2
A métrica de Sasaki

Para dar inicio ao estudo do fluxo geodésico em variedades de curvatura negativa ou sem pontos conjugados é preciso definir alguns conceitos básicos.

O sistema de equações diferenciais que define as geodésicas em uma variedade riemannina M é de segunda ordem e não linear. Este problema pode ser contornado se o objeto de estudo passar a ser TM, onde tal equação torna-se um sistema de equações lineares de primeira ordem e assim definem um fluxo, o fluxo geodésico. Nesse contexto definir uma métrica nesse espaço é essêncial, e é necessário que ela tenha boas propriedades no sentido que se relacione bem com a métrica original de M. Tal métrica em TM é precisamente a métrica de Sasaki. Uma vez definida a métrica de Sasaki, a diferencial do fluxo geodésico ganha uma apresentação muito clara em função dos campos de Jacobi.

2.1
Variedades diferenciáveis

Nesta seção é fixada notação que será usada ao longo do texto. Além de tornar preciso algumas informações importantes sobre a topologia da variedade.

Definição 2.1 *Uma* ***variedade diferenciável*** *de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, com α pertencendo a família de indices Λ, tais que:*

1. $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. *Para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ são diferenciáveis.*
3. *A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é máxima relativamente às condições anteriores.*

Observação 2.1 *Da definição anterior, observa-se uma variedade diferenciável M possui naturalmente uma estrutura de espaço topológico sendo um conjunto $A \subset M$ é aberto se $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$ é aberto.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

Sempre é suposto que M é conexa, *Haussdorf* e possui *base enumerável.*

Como referência, segue a definição de partição da unidade e um teorema que garante sua existência. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ é *localmente finita* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinça U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices. O *suporte* de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos pontos tais que f é diferente de zero.

Definição 2.2 *Uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ é uma partição diferenciável da unidade se:*

1. *Para todo α, $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$.*
2. *A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.*
3. *$\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$.*

Observação 2.2 *É usual dizer que a partição $\{f_\alpha\}$ está subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.*

Teorema 2.3 *Uma variedade diferenciável M possui uma partição da unidade diferenciável da unidade se e só se toda componente conexa de M é de Haussdorf e tem base enumerável.*

2.2 Métrica riemanniana e conexão afim

Ao longo deste texto as noções de métrica riemanniana e de conexão de Levi-Civita serão usadas frequentemente. Nesta seção são apresentadas as definições destes conceitos, e algumas proposições sem demonstração mostrando as principais propriedades destes dois conceitos e como eles se relacionam.

Definição 2.4 *Uma métrica riemanniana (ou estrutura riemanniana) em uma variedade M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = q \in \varphi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \mathrm{d}\varphi \cdot e_i$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é um função diferenciável em U.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

Na definição abaixo indicamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais em M, e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 2.5 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \to \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

2. $\nabla_X Y + Z = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

3. $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Sendo que $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Esta definição ainda não dá uma idéia muito clara de como a conexão age sobre os campos de M. A proposição a seguir lança alguma luz sobre o assunto.

Definição 2.6 *Defina a aplicação de projeção*

$$\pi : TM \to M$$

por $\pi(x, v) = x$.

Definição 2.7 *Dada uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ diferenciável, um **campo ao longo** de α é uma aplicação diferenciável $V : I \subset \mathbb{R} \to TM$ tal que*

$$\pi \circ V = \alpha.$$

Proposição 2.1 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ um campo vetorial $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ ao longo de α, chamado de **derivada covariante** de V ao longo de α, tal que, se W é um campo ao longo de α e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então:*

1. $\frac{\mathrm{D}(V+W)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}$;

2. $\frac{\mathrm{D}fV}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}V + f\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$;

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

3. *Se dado um campo* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que* $Y(\alpha(t)) = V(t)$ *então* $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}} Y$.

Observe que a derivada covariante fica inteiramente definida pelo último item da proposição anterior e pelo terceiro item da definição de derivada covariante. Uma conexão definida em M, pode ter certas propriedades que a relacionam com a métrica riemanniana definida. A conexão é dita *compatível com a métrica* quando para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ a equação

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

é sempre válida. A conexão também pode ter a propriedade de ser *simétrica*, isto é, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ acontece

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

sendo que $[X, Y] = XY - YX$.

Finalmente, ocorre que existe uma única conexão em M que satisfaz essas propriedades. Este é o resultado do próximo teorema que será apresentado sem demonstração.

