E_i \\
&= \overline{\nabla}_{\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_j} - \overline{\nabla}_{\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{\lambda}[\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{\lambda})\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}] - \frac{1}{\lambda}[\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{\lambda})\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}] \\
&= -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial(\lambda)}{\partial x_i}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial(\lambda)}{\partial x_j}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda)E_j + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda)E_i \\
&= -x_n^2\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{x_n})E_j + x_n^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{x_n})E_i
\end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$[E_i, E_j] = \begin{cases} 0 \quad se \quad i = j \quad com \quad i = 1, ..., n+1 \\ 0 \quad para \quad i, j \neq n \\ 0 \quad se \quad i = n+1 \quad ou \quad j = n+1 \\ E_j \quad se \quad i = n \quad e \quad j \neq n, n+1 \\ -E_i \quad se \quad i \neq n, n+1 \quad e \quad j = n \end{cases}$$

Encontraremos a seguir as conexões $\overline{\nabla}_{E_i} E_j$ usando a fórmula seguinte:

$$2g(\overline{\nabla}_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)$$

Para isso, observe que:

$$\bullet 2\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_i \rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}
\bullet 2\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_j \rangle &= \langle [E_i, E_i], E_j \rangle - \langle [E_i, E_j], E_i \rangle + \langle [E_j, E_i], E_i \rangle \\
&= \langle 2[E_j, E_i], E_i \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet 2\langle \overline{\nabla}_{E_j} E_i, E_i \rangle &= \langle [E_j, E_i], E_i \rangle - \langle [E_i, E_i], E_j \rangle + \langle [E_i, E_j], E_i \rangle \\
&= \langle -[E_i, E_j] + [E_i, E_j], E_i \rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\bullet 2\langle \overline{\nabla}_{E_j}E_i, E_j\rangle = \langle [E_j,E_i],E_j\rangle - \langle [E_i,E_j],E_j\rangle + \langle [E_j,E_j],E_i\rangle$$
$$= \langle [E_j,E_i] - [E_i,E_j],E_j\rangle$$
$$= \langle -2[E_i,E_j],E_j\rangle$$

$$\bullet 2\langle \overline{\nabla}_{E_j}E_i, E_k\rangle = \langle [E_j,E_i],E_k\rangle - \langle [E_i,E_k],E_j\rangle + \langle [E_k,E_j],E_i\rangle$$

Portanto,

$$\overline{\nabla}_{E_i}E_j = \begin{cases} E_n \quad se \quad i=j \quad com \quad i=1,...,n-1; \\ 0 \quad se \quad i=j \quad com \quad i=n,n+1; \\ 0 \quad se \quad i\neq j \quad com \quad i=1,...,n-1 \quad e \quad j=1,...,n+1; \\ -E_j \quad se \quad i\neq j, \quad com \quad i=n \quad e \quad j=1,...,n-1; \\ 0 \quad se \quad i\neq j \quad com \quad i=n \quad e \quad j=n,n+1; \\ 0 \quad se \quad i\neq j \quad com \quad i=n+1 \quad e \quad j=1,...,n+1. \end{cases}$$

2.4.2 Curvatura

Como é bem conhecido, se $\mathcal{N}$ é uma variedade Riemanniana orientável de dimensão $n+1$ e $\mathcal{M}$ é uma subvariedade de $\mathcal{N}$ de dimensão n, ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, R e $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, i.e.,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

e S o operador forma de $\mathcal{M}$ associado ao seu normal unitário N, i.e., $SX = -\overline{\nabla}_X N$, então as seguintes equações são válidas para todo campo de vetores X,Y,Z em $\mathcal{M}$:

$$\bullet\ R(X,Y)Z - \overline{R}(X,Y)Z = \langle SX,Z\rangle SY - \langle SY,Z\rangle SX,$$

$$\bullet\ \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = \overline{R}(X,Y)N.$$

