

3

Hipersuperfícies imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com segunda forma fundamental positiva

Este capítulo será dedicado a demonstração de um teorema tipo Hadamard-Stoker em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa, conexa, imersa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) com segunda forma fundamental estritamente positiva. Então Σ^n deve ser mergulhada e além disso, Σ^n é homeomorfa a \mathbb{S}^n ou a \mathbb{R}^n . No segundo caso, Σ^n é um gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^n \times \{0\}$ ou Σ^n tem um fim simples.*

Este teorema generaliza o resultado de José Espinar, Harold Rosenberg e José Gálvez [11] provado para o caso $n = 2$. Tal resultado será usado para iniciar a etapa indutiva na prova.

3.1

Teorema tipo Hadamard-Stoker em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Nesta seção vamos considerar Σ^n uma hipersuperfície em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ imersa, completa e conexa com segunda forma fundamental positiva. Munimos Σ^n com a métrica induzida, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|\Sigma}$, em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ que será denotada apenas por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. O operador forma S é definido como $SX = -\bar{\nabla}_X N$, $\forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde N é o campo normal unitário ao longo de Σ . Então $II(X, Y) = \langle SX, Y \rangle$ é a segunda forma fundamental de Σ e escolhemos o sinal de N para que seja positiva.

Vejamos abaixo a definição de fim simples:

Definição 3.1 *Seja $\Sigma^n \subset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície. Dizemos que Σ^n tem um fim simples se o bordo infinito da $\pi(\Sigma^n) \subset \mathbb{H}^n \times \{0\}$ é um único ponto $\theta_0 \in \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ e, além disso, a interseção de todo n -plano vertical que não contém θ_0 com Σ^n é vazia ou um conjunto compacto.*

O exemplo ilustrado na figura 3.1 foi obtido em [11] e nos dá uma idéia mais clara de uma superfície com curvatura extrínseca positiva que tem fim

simples em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Na seção 3.2 estenderemos este exemplo a dimensões maiores.

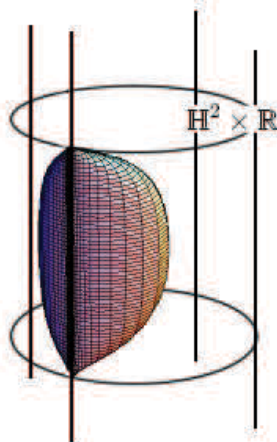


Figura 3.1: Superfície com fim simples em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

A proposição a seguir será usada na prova do teorema principal.

Proposição 3.1 *Seja Σ^n hipersuperfície imersa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com segunda forma fundamental positiva e P^n um hiperplano totalmente geodésico em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Se Σ^n e P^n intersectam transversalmente, então cada componente conexa Σ^{n-1} de $\Sigma^n \cap P^n$ é uma hipersuperfície de dimensão $n - 1$ com segunda forma fundamental $II(\Sigma^{n-1}) > 0$ em P^n .*

Demonstração. Seja $\gamma(t)$ uma curva em Σ^{n-1} , onde t é o parâmetro de comprimento de arco. Como P é um hiperplano totalmente geodésico, temos que $\bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma') = \nabla_{\gamma'}^P(\gamma')$, onde $\nabla^P, \bar{\nabla}$ são as conexões em P e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ respectivamente. Denotaremos $N_{\Sigma^{n-1}, P}, N_{\Sigma^n}$ o campo normal unitário em Σ^{n-1} e Σ^n respectivamente.

Queremos que $\langle \bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma'), N_{\Sigma^{n-1}, P} \rangle$ seja positiva. Note que $\langle \bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma'), N_{\Sigma^n} \rangle$ é positiva, já que por hipótese a segunda forma fundamental de Σ^n é positiva.

Escrevendo $N_{\Sigma^n}(\gamma(t)) = \bar{N} + N^\perp$, onde \bar{N} é tangente a P e N^\perp é ortogonal a P e tomando o produto interno com $\bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma')$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma'), N_{\Sigma^n} \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma'), \bar{N} + N^\perp \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma'), \bar{N} \rangle \end{aligned}$$

e como $\bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma') = \nabla_{\gamma'}^P(\gamma')$ e $\langle \bar{\nabla}_{\gamma'}(\gamma'), N_{\Sigma^n} \rangle > 0$ temos que $\langle \nabla_{\gamma'}^P(\gamma'), \bar{N} \rangle > 0$.

Como \bar{N} é um vetor na direção ortogonal a Σ^{n-1} temos que $N_{\Sigma^{n-1},P}$ é \bar{N} normalizado. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\gamma'}^P(\gamma'), \bar{N} \rangle &= \langle \nabla_{\gamma'}^P(\gamma'), |\bar{N}|N_{\Sigma^{n-1},P} \rangle \\ &= |\bar{N}| \langle \nabla_{\gamma'}^P(\gamma'), N_{\Sigma^{n-1},P} \rangle.\end{aligned}$$

E portanto, $\langle \nabla_{\gamma'}^P(\gamma'), N_{\Sigma^{n-1},P} \rangle > 0$ como queríamos.

□

O resultado abaixo foi provado em [11] e é exatamente o caso $n = 2$ em nosso teorema principal. Utilizaremos tal resultado sem dar a demonstração.

Teorema 3.2 *Seja Σ^2 uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, completa, conexa e com $K_e > 0$. Então Σ^2 é propriamente mergulhada. Além disso, Σ^2 é homeomorfa à \mathbb{S}^2 ou à \mathbb{R}^2 . No segundo caso, Σ^2 é um gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ ou Σ^2 tem um fim simples.*

A demonstração do teorema principal (**Teorema 3.1**) enunciado no início deste capítulo é feita a seguir:

Demonstração. Utilizaremos indução sobre n , para provar o resultado. Para $n = 2$, a afirmação é válida. É exatamente o teorema provado em [11].

Vamos então supor que o Teorema 3.1 seja válido para $n = k - 1 \geq 2$ e vejamos que vale para $n = k$.

Então nossa hipótese de indução é: Se Σ^{k-1} é hipersuperfície completa, conexa, imersa em $\mathbb{H}^{k-1} \times \mathbb{R}$ com segunda forma fundamental positiva, então Σ^{k-1} deve ser mergulhada e além disso, Σ^{k-1} é homeomorfa à \mathbb{S}^{k-1} ou \mathbb{R}^{k-1} . No segundo caso, Σ^{k-1} é um gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$ ou Σ^{k-1} tem um fim simples.

Enunciaremos agora um lema que será usado no decorrer da demonstração para o caso $n = k$.