Teorema 2.8 (Levi-Civita) *Dada uma variedade riemannina* M *existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *que satisfaz:*

1. ∇ *é simétrica.*

2. ∇ *é compatível com a métrica.*

Observação 2.3 *À única conexão afim* ∇ *que satisfaz o teorema anterior damos o nome de* ***conexão de Levi-Civita****.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

2.3
Uma métrica em TM

De agora em diante, M será sempre uma variedade riemanniana completa munida da métrica $\langle , \rangle$ e $\pi : TM \to M$ a projeção canônica. O primeiro passo em direção a métrica de Sasaki é definir intrinsecamente um fibrado, cujas fibras são tangentes às fibras de TM.

Definição 2.9 *$T(TM)$ possui um subfibrado chamado **subespaço vertical** que é dado por vetores da forma $\sigma'(0)$ sendo que $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to TM$, $\sigma(t) = (x, v + tw) \in TM$ e $v, w \in T_xM$. Em outras palavras*

$$V = \bigcup_{\theta \in TM} V(\theta), \qquad V(\theta) = ker(d_\theta \pi)$$

Observação 2.4 *Se M possui dimensão n então $V(\theta)$ possui dimensão n.*

Definição 2.10 *Seja N uma variedade riemanniana. Uma curva $z : J \subset \mathbb{R} \to N$ é **adaptada** a $\theta \in N$ e $\xi \in T_\theta N$ quando $z(0) = \theta$ e $z'(0) = \xi$.*

Definição 2.11 *Defina a aplicação $K : TTM \to TM$ da seguinte forma: Dados $\xi \in T_\theta TM$, e $z : I \subset \mathbb{R} \to TM$ uma curva adaptada a $\theta \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$ assim*

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0) \qquad \textit{sendo que } z(t) = (\alpha(t), Z(t)).$$

*Portanto, defina o **subespaço horizontal** como $H = \bigcup_{\theta \in TM} H(\theta)$ tal que $H(\theta) = ker(K_\theta))$.*

Na definição anterior, o subespaço horizontal no ponto $\theta \in TM$ é dado como o núcleo da aplicação K_θ, mas isso não ficou muito bem explicado, já que não se sabe exatamente como se comporta K nem se ela está bem definida. Sendo assim, o Lema a seguir vem para sanar essas dúvidas.

Lema 2.1 *1. K_θ não depende da curva z escolhida.*

2. K_θ é linear.

DEMONSTRAÇÃO:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

1. Observe que a derivada covariante $\nabla_{\alpha'} Z(0)$ depende apenas do valor $\alpha'(0)$, $Z(0)$ e de $\alpha'(0)(z_k)$ (as funções z_k são dadas por $Z = \sum z_k \frac{\partial}{\partial x_k}$). Considere
$$u : J \subset \mathbb{R} \to TM,$$
uma curva adaptada a $\theta \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$. Se $\beta = \pi \circ u$ então
$$\begin{aligned}\beta'(0) &= (\pi \circ u)'(0)\\ &= d_\theta \pi(u'(0))\\ &= d_\theta \pi(\xi)\\ &= \alpha'(0).\end{aligned}$$
E se $u(s) = (\beta(s), B(s))$ então
$$u(0) = z(0) \Rightarrow B(0) = Z(0),$$
logo
$$u'(s) = (\beta'(s), \sum \frac{db_k}{ds}\frac{\partial}{\partial x_k}) \Longrightarrow \frac{db_k}{ds}(0) = \frac{dz_k}{dt}(0)$$
pois $u'(0) = z'(0)$.

2. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z : I \subset \mathbb{R} \to TM$ uma curva adaptada a $\theta \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$.
$$\begin{aligned}\lambda z'(0) &= (\lambda \sum \alpha_k' \frac{\partial}{\partial x_k}, \lambda \sum \frac{dz_k}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k})(0)\\ &= (\sum \lambda \alpha_k' \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum \lambda \frac{dz_k}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k})(0)\end{aligned}$$
Portanto,
$$\begin{aligned}\lambda K_\theta(\xi) &= \lambda \nabla_{\alpha'} Z'(0)\\ &= \nabla_{\alpha'} \lambda Z'(0)\\ &= K_\theta(\lambda \xi).\end{aligned}$$
Falta mostrar que $K_\theta(\xi + \eta) = K_\theta(\xi) + K_\theta(\eta)$. Para tanto, sejam z e u curvas adaptadas ambas a $\theta \in TM$ e $\xi \in T_{theta} TM$ e $\eta \in T_{theta} TM$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

respectivamente.