Estas equações são chamadas equações de Gauss e Codazzi respectivamente e são conhecidas como equações de integrabilidade. No caso em que $\mathcal{N}$

é um espaço forma, estas equações podem ser escritas como:

$$\bullet\ \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \kappa(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle)$$
$$= \langle SX,Z\rangle\langle SY,W\rangle - \langle SX,W\rangle\langle SY,Z\rangle,$$

$\bullet\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = 0$,onde κ é a curvatura seccional de $\mathcal{N}$, ou seja, $\kappa = 1, 0, -1$ para $\mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{H}^{n+1}$ respectivamente. Estas equações envolvem a métrica e a segunda forma fundamental de $\mathcal{M}$ e elas estão definidas intrinsicamente sobre $\mathcal{M}$. Neste caso estas equações são condições suficientes para que uma imersão em $\mathcal{N}$ seja isometria. Para detalhes veja [9] e [24]. Benoît Daniel em um de seus trabalhos [6] mostrou condições necessárias e suficientes para uma variedade Riemanniana de dimensão n ser imersa isometricamente em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ em termos da primeira e segunda forma fundamental e da projeção de um campo vetorial vertical sobre seu plano tangente.

Assim, no caso mais geral de uma variedade $\mathcal{N} = \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, as equações de Gauss e Codazzi não estão definidas intrinsicamente sobre $\mathcal{M}$, já que o tensor curvatura de Riemann de $\mathcal{N}$ está envolvido. Neste caso as equações de Gauss e Codazzi são escritas como:

$$\bullet\ R(X,Y)Z = \langle SX,Z\rangle SY - \langle SY,Z\rangle SX + \kappa(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X -$$
$$\langle Y,T\rangle\langle X,Z\rangle T - \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle Y + \langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle T + \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle X),$$

$\bullet\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = \kappa\nu(\langle Y,T\rangle)X - \langle X,T\rangle Y,$

onde $\kappa = 1$ e $\kappa = -1$ para $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ respectivamente, T é a projeção vertical do vetor vertical $\frac{\partial}{\partial t}$ sobre o espaço tangente de $\mathcal{M}$ e ν é a componente normal de $\frac{\partial}{\partial t}$, i.e., $\nu = \langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$.

A equação de Gauss pode ser formulada da seguinte maneira: A curvatura seccional $K(P)$ (para a métrica de $\mathcal{M}$) de todo plano $P \subset T\mathcal{M}$ satisfaz

$$K(P) = detS_P + \kappa(1 - \parallel T_P \parallel^2)$$

onde S_P é a restrição de S sobre P e T_P é a projeção ortogonal de T sobre P.

O resultado a seguir foi obtido por Benoît Daniel em [8, Teorema 3.3].

Teorema 2.1 *(Benoît Daniel) Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão n, ds^2 sua métrica e ∇ sua conexão. Seja S um campo de operadores simétricos $S_y : T_y\mathcal{M} \to T_y\mathcal{M}$, T um campo vetorial sobre $\mathcal{M}$ e ν uma função suave sobre $\mathcal{M}$ tal que $\| T \|^2 + \nu^2 = 1$. Seja $\vartheta^n = \mathbb{S}^n$ ou $\vartheta^n = \mathbb{H}^n$. Assuma que (ds^2, S, T, ν) satisfaz as equações de Gauss e Codazzi para $\vartheta^n \times \mathbb{R}$ e as seguintes equações:*

$$\nabla_X T = \nu SX, \quad d\nu(X) = -\langle SX, T \rangle.$$

Então existe uma imersão isométrica $f : \mathcal{M} \to \vartheta^n \times \mathbb{R}$ tal que o operador forma com respeito ao normal N associado a f é

$$df \circ S \circ df^{-1}$$

e tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N.$$

Além disso a imersão é única a menos de uma isometria global de $\vartheta^n \times \mathbb{R}$ preservando as orientações de ϑ^n e $\mathbb{R}$.