4
Teoria da Localização

4.1
Introdução à Localização

A localização de equipamentos públicos pertence a uma relevante linha da pesquisa operacional. O objetivo dos problemas de localização consiste em determinar onde deve ser instalada uma facilidade, de modo a otimizar uma variável de decisão. Em muitos problemas, as informações sobre demanda e capacidade do serviço prestado devem ser combinadas.

Segundo Daskin (1995), os problemas de localização de facilidades tratam de decisões sobre onde devem ser localizadas facilidades, considerando os clientes que podem ser servidos de forma a otimizar um certo critério.

Para Ballou (2006), a localização de instalações é quase sempre determinada por um fator fundamental. A força direcionadora da localização de fábricas e armazéns, em geral, são os fatores econômicos envolvidos. No varejo, a localização é direcionada pelo potencial de receitas que a região pode gerar, ao invés de custos como acontece no caso de fábricas e armazéns.

Pizzolato (2000) define o problema de localização de um posto de serviço como a escolha de uma posição geográfica para sua operação de forma que seja maximizada uma medida de utilidade, satisfazendo diversas restrições, em particular restrições de demanda.

No caso de serviços (escolas, caixas automáticos, centros de reciclagem, hospital e etc.) o fator crucial é a acessibilidade do local. Para um serviço de emergência, o tempo de chegada da ambulância ao local do acidente é o fator determinante. Segundo Brown (1994), existe uma associação positiva entre a demora da chegada da ambulância ao local do acidente e a proporção de casos fatais e graves.

De acordo com Revelle et al. (1970), há distinções de objetivos entre os setores público e privado. No setor privado, o objetivo é maximizar lucros ou minimizar custos. No setor público a preocupação é a maximização do benefício oferecido à sociedade, ou minimização dos custos dos serviços oferecidos.

Os problemas de localização no setor público podem ser classificados em duas categorias :

- Localização de serviços não-emergenciais (Escolas, Aterros Sanitários, Agências de Correio, entre outras);
- Localização de serviços emergenciais (Hospitais, Serviços de atendimento de emergências por ambulâncias, estações do corpo de bombeiros).

Como medida de eficiência para a otimização, utiliza-se no primeiro caso a distância média percorrida ou o tempo médio despendido pelo usuário no trajeto. No segundo caso, a variável de decisão comumente utilizada é a abrangência máxima do equipamento coletivo.

De acordo com Ballou (2006), graças à disseminação da matemática aplicada e dos computadores, as abordagens de avaliação da localização de instalações são de natureza mais matemática que conceitual. Os modelos matemáticos de localização podem ser classificados em modelos exatos, modelos heurísticos e modelos de simulação.

Os métodos exatos são procedimentos com condições de garantir uma solução matemática ótima do problema de localização, ou no mínimo uma solução de aceitável precisão.

Os modelos de programação matemática são exemplos deste tipo de abordagem. Dentre os métodos, destaca-se a programação linear inteira combinada. Segundo Ballou (2006), ela é a metodologia usada preferencialmente nos modelos de localizações comerciais. Uma de suas vantagens é a capacidade de modelar os custos fixos de maneira ótima.

Esses métodos incorrem em algumas desvantagens, como o longo tempo de processamento de computador, uma grande necessidade de memória e uma definição comprometida quando aplicados a problemas práticos. Atualmente, essas desvantagens estão sendo superadas com os avanços dos recursos computacionais, fazendo com que esses modelos sejam processados mais rapidamente.

Um problema clássico de otimização combinatória é a localização de p-Medianas. A abordagem consiste em localizar numa rede qualquer p instalações (medianas), de tal forma que a soma das distâncias de cada nó de demanda até sua mediana mais próxima seja minimizada.

Já os métodos heurísticos não garantem o retorno da solução ótima como nos métodos exatos, porém permitem serem alcançadas boas soluções, com rapidez, a partir de numerosas alternativas. Existem na literatura alguns métodos heurísticos conhecidos para re*solver* o problema da p-Mediana.

Em seu trabalho, Hakimi (1964) utiliza o método de busca em árvore para encontrar as 3-medianas de um grafo com 10 vértices. Há também os métodos aproximados adotados por autores como Maranzana (l964), Teitz e Bart(1968), os quais se aplicam a problemas de maior porte.