Lema 3.1 *Considere $P_\gamma^k(t)$ folheação de hiperplanos verticais ortogonais ao longo de γ e transversos a Σ^k , onde γ é geodésica completa em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$. Seja $\Sigma^{k-1}(0)$ componente de $P_\gamma(0) \cap \Sigma^k$ que é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$ e $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ a variação contínua de $\Sigma^{k-1}(0)$. Então $\Sigma^{k-1}(t)$ não pode se tornar desconexa.*

Demonstração. Observe inicialmente que se $\Sigma^{k-1}(t)$ é conexo em algum valor de t , digamos $t = t_1$, então pela transversalidade existe um $\delta > 0$ tal que a continuação $\Sigma^{k-1}(t)$ de $\Sigma^{k-1}(t_1)$ é conexa para $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Assim se tiver um ponto onde a continuação de $\Sigma^{k-1}(0)$ não é conexa, então haverá um primeiro ponto. Seja \bar{t} o primeiro valor de t tal que $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ não é conexa.

Sejam A e B as componentes de $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ e sejam $x_{\bar{t}}$ e $y_{\bar{t}}$ pontos em A e B respectivamente. Pela transversalidade, podemos recuar os pontos $x_{\bar{t}}$ e $y_{\bar{t}}$ a x_t e y_t para t numa pequena vizinhança $(\bar{t} - \epsilon, \bar{t})$. Para $t < \bar{t}$ sabemos que os pontos x_t e y_t estão na mesma componente. Projetando estes pontos sobre \mathbb{H}^k podemos considerar a geodésica $\beta_t \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ que une $\pi(x_t)$ a $\pi(y_t)$ em cada valor de $t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t})$ e denotaremos $\mathcal{Q}_t = \beta_t \times \mathbb{R}$ os planos verticais $\subset P_\gamma(t)$. Como para $t < \bar{t}$ a interseção entre $P_\gamma(t)$ e Σ^k é conexa e é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em \mathbb{H}^{k-1} pela hipótese indutiva, isto significa que a geodésica β_t está dentro deste domínio e estes planos verticais \mathcal{Q}_t intersectam Σ^k em curvas estritamente convexas e conexas. Desta forma temos uma família de curvas estritamente convexas e conexas ligando um par de pontos que variam dentro destes planos \mathcal{Q}_t que são isométricos a \mathbb{R}^2 e no limite temos dois pontos ligados por uma curva estritamente convexa, que não é conexa, o que é impossível. Observe que a única maneira de continuar não conexo é que a curva ligando $x_{\bar{t}}$ a $y_{\bar{t}}$ chegasse a $-\infty$ (ou $+\infty$, dependendo da orientação de N). Entretanto, como esta curva limite é estritamente convexa e está contida num plano vertical (isométrico a \mathbb{R}^2) ela não pode sair para $-\infty$, caso contrário existiria ponto com normal horizontal e a hipótese da segunda forma fundamental ser positiva seria violada.

□

Iniciaremos a partir de agora a prova para o caso $n = k$.

Distinguiremos dois casos dependendo ou não da existência de um ponto $p \in \Sigma^k$ com hiperplano tangente vertical.

Caso A: Inicialmente vamos supor que não existe ponto $p \in \Sigma^k$ com k -plano tangente vertical. Neste caso mostraremos que Σ^k é mergulhada e homeomorfa à \mathbb{R}^k e que além disso Σ^k é um gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$.

Seja P um k -plano vertical que encontra Σ^k transversalmente. Então pela proposição 3.1, cada componente conexa Σ^{k-1} é uma $(k-1)$ -superfície com $II(\Sigma^{k-1}) > 0$ em P e pela hipótese de indução é uma $(k-1)$ -superfície

homeomorfa a \mathbb{S}^{k-1} ou a \mathbb{R}^{k-1} e no segundo caso é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$ ou tem um fim simples.

Observe que no caso em que Σ^{k-1} é homeomorfo à \mathbb{S}^{k-1} , existe ponto em \mathbb{S}^{k-1} com $(k-1)$ -plano tangente vertical, o que significa que Σ^k tem um k -plano tangente vertical neste ponto e como estamos supondo que não existe ponto $p \in \Sigma^k$ com hiperplano tangente vertical, o caso Σ^{k-1} homeomorfo à \mathbb{S}^{k-1} está excluído. O mesmo argumento também exclui o caso em que Σ^{k-1} é homeomorfo a \mathbb{R}^{k-1} e tem um fim simples. Desta forma sabemos que Σ^{k-1} é gráfico sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$.

Considere γ geodésica completa horizontal em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$, ortogonal a P e seja $P_\gamma(t)$ a folheação de hiperplanos verticais ortogonais a γ tal que $P_\gamma(0) = P$. Vamos analisar como $\Sigma^{k-1}(0)$ varia quando t tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Seja $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ variação contínua de $\Sigma^{k-1}(0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Pelo lema 3.1 já sabemos que, ela é uma componente $\Sigma^{k-1}(t)$ não pode se tornar desconexa. Assim, a componente $\Sigma^{k-1}(0) \subset P_\gamma(0) \cap \Sigma^k$ varia continuamente a uma $(k-1)$ -superfície mergulhada $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ quando t cresce, e como já vimos, ela é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$. A única mudança possível é $\Sigma^{k-1}(t)$ ir para o infinito quando t converge a algum \bar{t} e desaparecer em $P_\gamma(\bar{t})$. Similarmente $\Sigma^{k-1}(0)$ varia continuamente a um gráfico vertical $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Portanto Σ^k conexa garante que $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ tem no máximo uma componente para cada t . Assim, cada $\Sigma^{k-1}(t)$ não-vazia é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em \mathbb{H}^{k-1} . Logo, $\Sigma^k = \cup \Sigma^{k-1}(t)$ é topologicamente \mathbb{R}^k e é um gráfico vertical. Para ver que o domínio de Σ^k como gráfico é convexo, basta ver que a interseção de Σ^k com cada k -plano totalmente geodésico é convexa. Assim podemos considerar x e y pontos quaisquer em Σ^k e projetá-los sobre \mathbb{H}^k e considerar um hiperplano vertical $Q^k = \mu \times \mathbb{R}$ cuja projeção μ contenha os pontos projetados $\pi(x)$ e $\pi(y)$. Agora pela hipótese indutiva sabemos que $\Sigma^k \cap Q^k$ é gráfico vertical sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$ e desta forma o segmento de geodésica ligando $\pi(x)$ a $\pi(y)$ está contido nesse domínio.

