



Inês Silva de Oliveira

**Hipersuperfícies localmente convexas imersas
em $H^n \times R$**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Paul Schweitzer

Rio de Janeiro
Agosto de 2011



Inês Silva de Oliveira

**Hipersuperfícies localmente convexas imersas
em $H^n \times R$**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Schweitzer

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Renato Tribuzy

Departamento de Matemática - UFAM

Prof. Harold Rosenberg

IMPA

Prof. Manfredo do Carmo

IMPA

Prof. Walcy Santos

Departamento de Matemática - UFRJ

Prof. Rafael Ruggiero

Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Detang Zhou

Instituto de Matemática - UFF

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 08 de Agosto de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Inês Silva de Oliveira

Graduou-se em Matemática e obteve o grau de mestre na Universidade Federal do Amazonas em Geometria diferencial. Atualmente é professora assistente do Departamento de matemática da Universidade onde realizou seus estudos de graduação.

Ficha Catalográfica

Oliveira, Inês Silva de

Hipersuperfícies localmente convexas imersas em $H^n \times R$ / Inês Silva de Oliveira; orientador: Paul Schweitzer. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 47 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. Hipersuperfícies; Imersão; Curvatura; Convexidade. I. Paul Alexander Schweitzer, S. J. . II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

À minha família.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho. E em especial:

À Deus, pelo dom da vida e por me dar forças para enfrentar todos os obstáculos.

Aos meus pais Maria Antônia Silva de Oliveira (in memoriam) e Altemir Corrêa de Oliveira, que com simplicidade e carinho sempre procuraram me mostrar o caminho a seguir.

Ao meu marido Igor Padilha, pelo amor e apoio incondicional em todos os momentos.

À minha irmã Itelvina, que soube entender minhas dificuldades e ausências.

À Janine Tavares, José Padilha e Iury Padilha pela acolhida e incentivo.

Ao Orientador, professor Dr. Paul Schweitzer, pela paciente orientação, pelo grande incentivo e confiança que depositou em mim, e pela satisfação de podermos trabalhar juntos.

Aos professores Harold Rosenberg e José Espinar pela sugestão do tema e pelas valiosas conversas.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio, pelo valioso conhecimento que me forneceram.

Aos professores do Departamento de matemática da UFAM, em especial aos professores Renato Tribuzy, Ivan Tribuzy e Cícero Cavalcante, pela confiança e apoio desde o início de minha vida acadêmica.

Aos amigos e colegas que fiz na PUC-Rio, pelo prazer de suas amizades, conversas e troca de conhecimentos, em especial Carlos, Ady, Débora, Eduardo, Emília, Profeta, Joana, João Paulo, Luiz Felipe, Miguel, Rodrigo, Yuri.

Aos funcionários da secretaria do departamento de matemática da PUC-Rio, especialmente Creuza, Kátia e Otávio pela constante ajuda.

À FAPEAM, pelo auxílio concedido durante os anos de curso, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À PUC-Rio pelo auxílio e acolhida.

Resumo

Oliveira, Inês Silva de; Paul Alexander Schweitzer, S. J. (Orientador). **Hipersuperfícies localmente convexas imersas em $H^n \times \mathbb{R}$** . Rio de Janeiro, 2011. 47p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em 1897, J. Hadamard provou um resultado sobre superfícies compactas, localmente estritamente convexas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , mostrando que tais superfícies são mergulhadas e homeomorfas à esfera. A partir daí muitas generalizações foram feitas adaptando as hipóteses sobre a curvatura e considerando novos espaços em que estas superfícies pudessem ser imersas de forma que resultados análogos fossem obtidos. Seguindo este contexto, este trabalho generaliza um resultado tipo Hadamard-Stoker para hipersuperfícies localmente convexas imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Provamos que toda hipersuperfície completa, conexa, imersa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com segunda forma fundamental positiva deve ser mergulhada, homeomorfa à esfera S^n ou à \mathbb{R}^n , e no segundo caso estudamos o comportamento do fim.

Palavras-chave

Hipersuperfícies; Imersão; Curvatura; Convexidade.

Abstract

Oliveira, Inês Silva de; Paul Alexander Schweitzer, S. J. (Advisor).
Locally convex hypersurfaces immersed in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Rio de Janeiro, 2011. 47p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In 1897, J. Hadamard proved a result about compact, locally strictly convex surfaces in the Euclidean space \mathbb{R}^3 showing that such surfaces are embedded and homeomorphic to the sphere. Since then many generalizations were made adapting the assumptions about the curvature and considering new spaces in which these surfaces could be immersed so that analogous results were obtained. Following this context, this work generalizes a result of Hadamard-Stoker type to locally convex hypersurfaces immersed in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. We prove that every complete connected hypersurface immersed in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ with positive second fundamental is embedded, homeomorphic to the sphere \mathbb{S}^n or to \mathbb{R}^n , and in the second case we study the behavior of the end.

Keywords

Hypersurfaces; Immersion; Curvature; Convexity.

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	14
2.1	Generalidades sobre as imersões isométricas	14
2.2	Modelos para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n	16
2.3	Métrica Produto	20
2.4	O espaço $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	20
3	Hipersuperfícies imersas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com segunda forma fundamental positiva	27
3.1	Teorema tipo Hadamard-Stoker em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	27
3.2	Exemplo de hipersuperfície com fim simples em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	39
	Referências Bibliográficas	46

Uma noite eu tive um sonho...

Sonhei que estava andando na praia com o Senhor e através do céu, passavam cenas da minha vida.

Para cada cena que passava, percebi que eram deixados dois pares de pegadas na areia: um era meu e o outro era do Senhor.

Quando a última cena passou diante de nós, olhei para trás, para as pegadas na areia e notei que muitas vezes, no caminho da minha vida, havia apenas um par de pegadas na areia.

Notei também que isso aconteceu nos momentos mais difíceis e angustiosos do meu viver. Isso me aborreceu deveras e perguntei então ao Senhor:

- Senhor, Tu me disseste que, uma vez que resolvi te seguir, Tu andarias sempre comigo, em todo o caminho. Contudo, notei que durante as maiores atribulações do meu viver, havia apenas um par de pegadas na areia. Não compreendo porque nas horas em que eu mais necessitava de Ti, Tu me deixaste sozinho.

O Senhor me respondeu:

- Meu querido filho. Jamais eu te deixaria nas horas de provas e de sofrimento. Quando viste, na areia, apenas um par de pegadas, eram as minhas. Foi exatamente aí que eu te carreguei nos braços.

Margareth F. Powers, Pegadas na areia.