Uma técnica heurística usada para resolver de forma aproximada problemas combinatórios é conhecida como relaxação lagrangeana/surrogate. O método já foi aplicado a outros problemas de otimização combinatória [Lorena e Lopes, 1994], [Lorena e Narciso, 1996], [Lorena e Senne, 1996], [Senne e Lorena, 1997], [Lorena e Senne, 1999], [Narciso e Lorena, 1999], [Senne e Lorena, 2000].

Por fim, os métodos de simulação não resultam em soluções ótimas como no caso dos métodos exatos, porém facilitam a tomada de decisão, pois os gerentes não precisam de qualificações técnicas, e, além disso, em muitos casos a compreensão dos modelos matemáticos torna-se extremamente complexa.

Para Ballou (2006), um modelo de simulação de localização de instalação refere-se a uma representação matemática de um sistema logístico por demonstrações algébricas e lógicas manipuláveis em computador.

4.2
Formulação Matemática

4.2.1
Modelo p-Mediana Capacitado (PMC)

O modelo da p-Mediana é considerado na literatura como um problema clássico de localização de facilidades e é provavelmente um dos modelos mais adotados.

A mediana ou centróide de um grafo G(V, A), sendo V o conjunto dos vértices do grafo e A o conjunto de arestas, é um vértice para o qual a soma das distancias aos demais vértices é mínima. Neste estudo serão abordados problemas com mais de uma mediana como solução, portanto são denominados problemas de p-Medianas ou p-Facilities.

O método consiste em localizar um subconjunto de vértices $V_p \in V$, com p vértices, em um dado grafo G= (V, A), de tal forma a minimizar a distância de cada vértice restante até seu vértice mais próximo em V_p. Então, pode ser definida a distância entre um vértice v_j V e um conjunto de vértices. Sendo mais preciso, a distância entre v_j e o subconjunto V_p é definida por:

$d(v_j,V_p) = \min. \{d(v_j,v_i)\}, v_iV_p$

E a distância entre o subconjunto V_p e o vértice v_j é dada por:

$d(V_p,v_j) = \min. \{d(v_i,v_j)\}, v_iV_p$

Se v_iV_p produz o mínimo nas equações acima, dizemos que v_j é alocado a v_i. A matriz de alocação [ij] é binária, sendo ij=1 se o vértice v_j é alocado a v_i, e 0 caso contrário.

Segundo Minieka (1977), é possível que a facilidade esteja localizada em um vértice e/ou sobre uma aresta; assim, dois conceitos são introduzidos.

Os primeiros são as chamada medianas, onde as facilidades devem ser localizadas somente nos vértices. O segundo conceito se refere às medianas absolutas, onde as facilidades podem ser localizadas sobre as arestas e nos vértices.

Sendo *p* a denotação do número de facilidades a serem localizadas, tem-se assim, respectivamente, o problema da determinação das p-Medianas e o problema da determinação das p-Medianas absolutas.

Esse problema, que foi inicialmente considerado por Hakimi (1964), apresenta diversas aplicações práticas, como na localização de diversas facilidades.

O modelo da p-Mediana pode ser considerado como um problema de alocação-localização (*location-allocation problem*), pois seu objetivo é localizar p-facilidades nos vértices de uma rede e alocar demandas dessas facilidades de forma a minimizar o total do produto peso (nesse estudo, população escolar) vezes a distância entre as facilidades e os pontos de demanda do consumidor. (Hakimi, 1964).

Assume-se que a facilidade pode ser localizada em qualquer local na rede, a localização ótima deve ocorrer nos nós. (Drezner e Drezner, 2006).

Segundo Drezner e Drezner (2006), algumas considerações são cruciais para o problema da p-Mediana. Deve-se considerar que os consumidores ou usuários escolherão a facilidade mais próxima a eles. Isso acontece quando eles dispõem da completa informação sobre as distâncias e fazem suas escolhas de forma racional. Outra consideração implícita no problema é que todas as facilidades são igualmente atrativas, porém, na realidade esse não é o caso para todos os clientes. Entretanto, para justificar essa premissa, assume-se que a maioria dos consumidores respeita as regras citadas acima.