Caso B: Suponha agora que exista um ponto $p_0 \in \Sigma^k$ com k -plano tangente vertical. Então mostraremos que Σ^k é mergulhada e homeomorfa à \mathbb{S}^k ou à \mathbb{R}^k , e neste último caso, Σ^k tem um fim simples.

Seja P k -plano vertical tangente a Σ^k em p_0 . Então existem vizinhanças $\mathcal{U} \subset \Sigma^k$ com $p_0 \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{V} \subset P$ tal que \mathcal{U} é um gráfico horizontal sobre \mathcal{V} . Como a segunda forma fundamental de Σ^k é positiva $\forall p \in \Sigma^k$, temos que Σ^k é localmente estritamente convexa e portanto podemos assumir que $\mathcal{U} \subset \Sigma^k$

está de um lado de P . Observe que $H^k \times \mathbb{R} \setminus P$ tem duas componentes e vamos escolher a componente exterior sendo a componente na qual $\mathcal{U} \setminus p_0$ está contida.

Seja γ a geodésica horizontal em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$ com $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma'(0)$ ortogonal a P (Escolha a orientação de γ tal que $\gamma(t)$ está do lado exterior para $t > 0$) e considere $P_\gamma(t)$ folheação de hiperplanos verticais ao longo de γ com $P_\gamma(0) = P$. Veja figura 3.2 abaixo.

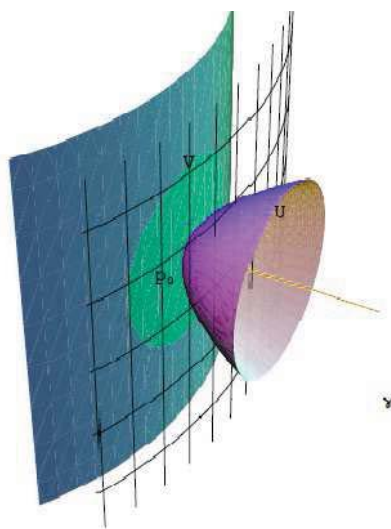


Figura 3.2: Vizinhança $\mathcal{U} \subset \Sigma^k$ e $\mathcal{V} \subset P$.

Denotaremos $\Sigma^{k-1}(0) = p_0$ a interseção entre $P_\gamma(0)$ e Σ^k . Usando a proposição 3.1 e o fato que Σ^k é estritamente convexa e localmente um gráfico, existe um $\epsilon > 0$ tal que $P_\gamma(t)$ e \mathcal{U} são transversas para $0 < t < \epsilon$ e as interseções $P_\gamma(t) \cap \mathcal{U}$ são $(k - 1)$ -superfícies compactas, mergulhadas e estritamente convexas para todo $0 < t < \epsilon$.

Denotaremos $\Sigma^{k-1}(t)$ a componente conexa de $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ que está contida em \mathcal{U} . Observe que é possível $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ ter outras componentes distintas de $\Sigma^{k-1}(t)$ para $0 < t < \epsilon$, mas nos preocuparemos apenas como $\Sigma^{k-1}(t)$ varia quando t cresce. Vamos denotar também $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ a variação contínua de $(k - 1)$ -superfícies quando $t > \epsilon$.

A partir de agora precisamos analisar alguns casos:

Caso B.1: Existe um valor $t = \bar{t} > 0$ onde $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ é compacta para $0 < t < \bar{t}$ e em $t = \bar{t}$, $P_\gamma(\bar{t})$ não é transverso a Σ^k .

Seja $\bar{t} > 0$ o menor valor de t onde $P_\gamma(t)$ não é transverso a Σ^k . Então como no caso de p_0 , terá uma vizinhança \mathcal{U}' (\mathcal{U}' está na união dos $P_\gamma(t)$ para $t < \bar{t}$) e p_1 em Σ^k tal que $\mathcal{U}' \setminus \{p_1\}$ será inteiramente de um lado de

$P_\gamma(\bar{t})$. A conexidade de Σ^k garante que $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ será não-vazia para todo t , $0 \leq t \leq \bar{t}$, e assim \mathcal{U}' será do lado interno de $P_\gamma(\bar{t})$. Observe que enquanto tem transversalidade e compacidade as seções são difeomorfas (veja [17], teorema 3.1). Assim tanto $\mathcal{U} \cap P_\gamma(t)$ quanto $\mathcal{U}' \cap P_\gamma(t)$ são $(k - 1)$ -esferas. Portanto, neste caso Σ^k é topologicamente uma k -esfera.

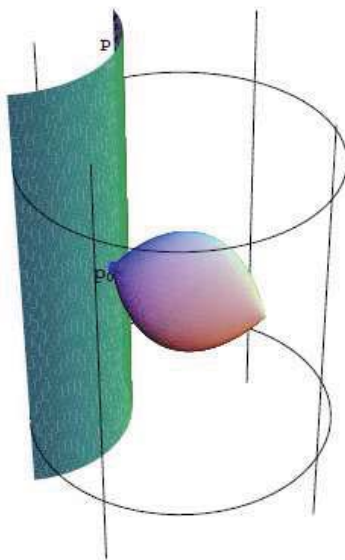


Figura 3.3: Σ^k homeomorfa à S^k .

Suponhamos então que vale transversalidade nos demais casos, desde que a interseção continue compacta.

Caso B.2: $\Sigma^{k-1}(t)$ permanece compacta e não-vazia quando t cresce.

Se $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ permanece compacta e não-vazia quando $t \rightarrow +\infty$, como Σ^k é conexa, Σ^k deve ser mergulhada. Além disso, $\Sigma^{k-1}(0)$ é um ponto e $\Sigma^{k-1}(t)$ é homeomorfa à S^{k-1} (pela hipótese de indução) $\forall t > 0$. Portanto temos que Σ^k é homeomorfa à \mathbb{R}^k . Agora pelo fato de $\Sigma^{k-1}(t)$ permanecer compacta, então $\partial_\infty \pi(\Sigma^k) = \{\theta\} \in S_\infty^{k-1}$, já que ao pegarmos a folheação $P_\gamma(t)$ ortogonal à geodésica γ , no limite destes hiperplanos a projeção de Σ^k será um ponto sobre S_∞^{k-1} (Observe que quando $t \rightarrow +\infty$, $\gamma(t) \rightarrow \theta$). Portanto neste caso Σ^k tem um fim simples.

No caso B.3 vamos olhar para a projeção de Σ^k sobre $H^k \times \{0\}$.