$$\begin{aligned} K_\theta(\xi) + K_\theta(\eta) &= \nabla_{\beta'} B(0) + \nabla_{\alpha'} Z(0) \\ &= \nabla_{\beta'(0)} B + \nabla_{\alpha'(0)} Z \\ &= \nabla_{\alpha'(0)} B + Z \\ &= K_\theta(\xi + \eta), \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= u'(0) + z'(0) \\ &= (\alpha'(0), Z'(0)) + (\beta'(0), B'(0)) \\ &= (\alpha'(0) + \beta'(0), Z'(0) + B'(0)). \end{aligned}$$

Daí, basta escolher curvas convenientes.

□

Definição 2.12 *Defina* $L_\theta : T_x M \to T_\theta TM$, *sendo que* $\theta = (x, v) \in TM$, *da seguinte forma: dado* $v' \in T_x M$, *considere a curva* $\beta : I \subset \mathbb{R} \to M$ *adaptada a* $x \in M$ *e* $v' \in T_x M$ *e* $Z(t)$ *o transporte paralelo de* v *ao longo de* β. *Sendo assim, se* $\sigma(t) = (\beta(t), Z(t))$,

$$L_\theta(v') = \sigma'(0) \in T_\theta TM$$

O operador L_θ dá uma nova maneira, equivalente a anterior, de definir o espaço horizontal.

Observação 2.5 *Como o campo* Z *é obtido através do transporte paralelo de* v *ao longo de* β, *e assim* $K_\theta(L_\theta(v')) = \nabla_{\beta'} Z(0) = 0$. *Assim,* $Im(L_\theta) \subset H(\theta)$ *e o próximo lema mostra que vale a igualdade.*

Lema 2.2

1. L_θ *está bem definido.*
2. L_θ *é linear.*
3. $Ker(K_\theta) = Im(L_\theta)$
4. $d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_x M}$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

5. $d_\theta \pi \mid_{H(\theta)}: H(\theta) \to T_xM$ *e* $K_\theta \mid_{V(\theta)}: V(\theta) \to T_xM$ *são isomorfismos lineares.*

DEMONSTRAÇÃO:

1. O fato de $\nabla_{\beta'} Z = 0$ é o mesmo que, em coordenadas locais,

$$\sum_k \left(\frac{dz_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} z_j \beta'_i\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0.$$

Logo $\sigma'(0) = (v', Z'(0))$ está determinado por $\Gamma^k_{i,j}(0)$, $z_j(0)$ e β'_i, pois

$$\frac{dz_k}{dt}(0) = -\left(\sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} z_j \beta'_i\right)(0).$$

Mas $\Gamma^k_{i,j}(0)$ dependem apenas da métrica e $z_j(0) = \beta'_j(0) = v'_j$. Portanto $L_\theta(v')$ não depende da curva escolhida.

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda L_\theta(v') = \lambda \sigma'(0) = (\lambda v', \lambda Z'(0))$. Mas, novamente em coordenadas locais, $\lambda \frac{\mathrm{d}z_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\lambda z_k}{\mathrm{d}t}$, daí

$$\lambda L_\theta(v') = L_\theta(\lambda v').$$

Agora, sejam σ e μ curvas tais que $L_\theta(v') = \sigma'(0)$ e $L_\theta(u') = \mu'(0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} L_\theta(v') + L_\theta(u') &= \sigma'(0) + \mu'(0) \\ &= (v', Z'(0)) + (u', U'(0)) \\ &= (v' + u', (Z + U)'(0)) \\ &= L_\theta(v' + u'). \end{aligned}$$

3. Devido a Observação (2.5) temos que $Im(L_\theta) \subset Ker(K_\theta)$. Como as dimensões são iguais, conclui-se que $Im(L_\theta) = Ker(K_\theta)$.

4. Temos que $\sigma(t) = (\beta(t), Z(t))$ e assim, $\pi \circ \sigma = \beta(t)$. Nestas condições $d_\theta \pi(\sigma'(0)) = \beta'(0) = v'$, logo

$$d_\theta \pi \circ L_\theta(v') = v' \Longrightarrow d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_xM}.$$

5. Segue do item 3 que $Im(L_\theta) = Ker(K_\theta)$ e consequentemente

$$d_\theta(L_\theta(T_xM)) = T_xM \Longrightarrow d_\theta \pi(H(\theta)) = T_xM.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

Ou seja, $d_\theta\pi$ é um isomorfismo.