O problema da p-Mediana Capacitado (PMC) corresponde aos casos em que a capacidade de uma instalação possui uma limitação em atender a demanda existente. O PMC é formulado a partir do problema da p-Mediana clássico.

Para Barcelos (2002), uma aplicação importante do modelo é nos casos em que a administração pública constrói escolas com capacidade padronizada.

Segue abaixo a formulação matemática do modelo que se encontra em Barcelos (2002).

$$v(PMC) = \text{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} dijxij$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} xij = 1 \quad \text{para todo } i \in N \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} xjj = p \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} qixij \le Qjxjj \quad \text{para todo } j \in N \qquad (4)$$

$$xij \in \{0, 1\}; \; i, j \in N \qquad (5)$$

Onde,

q_i = demanda associada ao vértice i

Q_j = capacidade da escola j

$[d_{ij}]nxn$ = Matriz simétrica de distâncias com $d_{ii} = 0$, para todo i.

$[x_{ij}]nxn$ = Matriz de alocação, $x_{ij}=1$ se toda a demanda do nó i é suprido a partir de uma instalação em j, e $x_{ij}=0$ caso contrário.

x_{jj} = 1 caso o nó i seja uma mediana e $x_{ii}=0$ caso contrário.

A restrição (2) garante que a população escolar do centróide i deverá ser atendida por uma única escola.

A restrição (3) garante o número de medianas (escolas) a ser localizada igual ao valor p. O número ótimo de p Medianas é um objetivo a ser alcançado no problema.

A restrição (4) corresponde a restrição de capacidade, onde a população escolar i será atendida apenas por locais onde existe uma instalação escolar estabelecida, respeitando a capacidade física das mesmas.

A restrição (5) corresponde às condições de integridade.

4.2.2
Modelo de Máxima Cobertura

Segundo Arakaki (2002), o Problema de Localização de Máxima Cobertura (*PLMC*) consiste em escolher locais para instalar facilidades de forma que o maior número de clientes (pontos de demanda) seja coberto, e determinar em qual facilidade cada cliente deverá ser atendido.

O Problema de Máxima Cobertura tem como objetivo maximizar a cobertura de uma determinada população em relação a um dado equipamento coletivo, de modo a estabelecer um raio de cobertura fora do qual o usuário deixa de ser coberto por esse equipamento. Portanto, o modelo tende a assegurar que o maior número de usuários seja atendido.

A variável de decisão é basicamente a distância ou o tempo de serviço, que são considerados críticos ao atendimento da demanda. Ou seja, o usuário é considerado coberto se estiver localizado dentro do raio de cobertura.

O PLMC tem como restrição da FO (função objetivo) a distância ou o tempo total a ser gasto pelo usuário de um determinado equipamento coletivo. Logo, é definida uma distância crítica de serviço (S).

De modo geral, o *PLMC* não faz restrições de capacidade e não exige que todas as áreas de demanda estejam cobertas; este problema tem como objetivo localizar *p* facilidades de modo que haja a máxima cobertura possível dentro da distância pré-definida *S*. Segue abaixo a formulação do problema descrita em Arakaki (2002).

$$v(PLMC) = \text{Max} \sum_{i \in N} Diyi \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \sum_{j \in Ni} xj \geq yi \quad \text{para todo } i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in M} xj = p \quad (3)$$

$$xj \in \{0, 1\}, \text{ para todo } j \in M \quad (4)$$

$$yi \in \{0, 1\}, \text{ para todo } i \in N \quad (5)$$

Onde:

$N = \{1, 2, ..., n\}$: conjunto de pontos de demanda;

$M = \{1, 2, ..., n\}$: conjunto de possíveis facilidades;

Di: a demanda de população da área *i*;

p: número de facilidades a serem localizadas;

dij= a menor distância do nó *i* ao nó *j*;

$Ni = \{j \in J \mid dij \leq S\}$;

S: distância de serviço - a área de demanda é coberta se está dentro desta distância;

yi = 1 se a área de demanda *i* é coberta, 0 caso contrário;

xj = 1 se a facilidade deve ser localizada em *j*, 0 caso contrário;

A restrição (2) garante que a população escolar será coberta por uma instalação escolar dentro do raio de abrangência S. No presente estudo, considerou-se S=1500 metros.