Caso B.3: Existe $\bar{t} > 0$ tal que $\Sigma^{k-1}(t)$ são compactas não vazias para $0 < t < \bar{t}$ e $\Sigma^{k-1}(t)$ é vazia para $t > \bar{t}$.

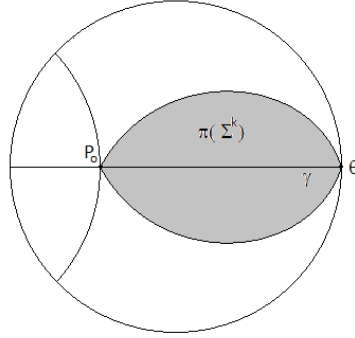


Figura 3.4: Projeção de Σ^k em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$.

Observe inicialmente que $P_\gamma(\bar{t})$ não pode intersectar Σ^k transversalmente, caso contrário $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ teria pontos além de \bar{t} , como consequência da transversalidade, o que contradiz o fato de $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k = \emptyset$ para $t > \bar{t}$. Além disso, pela compacidade de $P_\gamma(\bar{t}) \cup \mathbb{S}_\infty^{k-2}$ sabemos que existe ponto de acumulação $\bar{\theta}$ de $\pi(\Sigma^k)$ neste fecho. Agora se não houver ponto de acumulação em $P_\gamma(\bar{t})$, como estamos supondo que $P_\gamma(\bar{t}) \cap \Sigma^k = \emptyset$ para $t > \bar{t}$, também em $t = \bar{t}$ a interseção será vazia. Assim o ponto limite $\bar{\theta}$ deve estar em \mathbb{S}_∞^{k-2} . Resta saber se tal ponto é único.

Suponha que exista outro ponto de acumulação de $\pi(\Sigma^k)$ sobre $\partial_\infty \pi(P_\gamma(\bar{t}))$. Denotaremos tal ponto por $\tilde{\theta}$ e vamos escolher a parametrização de \mathbb{S}_∞^{k-2} de modo que $\tilde{\theta}$ seja o antípoda de $\bar{\theta}$. Seja μ o 2-plano gerado por $p_0, \bar{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ e considere ξ o $(k-1)$ -plano vertical ortogonal a μ passando por p_0 .

Vamos denotar $Q(\varphi)$ os k -planos verticais que contém ξ , para $\varphi \in \mathbb{R}$, tal que $Q(0)$ contém os pontos p_0 e $\bar{\theta}$ e $Q(\pi)$ contém os pontos p_0 e $\tilde{\theta}$. Queremos analisar a interseção destes k -planos $Q(\varphi)$ com Σ^k .

Inicialmente temos que $Q(0) \cap \Sigma^k$ e $Q(\pi) \cap \Sigma^k$ são $(k-1)$ -superfícies com fim simples. Além disso, para os k -planos $Q(\varphi)$ com $\varphi < 0$ ou $\varphi > \pi$ as interseções com Σ^k são $(k-1)$ -superfícies compactas, já que $\Sigma^k = \cup_{0 \leq t < \bar{t}} \Sigma^{k-1}(t)$.

Para $0 < \varphi < \pi$, $Q(\varphi) \cap \Sigma^k$ é uma $(k-1)$ -superfície, que pela hipótese de indução pode ser homeomorfa à \mathbb{S}^{k-1} ou \mathbb{R}^{k-1} e neste caso $\Sigma^{k-1}(\varphi)$ ou é um gráfico vertical sobre um domínio convexo em $\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\}$ ou $\Sigma^{k-1}(\varphi)$ tem um fim simples. Entretanto, $\Sigma^{k-1}(\varphi)$ não pode ser gráfico vertical, pois essa $(k-1)$ -superfície contém o ponto p_0 , que sabemos existir hiperplano tangente vertical neste ponto. Agora se para algum $\varphi = \bar{\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, $\Sigma^{k-1}(\bar{\varphi})$ for compacta (e portanto homeomorfa à esfera \mathbb{S}^{k-1}) conseguiremos separar estes pontos $\bar{\theta}$ e $\tilde{\theta}$, já que esta esfera $\Sigma^{k-1}(\bar{\varphi}) \subset Q(\bar{\varphi}) \cap \Sigma^k$ está dentro de uma k -bola aberta que é dada pela união dos $P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ para $t < \bar{t}$ e portanto é bordo

de um disco \tilde{D} de dimensão k em Σ^k . Tomando agora a geodésica α ligando os pontos $\bar{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ podemos tomar uma folheação de hiperplanos ortogonais ao longo de α , $T_\alpha(s)$, tal que $T_\alpha(0) = Q(\bar{\varphi})$ e existe algum s_0 que toca \tilde{D} por compacidade. Agora considerando a variação de $\Sigma^{k-1}(\bar{\varphi})$ sobre $\Sigma^k \cap T_\alpha(s)$ de $s = s_0$ a ∞ , temos que Σ^k está folheada por $\Sigma^{k-1}(s)$, onde $\Sigma^{k-1}(0) = T_\alpha(0) \cap \Sigma^k$ e $\tilde{\theta} \notin \partial_\infty \pi(\Sigma^k)$ (Aqui admitimos que a bola está do lado de $\tilde{\theta}$ e assim $\tilde{\theta}$ não é ponto de acumulação de $\pi(\Sigma^k)$).

Assim para cada φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$, a interseção entre $Q(\varphi)$ e Σ^k é uma $(k - 1)$ -superfície com fim simples. Desta forma, cada folha $Q(\varphi)$ tem um ponto de acumulação, e o conjunto formado por estes pontos é um conjunto fechado. Essencialmente, nessa esfera $\mathbb{S}_\infty^{k-2} = \partial_\infty(\pi(P_\gamma(\bar{t})))$, temos uma folheação singular por $(k - 3)$ -esferas começando no ponto $\bar{\theta}$ e terminando no ponto $\tilde{\theta}$, e cada uma dessas esferas contém um único ponto de acumulação. Usando um fato elementar de topologia geral, temos que se o gráfico de $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}_\infty^{k-2} = \partial_\infty(P_\gamma(\bar{t}))$ é um conjunto fechado, então a função f é contínua. Portanto, conseguimos uma curva contínua com todos os pontos no infinito de $\pi(\Sigma^k)$, onde $\bar{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ são as extremidades dessa curva.

