

1

Introdução

Uma geodésica em uma variedade riemanniana pode ser caracterizada de várias formas: Do ponto de vista variacional, uma curva diferenciável por partes é geodésica se para toda variação própria (que mantém extremos fixos) a curva é um ponto crítico do funcional de energia associado a variação; do ponto de vista de equações diferenciais, uma curva diferenciável por partes é uma geodésica se a derivada covariante do campo tangente da curva é zero, ou seja é uma curva sem aceleração. A questão é que o sistema de equações diferenciais que define as geodésicas é de segunda ordem e não linear, assim o que é feito após uma linearização é encara-lo como um campo de vetores no fibrado tangente. Este processo dá origem ao fluxo geodésico que é o objeto de estudo desta dissertação.

Algumas perguntas surgem naturalmente: À partir de hipóteses sobre a geometria da variedade o que é possível inferir sobre o comportamento do fluxo geodésico? Ou por outro lado, se é conhecido alguma informação sobre o comportamento das geodésicas é possível saber algo sobre a geometria?

Nesta dissertação são discutidos dois teoremas, cada um dando pistas sobre uma destas perguntas. No teorema de Anosov é pedido que a variedade possua curvatura não positiva e seja compacta para então obter um resultado sobre a dinâmica do fluxo. Já no teorema de Hopf, supõe-se que o toro bidimensional não possua pontos conjugados. Uma variedade riemanniana não possui pontos conjugados se a aplicação exponencial é não singular em todo ponto. Segue do teorema de Cartan-Hadamard que uma variedade de curvatura não positiva não possui pontos conjugados. Em verdade, a teoria de variedades sem pontos conjugados é tema de pesquisa atual e possui interação com diversas áreas da matemática.

A meta do segundo capítulo é apresentar a métrica de Sasaki e a partir dela mostrar uma caracterização da diferencial do fluxo geodésico em função dos campos de Jacobi. Para isto, as duas primeiras seções são dedicadas a revisão de conceitos de geometria riemanniana, principalmente de métrica riemanniana e conexão de Levi-Civita. Com esses conceitos em mãos são

definidos os espaços vertical e horizontal, e em seguida a métrica de Sasaki que os torna ortogonais. Vale ressaltar que o campo geodésico possui uma representação muito simples com a definição desta métrica. A última seção é dedicada a definição dos campos de Jacobi e o cálculo da diferencial do fluxo geodésico em função destes.

No terceiro capítulo são definidas variedades simpléticas e de contato. Dessa forma, a métrica de Sasaki induz uma forma simplética no fibrado tangente, que por sua vez induz uma forma de contato no fibrado tangente unitário. É mostrado que o fluxo geodésico é o fluxo hamiltoniano e de contato, respectivamente, destas formas. A estrutura de contato no fibrado tangente unitário dá origem a uma medida de probabilidade, chamada de medida de Liouville, que é preservada pelo fluxo geodésico. Isto fará um papel decisivo na demonstração do teorema de Hopf.

O quarto capítulo tem como objetivo demonstrar o teorema de Anosov em sua versão para superfícies. Este diz que o fluxo geodésico em uma variedade compacta de curvatura seccional negativa é Anosov. Para a demonstração é necessário o teorema de comparação de Rauch para obter estimativas exponenciais dos campos de Jacobi. A equação de Riccati é definida e logo em seguida demonstra-se um lema importante que terá consequências também no teorema de Hopf.

O quinto e último capítulo dedica-se a demonstrar o teorema de Hopf, um resultado notável que diz que uma métrica sem pontos conjugados no toro bidimensional é plana. Na demonstração são usados os teoremas de Gauss-Bonnet e de Birkhoff, que encontram-se enunciados neste capítulo.