A restrição (3) garante o número de medianas (escolas) a ser localizada igual ao valor p.

4.2.3
Software AIMMS - *Advanced Integrated Multidimensional Modeling Software*

Os problemas de programação linear inteira combinada envolvem a otimização de uma função objetivo linear, sujeita a restrições que envolvam equações e inequações lineares.

Algumas ou todas as variáveis são solucionadas para serem inteiras. Eles são em geral mais difícil de serem resolvidos comparados aos problemas de programação linear.

Estes problemas são do tipo NP-Hard (Garey e Johnson, 1979), e assim o tempo para se obter uma solução ótima cresce exponencialmente à medida que aumentam os dados de entrada.

O software AIMMS apresenta funcionalidades específicas para modelar problemas de programação linear inteira combinatória, disponibilizando diversos *solvers* e permitindo o controle da performance de cada um.

O software suporta os seguintes *solvers*: XA, CPLEX, GUROBI, MOSEK e XPRESS.

O XA é usado tanto em programação linear quanto em programação linear inteira combinada. Na Programação Inteira combinada, o *solver* utiliza o algoritimo simplex.

O XPRESS é considerado um *solver* de alta performance para resolução de modelos de programação linear e programação inteira. O *solver* comporta o otimizador simplex, que inclui o método primal e dual, soluciona os problemas de programação linear, e também é usado o método *branch and bound* para a solução dos problemas de programação linear inteira combinatória.

Assim como o XPRESS, O CPLEX é um *solver* de alta performance para resolução de problemas e oferece vários algoritmos. Além dos otimizadores utilizados XPRESS, o *solver* utiliza métodos heurísticos para encontrar a solução do problema.

Algumas particularidades fazem com que o CPLEX seja mais eficiente que os demais *solvers*, como por exemplo a capacidade de lidar com matrizes de grande ordem; é, portanto, bastante robusto e capaz de otimizar problemas complexos do mundo real. Além disso, o CPLEX apresenta um tempo de solução bastante rápido comparado aos demais.

No presente estudo, foi utilizado o *solver* CPLEX para a resolução dos modelos da p-Mediana Capacitado e Máxima Cobertura, pois este possui um tempo de processamento mais rápido que os demais, além de contar com algoritmos específicos para solução de problemas de Programação Linear Inteira Combinatória.

De acordo com Ignácio e Filho (2004), o sistema AIMMS oferece uma notação de índice que possibilita capturar a complexidade de problemas reais, permitindo expressar muitos cálculos complexos de uma maneira compacta, sem a preocupação com o gerenciamento da memória ou considerações de estocagem de dados.

O software apresenta algumas vantagens como:

- Um ambiente adequado para modelar problemas de otimização;
- Interface de boa usabilidade pelo usuário final para suporte a decisão;
- Integração com a linguagem C, C++, Fortran e ferramentas de interface com as bases de dados através de ODBC/OLE DB;
- Utilização automática de um *solver* apropriado para encontrar uma solução ótima;

Na passagem de um problema real num modelo de otimização válido no AIMMS, alguns passos conceituais são necessários, como:

- Descrever os dados de entrada e de saída através de *sets* e indicadores indexados (*Index);*
- Especificar o modelo matemático;
- Especificar os procedimentos para o pré- e o pós-processamento dos dados;
- Inicializar os dados de entrada através de arquivos e banco de dados;
- Exibir os resultados ou transportá-los para um banco de dados.

Em Ignácio e Filho (2004) são descritos a forma de declaração do problema e os atributos no ambiente AIMMS. Seguem abaixo alguns atributos e suas atribuições:

- Directions: Permite escolher entre maximizar e minimizar a função objetivo.
- Variable: Define o conjunto ou um subconjunto de variáveis que fazem parte do modelo a ser executado.
- Objective: Define a variável como a função objetivo do Modelo.
- Constraints: Especifica quais restrições fazem parte do programa matemático.

No Anexo I encontra-se a implementação dos modelos p-Mediana Capacitado e Máxima Cobertura no software AIMMS.