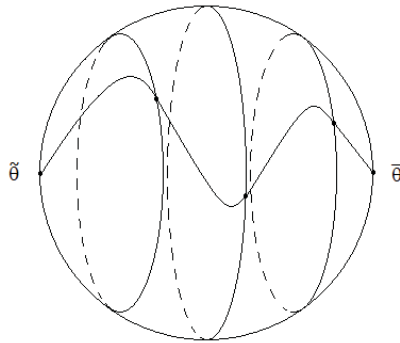


Figura 3.5: Curva de pontos no infinito de $\pi(\Sigma^k)$ ligando os pontos $\bar{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ em $P_\gamma(\bar{t})$.

Agora pegando outro ponto entre $\bar{\theta}$ e $\tilde{\theta}$, digamos θ , podemos olhar para o 2-plano η gerado por $p_0, \tilde{\theta}$ e θ e considerar ξ' sendo o $(k - 1)$ -plano ortogonal a η passando por p_0 e repetir o argumento anterior para essa nova folheação que está entre os hiperplanos que contêm os pontos p_0 e θ e p_0 e $\tilde{\theta}$. Mas isto mostra que este outro ponto θ junto com $\tilde{\theta}$ devem ser extremidades de uma nova curva que contém todos os pontos no infinito de $\pi(\Sigma^k)$, o que é um absurdo.

Caso B.4: $\Sigma^{k-1}(t) \subset P_\gamma(t) \cap \Sigma^k$ se torna não-compacta para algum t .

Observe que o conjunto dos t 's onde as interseções de $P_\gamma(t)$ com Σ^k são compactas é um aberto na reta. Disto decorre que existe um primeiro t , digamos \bar{t} tal que $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ não é compacta. $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ é o limite de $\Sigma^{k-1}(t)$ quando $t \rightarrow \bar{t}$.

Como $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ não é compacta então pela hipótese de indução, $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ é $(k-1)$ -superfície homeomorfa a \mathbb{R}^{k-1} e neste caso pode ser gráfico vertical sobre um domínio convexo em \mathbb{H}^{k-1} ou ter um fim simples.

O lema a seguir mostra que $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ não pode ser gráfico vertical.

Lema 3.2 *Seja Σ^k uma hipersuperfície imersa e completa em $\mathbb{H}^k \times \mathbb{R}$ com $II(\Sigma^k) > 0$ e considere $P_\gamma(t)$ folheação de hiperplanos verticais ao longo de γ (γ geodésica completa em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$) onde $\Sigma^{k-1}(0) = \{p_0\}$ é a interseção entre o hiperplano tangente vertical $P_\gamma(0)$ e Σ^k e $\Sigma^{k-1}(t)$ é a continuação de $\Sigma^{k-1}(0)$ para $t > 0$ determinada pela transversalidade. Se existe uma primeira folha, digamos $P_\gamma(\bar{t})$ em que a interseção transversa é não-compacta, então a componente $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ desta interseção não pode ser gráfico vertical.*

Demonstração. Seja $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ componente de $P_\gamma(\bar{t}) \cap \Sigma^k$ e vamos supor que $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ é gráfico vertical. Considere $r(\bar{t})$ a reta vertical que corta este gráfico exatamente em um ponto ao qual denotaremos por q e seja $\pi(q)$ a projeção vertical deste ponto sobre $\mathbb{H}^k \times \{0\}$. Seja μ a geodésica que une p_0 a $\pi(q)$ e denotaremos por $\mathcal{T} = \mu \times \mathbb{R}$ o 2-plano vertical em $\mathbb{H}^k \times \mathbb{R}$. Vamos analisar a interseção de \mathcal{T} com Σ^k . Seja β componente desta interseção que contém p_0 . Observe que β é curva que tangencia a reta $r_0 = P_\alpha(0) \cap \mathcal{T}$ no ponto p_0 e toca $r(\bar{t})$ no ponto q , já que $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ é gráfico vertical. Agora β deve ser curva mergulhada, conexa e estritamente convexa dentro do plano \mathcal{T} que é isométrico a \mathbb{R}^2 . Assim tem que intersectar $r(\bar{t})$ num segundo ponto, o que não ocorre.

□

Assim pelo lema anterior sabemos que o caso em que $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ é gráfico está excluído. Desta forma $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ tem um fim simples. Denotaremos 0 o fim simples de $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$ em \mathbb{S}_∞^{k-1} .

Seja $\Omega(\gamma, 0)$ o 2-plano hiperbólico em $\mathbb{H}^k \times \{0\}$ que contém a geodésica completa γ dada inicialmente e o fim simples, 0, de $\Sigma^{k-1}(\bar{t})$. O que faremos a seguir será construir uma folheação de $(k-1)$ -planos ortogonais a $\Omega(\gamma, 0)$ e

depois verificar o que ocorre quando olhamos para a interseção destes $((k-1)$ -planos hiperbólicos $\times \mathbb{R}$) com Σ^k .

Parametrizemos $\mathbb{S}_\infty^1 = \partial_\infty(\Omega(\gamma, 0))$ com os números de 0 a 2π tal que 0 seja o ponto de acumulação já considerado e π o outro ponto em $P_\gamma(\bar{t}) \cap \mathbb{S}_\infty^1$, tal que os pontos $0 < s < \pi$ sejam do mesmo lado que o ponto p_0 . Seja $\delta > 0$ e considere as geodésicas de δ a s , $\{\delta, s\}$, com $\delta < s < 2\pi$. Existe valor s entre δ e π onde a geodésica $\{\delta, s\}$ passa por p_0 . Vamos denotar $W(\delta, s)$ o k -plano vertical em $\mathbb{H}^k \times \mathbb{R}$ que contém a geodésica $\{\delta, s\}$ e é ortogonal ao plano $\Omega(\gamma, 0)$ para $\delta < s < 2\pi$. Denotaremos $\Sigma^{k-1}(\delta, s)$ a interseção de $W(\delta, s)$ e Σ^k . Queremos analisar o que ocorre com $\Sigma^{k-1}(\delta, s)$ para $\pi < s < 2\pi$.

Aqui podemos analisar 2 situações:

1. $\Sigma^{k-1}(\delta, s)$ são sempre compactas para todo $\pi \leq s < 2\pi$ e todo $\delta > 0$ suficientemente próximo de zero;

Neste caso, fazendo $\delta \rightarrow 0$ recaímos no caso B.2 e 0 é fim simples de Σ^k .

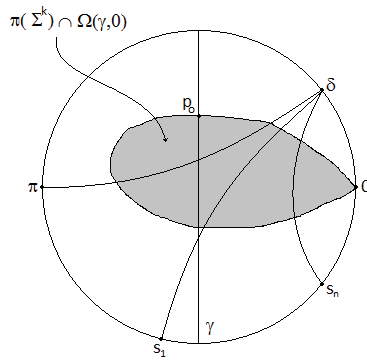


Figura 3.6: Situação 1 do caso B4.

2. Existem números $\delta > 0$ arbitrariamente perto de zero tais que $\Sigma^{k-1}(\delta, s)$ se torna não compacta para algum $\pi < s < 2\pi$;

Seja \bar{s}_δ o menor s com $\Sigma^{k-1}(\delta, \bar{s}_\delta)$ não compacta para um tal δ (\bar{s}_δ varia monotonicamente em δ). Observe que existe s entre δ e π onde $W(\delta, s)$ é tangente a Σ^k e nesse ponto há um hiperplano tangente vertical. Desta maneira podemos aplicar o lema 3.2 e obter que $\Sigma^{k-1}(\delta, \bar{s}_\delta)$ não pode ser gráfico vertical e portanto pela hipótese de indução é uma $(k-1)$ -superfície com fim simples. Denotaremos $\tilde{\phi}_\delta$ o fim simples de $\Sigma^{k-1}(\delta, \bar{s}_\delta)$. Observe que $\tilde{\phi}_\delta$ não está necessariamente no $\partial_\infty(\Omega(\gamma, 0))$. Seja δ_n sequência de pontos no $\partial_\infty(\Omega(\gamma, 0))$ com $\delta_n \rightarrow 0$ e seja \bar{s} o limite dos \bar{s}_{δ_n} . Observe que $\bar{s} \geq \pi$ e suponha que $\bar{s} < 2\pi$ para chegarmos a uma contradição. Assim a sequência $\tilde{\phi}_{\delta_n}$ no conjunto compacto S_∞^{k-1} possui

subsequência que converge para $\bar{\phi} \in S_\infty^{k-1}$. Vamos definir T_n como o $(k-1)$ -plano hiperbólico que contém a geodésica $\{\delta_n, \bar{s}_{\delta_n}\}$ e é ortogonal ao 2-plano $\Omega(\gamma, 0)$ e seja T o limite dos $(k-1)$ -planos T_n . Assim T é o $(k-1)$ -plano hiperbólico que contém a geodésica $\{0, \bar{s}\}$ e é ortogonal ao 2-plano $\Omega(\gamma, 0)$. Observe que $\tilde{\phi}_{\delta_n} \in \partial_\infty T_n$ e $\bar{\phi} \in \partial_\infty T$. Vejamos que $\bar{\phi}$ é ponto de acumulação de $\Sigma^k \cap (T \times \mathbb{R})$.

Para isso, faremos uso do seguinte lema:

Lema 3.3 *Considere uma folheação de k -planos totalmente geodésicos e verticais em $\mathbb{H}^k \times \mathbb{R}$ e considere a interseção entre Σ^k e estes k -planos. Denotaremos $W(r)$ os k -planos com as propriedades acima. Se $W(r) \cap \Sigma^k$ sempre tem um ponto de acumulação no infinito para $r < r_0$ e não para $r = r_0$, então Σ^k está totalmente do lado de $W(r_0)$ e se afasta de $W(r_0)$.*

Demonstração. Se $W(r_0)$ é limite de k -planos tal que a interseção com Σ^k tem um ponto de acumulação no infinito, então poderia ser que Σ^k fosse inteiramente de um lado do k -plano parametrizado por r_0 . Suponha que para $r < r_0$, mais perto de r_0 , tem ponto de acumulação no infinito que será um fim simples. Então isso vai dar uma curva de pontos no infinito e tem um ponto limite em $W(r_0)$. Não sabemos a priori que este ponto limite vai ser um ponto de acumulação de $W(r_0) \cap \Sigma^k$. Se este ponto, digamos ω , não é ponto de acumulação de $\Sigma^k \cap W(r_0)$, então existe uma vizinhança de ω em $W(r_0)$ que é disjunta de Σ^k . Como Σ^k é estritamente convexa, ela teria que se afastar do k -plano $W(r_0)$, e por isso não pode ser dos dois lados, caso contrário isso faria com que Σ^k fosse desconexa, ou seja, pela conexidade de Σ^k não pode ter outro ponto de acumulação na esfera no infinito de $W(r_0)$. Portanto, ω vai ser o único ponto de acumulação de Σ^k na esfera no infinito de $W(r_0)$.

□

Como acima, seja $T \times \mathbb{R}$ o k -plano que contém a geodésica $\{0, \bar{s}\}$. Sabemos que $\bar{\phi}$ é ponto no infinito de $T \times \mathbb{R}$ que é limite de pontos de acumulação de Σ^k . Usando o lema 3.3, podemos então concluir que se $\bar{\phi}$ não é ponto de acumulação de $\Sigma^k \cap (T \times \mathbb{R})$, então Σ^k seria totalmente de um lado de $T \times \mathbb{R}$. Mas este k -plano é totalmente geodésico e assim pela convexidade de Σ^k a mesma teria que se afastar cada vez mais de $T \times \mathbb{R}$ e isso mostraria que 0 não poderia ser ponto de acumulação de

Σ^k , o que é absurdo. O mesmo argumento mostra que 0 também é ponto de acumulação de $\Sigma^k \cap (T \times \mathbb{R})$.

Logo $\bar{\phi}$ é ponto de acumulação de $\Sigma^k \cap (T \times \mathbb{R})$ ao mesmo tempo que 0, contradizendo a hipótese indutiva.

Portanto, concluímos que $\bar{\phi} = 0$ e 0 é fim simples de Σ^k , terminando a etapa indutiva.

□

3.2

Exemplo de hipersuperfície com fim simples em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Esta seção é dedicada à construção de um exemplo de uma hipersuperfície completa, mergulhada com segunda forma fundamental positiva em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ que tem um fim simples. A idéia é considerar hipersuperfícies que são invariantes por um grupo de isometrias parabólicas, ou seja, aquelas que deixam invariantes uma família de horoesferas, com o mesmo ponto sobre o bordo infinito em cada slice $\mathbb{H}^n \times \{t\}$. Tomaremos o ponto ∞ sendo o ponto que a isometria parabólica fixa.

Para facilitar os cálculos utilizaremos o modelo do semi-espço superior para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Assim

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

munido com a métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Considere então

$$F_{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2, \dots, x_{n-1} + a_{n-1}, x_n, t)$$

isometria parabólica, onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e seja $\alpha(t) = (0, 0, \dots, 0, u(t), t)$ uma curva no plano $x_n t$, onde $u : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{I} = (t_1, t_2)$, $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$.

Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ a hipersuperfície invariante pelo grupo de isometrias parabólicas, $\Sigma = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} F_a(\alpha)$, isto é, a hipersuperfície parametrizada por $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u(t), t)$.

Temos que os vetores tangentes adaptados a Σ são:

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1} &= \lambda E_1 \\ \varphi_{x_2} &= \lambda E_2 \\ &\vdots \\ \varphi_{x_{n-1}} &= \lambda E_{n-1} \\ \varphi_t &= \lambda u_t E_n + E_{n+1}\end{aligned}$$

onde $\{E_1, E_2, \dots, E_n, E_{n+1}\}$ é o referencial ortonormal em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ dado por:

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_1}; \\ E_2 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_2}; \\ &\vdots \\ E_n &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_n}; \\ E_{n+1} &= \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{1}{x_n}$ é o fator conforme da métrica e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ é o referencial natural de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental $g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ são:

$$g_{ij} = \begin{cases} \lambda^2 & \text{se } i = j; \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \lambda^2 u_t^2 + 1 & \text{para } i = j = n \\ 0 & \text{para } i \neq j, \text{ com } i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

O campo Normal unitário é dado por:

$$N = \frac{1}{m}(0, 0, \dots, 0, 1, -\lambda u_t) = \frac{1}{m}(E_n - \lambda u_t E_{n+1}),$$

onde $m = \sqrt{1 + \lambda^2 u_t^2}$ e $\lambda = \frac{1}{x_n}$.

Os coeficientes da segunda forma fundamental são definidos como:

$$b_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{\varphi_j} \varphi_i, N \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ e $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

A seguir vamos calcular os coeficientes (b_{ij}) , lembrando que $\varphi_1 = \varphi_{x_1}, \varphi_2 = \varphi_{x_2}, \dots, \varphi_{n-1} = \varphi_{x_{n-1}}, \varphi_n = \varphi_t$. Aqui utilizaremos os cálculos das conexões $\bar{\nabla}_{E_j} E_i$ feitos no capítulo 2, seção 2.4.1.

- Se $i = j, i = 1, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned}
 b_{ii} &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_{x_i}} \varphi_{x_i}, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_{x_i}} \lambda E_i, N \rangle \\
 &= \langle \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda) E_i + \lambda \bar{\nabla}_{\varphi_{x_i}} E_i, N \rangle \\
 &= \langle \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda) E_i + \lambda \bar{\nabla}_{\lambda E_i} E_i, N \rangle \\
 &= \langle \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda) E_i, N \rangle + \lambda^2 \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N \rangle \\
 &= \lambda^2 \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \frac{1}{m} (E_n - \lambda u_t E_{n+1}) \rangle \\
 &= \lambda^2 \langle E_n, \frac{1}{m} (E_n - \lambda u_t E_{n+1}) \rangle \\
 &= \frac{1}{m} \lambda^2.
 \end{aligned}$$

- Se $i = j = n$

$$\begin{aligned}
 b_{nn} &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_t} \varphi_t, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_t} (\lambda u_t E_n + E_{n+1}), N \rangle \\
 &= \langle \frac{\partial}{\partial t} (\lambda u_t) E_n + \lambda u_t \bar{\nabla}_{\varphi_t} E_n + \bar{\nabla}_{\varphi_t} E_{n+1}, N \rangle \\
 &= \langle \frac{\partial}{\partial t} (\lambda u_t) E_n + \lambda u_t \bar{\nabla}_{(\lambda u_t E_n + E_{n+1})} E_n + \bar{\nabla}_{(\lambda u_t E_n + E_{n+1})} E_{n+1}, N \rangle \\
 &= \langle (-\lambda^2 u_t^2 + \lambda u_{tt}) E_n, N \rangle \\
 &= \langle (-\lambda^2 u_t^2 + \lambda u_{tt}) E_n, \frac{1}{m} (E_n - \lambda u_t E_{n+1}) \rangle \\
 &= \frac{1}{m} (-\lambda^2 u_t^2 + \lambda u_{tt}).
 \end{aligned}$$

- Se $i, j \neq n$

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} \varphi_{x_i}, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} \lambda E_i, N \rangle \\
 &= \langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda) E_i + \lambda \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} E_i, N \rangle \\
 &= \langle \lambda \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} E_i, N \rangle \\
 &= \langle \lambda \bar{\nabla}_{\lambda E_j} E_i, N \rangle \\
 &= \lambda^2 \langle \bar{\nabla}_{E_j} E_i, N \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

- Se $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = n$

$$\begin{aligned}
 b_{in} &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_n} \varphi_i, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_t} \varphi_{x_i}, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_t} \lambda E_i, N \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\lambda) E_i + \lambda \bar{\nabla}_{\varphi_t} E_i, N \right\rangle \\
 &= \langle -\lambda^2 u_t E_i + \lambda \bar{\nabla}_{(\lambda u_t E_n + E_{n+1})} E_i, N \rangle \\
 &= \langle -\lambda^2 u_t E_i, N \rangle + \langle \lambda^2 u_t \bar{\nabla}_{E_n} E_i, N \rangle + \lambda \langle \bar{\nabla}_{E_{n+1}} E_i, N \rangle \\
 &= \langle -\lambda^2 u_t E_i, \frac{1}{m} (E_n - \lambda u_t E_{n+1}) \rangle + \langle -\lambda^2 u_t E_i, \frac{1}{m} (E_n - \lambda u_t E_{n+1}) \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

e finalmente,

- Se $j = 1, \dots, n - 1$ e $i = n$, temos

$$\begin{aligned}
 b_{nj} &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_j} \varphi_n, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} \varphi_t, N \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} (\lambda u_t E_n + E_{n+1}), N \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda u_t) E_n + \lambda u_t \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} E_n + \bar{\nabla}_{\varphi_{x_j}} E_{n+1}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda u_t) E_n + \lambda u_t \bar{\nabla}_{\lambda E_j} E_n + \bar{\nabla}_{\lambda E_j} E_{n+1}, N \right\rangle \\
 &= \langle \lambda^2 u_t \bar{\nabla}_{E_j} E_n, N \rangle + \lambda \langle \bar{\nabla}_{E_j} E_{n+1}, N \rangle \\
 &= \langle \lambda^2 u_t \bar{\nabla}_{E_j} E_n, N \rangle \\
 &= \lambda^2 u_t \langle -E_j, N \rangle \\
 &= \lambda^2 u_t \langle -E_j, \frac{1}{m} (E_n - \lambda u_t E_{n+1}) \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Resumindo,

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m} \lambda^2 & \text{se } i = j \text{ com } i = 1, \dots, n - 1 \\ \lambda(-(u_t)\lambda + u_{tt}) & \text{para } i = j = n \\ 0 & \text{para } i \neq j, \text{ com } i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Assim a matriz $(b_{ij})_{n \times n}$ dos coeficientes da segunda forma fundamental

é:

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\lambda^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\lambda^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m}\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m}\lambda(-(u_t)^2\lambda + u_{tt}) \end{pmatrix}$$

Portanto, os autovalores da segunda forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{m}\lambda^2; \\ \mu_2 &= \frac{1}{m}\lambda^2; \\ &\vdots \\ \mu_{n-1} &= \frac{1}{m}\lambda^2; \\ \mu_n &= \frac{1}{m}\lambda(-(u_t)^2\lambda + u_{tt}). \end{aligned}$$

Queremos que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sejam positivos.

- Como $m = \sqrt{1 + \lambda^2 u_t^2} > 0$ e $\lambda^2 > 0$ temos $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \dots, \mu_{n-1} > 0$.
- Agora $\mu_n > 0$ se $-(u_t)^2\lambda + u_{tt} > 0$, já que $m > 0$ e $\lambda > 0$. Como $\lambda = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{u(t)} > 0$ temos $-\frac{(u_t)^2}{u(t)} + u_{tt} > 0 \Leftrightarrow -(u_t)^2 + uu_{tt} > 0$.

Desta forma conseguiremos um exemplo de uma hipersuperfície com fim simples se conseguirmos uma função $u(t)$ que satisfaça a condição $-(u_t)^2 + uu_{tt} > 0$.

Definindo

$$\begin{aligned} u : \mathcal{I} = (t_1, t_2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow u(t) &= c_1 \ln(t - t_1) + c_2 \ln(t_2 - t) \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes negativas e t_1 e t_2 são valores suficientemente próximos, conseguimos um exemplo de hipersuperfície com um fim simples.

Vejamus que a função $u(t)$ definida acima de fato satisfaz a condição $-(u_t)^2 + uu_{tt} > 0$.

Vamos inicialmente fazer o estudo da função $u(t)$:

Analisando os limites de $u(t)$ quando $t \rightarrow t_1$ e quando $t \rightarrow t_2$, obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} u(t) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_1} c_1 \ln(t - t_1)}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_1} c_2 \ln(t_2 - t)}_{cte\ finita} = +\infty.$$

e

$$\lim_{t \rightarrow t_2} u(t) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_2} c_1 \ln(t - t_1)}_{cte\ finita} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_2} c_2 \ln(t_2 - t)}_{+\infty} = +\infty.$$

Para completar a análise devemos encontrar os pontos críticos da função $u(t)$. Temos:

$$\bullet u'(t) = u_t = \frac{c_1}{(t - t_1)} - \frac{c_2}{(t_2 - t)}$$

Logo fazendo $u'(t_c) = 0$ obtemos que $t_c = \frac{c_1 t_2 + c_2 t_1}{c_1 + c_2}$.

Como o ponto crítico t_c é único concluímos que este é um ponto de mínimo global. Resta então saber se $u(t_c) > 0$.

$$\begin{aligned} u(t_c) &= c_1 \ln \left[\frac{c_1 t_2 + c_2 t_1}{c_1 + c_2} - t_1 \right] + c_2 \ln \left[t_2 - \frac{c_1 t_2 + c_2 t_1}{c_1 + c_2} \right] \\ &= c_1 \ln \left[\frac{c_1(t_2 - t_1)}{c_1 + c_2} \right] + c_2 \ln \left[\frac{c_2(t_2 - t_1)}{c_1 + c_2} \right] > 0, \end{aligned}$$

Assim se $0 < t_2 - t_1 < 1$ temos $u(t) > 0$.

Vejamos agora o sinal de $-(u_t)^2 + uu_{tt}$. Temos:

$$\bullet u''(t) = u_{tt} = -\frac{c_1}{(t - t_1)^2} - \frac{c_2}{(t_2 - t)^2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -(u_t)^2 + uu_{tt} &= -\left[\frac{c_1}{(t - t_1)} - \frac{c_2}{(t_2 - t)} \right]^2 \\ &\quad + [c_1 \ln(t - t_1) + c_2 \ln(t_2 - t)] \cdot \left[-\frac{c_1}{(t - t_1)^2} - \frac{c_2}{(t_2 - t)^2} \right] \end{aligned}$$

que desenvolvendo obtemos

$$\begin{aligned} -(u_t)^2 + uu_{tt} &= -\frac{c_1^2}{(t - t_1)^2} + \frac{2c_1 c_2}{(t - t_1)(t_2 - t)} - \frac{c_2^2}{(t_2 - t)^2} \\ &\quad - \frac{c_1^2 \ln(t - t_1)}{(t - t_1)^2} - \frac{c_1 c_2 \ln(t - t_1)}{(t_2 - t)^2} - \frac{c_1 c_2 \ln(t_2 - t)}{(t - t_1)^2} - \frac{c_2^2 \ln(t_2 - t)}{(t_2 - t)^2} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
-(u_t)^2 + uu_{tt} &= -\frac{c_1^2}{(t-t_1)^2} [1 + \ln(t-t_1)] - \frac{c_2^2}{(t_2-t)^2} [1 + \ln(t_2-t)] \\
&\quad + \frac{c_1 c_2}{(t-t_1)(t_2-t)} \left[2 - \frac{(t-t_1)}{(t_2-t)} \ln(t-t_1) - \frac{(t_2-t)}{(t-t_1)} \ln(t_2-t) \right]
\end{aligned}$$

Desta maneira temos que $-(u_t)^2 + uu_{tt}$ é positiva se :

$$\begin{cases} \ln(t-t_1) < -1 \Rightarrow t-t_1 < e^{-1} \\ \ln(t_2-t) < -1 \Rightarrow t_2-t < e^{-1} \end{cases}$$

e como estamos supondo que t_1 e t_2 são valores suficientemente próximos, então esta condição é bem razoável.

Observação 3.1 Sabemos que o 2-plano (x_n, t) é isométrico à \mathbb{R}^2 . Pela simetria esférica dada por $F_{(a_1, \dots, a_{n-1})}$ as outras curvaturas principais são iguais, e sendo horoesferas as seções com x_n e t constantes, tem curvatura positiva. Logo poderíamos escolher a função $u(t)$ tal que tem curvatura estritamente positiva e que $u(t)$ tende a ∞ nas duas extremidades do seu domínio e teremos outra maneira de conseguir exemplos de hipersuperfície com fim simples.