Para mostrar que que K_θ é um isomorfismo tome $v \in T_xM$, e considere

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$$

uma curva tal que $\gamma(0) = x$. A derivada covariante de um campo ao longo de uma curva é determinada pelos valores das derivadas da curva, pelos valores das derivadas do campo e pelos valores do campo. Sendo assim, seja V um campo ao longo de γ, tal que a derivada covariante de V no ponto x é v. Defina

$$z : I \subset \mathbb{R} \to TM$$

por $z(t) = (\gamma(t), V(t))$. Logo $K_\theta(z'(0)) = v$.

□

A partir do lema anterior tem-se $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$. E assim, defina a aplicação

$$j_\theta : T_\theta TM \to T_xM \times T_xM$$

por $j_\theta(\xi) = (d_\theta\pi(\xi), K_\theta(\xi))$, que decompõe o espaço $T_\theta TM$. E com o auxilio desta aplicação j_θ, de agora em diante o vetor ξ será da forma $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ pois ele está identificado com $j_\theta(\xi)$.

Agora temos condições de definir a métrica de Sasaki.

Definição 2.13 *Usando a decomposição $H(\theta) \oplus V(\theta) = T_\theta TM$, defina*

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_\theta = \langle d_\theta\pi(\xi), d_\theta\pi(\eta)\rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta)\rangle_{\pi(\theta)}$$

*Isto define uma métrica em TM, chama **métrica de Sasaki**.*

Definição 2.14 *Uma subvariedade $N \subset M$ é **totalmente geodésica** se toda geodésica γ de N é geodésica de M.*

Lema 2.3 *Considerando TM com a métrica de Sasaki, a aplicação $\pi : TM \to M$ torna-se uma submersão Riemanniana, com $\pi^{-1}(x) = T_xM$ totalmente geodésica em TM.*

Demonstração: Dados $\theta \in TM$ e $\xi,\ \eta \in H(\theta)$ tem-se

$$\begin{aligned}\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_\theta &= \langle d_\theta(\xi), d_\theta(\eta)\rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta)\rangle_{\pi(\theta)} \\ &= \langle d_\theta(\xi), d_\theta(\eta)\rangle_{\pi(\theta)}\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

Dado um ponto $(x, v) \in T_xM$, é sabido que

$$T_{(x,v)}T_xM = Ker(\mathrm{d}_{(x,v)}\pi) = V(x, v).$$

Portanto, quando a métrica de Sasaki é restrita a T_xM ela não depende do ponto escolhido, ou seja, torna-se um espaço euclideano, e consequentemente suas geodésicas são retas. Assim, basta mostrar que uma reta em T_xM é uma geodésica de TM na métrica de Sasaki. Tome uma reta parametrizada pelo comprimento de arco em T_xM então a derivada covariante de seu campo tangente será a derivada segunda, no sentido euclideano, pois o espaço é euclideano.

□

Por fim, o campo geodésico possui uma caracterização a partir da identificação j_θ. O campo geodésico $G : TM \to TTM$ é dado por

$$G(\theta) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \phi_t(\theta) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t)),$$

sendo que γ_θ, com $\theta = (x, v)$, é a geodésica que em $t = 0$ passa pelo ponto x com velocidade v. Pela definição de geodésica, seu campo tangente $t \to \gamma'_\theta(t)$ é paralelo ao longo de γ_θ, portanto $G(\theta) = L_\theta(v)$, e pela a identificação j_θ,

$$G(\theta) = L_\theta(v) = (v, 0).$$

2.4 Campos de Jacobi

Definição 2.15 *Seja γ_θ uma geodésica. Uma campo J ao longo de γ_θ é dito de **Jacobi** se satisfaz a equação:*

$$J'' + \mathrm{R}(\gamma'_\theta, J)\gamma'_\theta = 0.$$

Na equação acima, $J' = \frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{dt}}$ é derivada covariante de J ao longo de γ_θ, $\mathrm{R}(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ é o operador de curvatura de M.

A definição acima não dá uma intuição geométrica de quem são os campos de Jacobi, mas o fato é que tais campos surgem naturalmente como resultado de variações de geodésicas por geodésicas. Tal afirmação decorre do seguinte:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

dado $z : (-\epsilon, \epsilon) \to TM$ uma curva tal que $z(0) = \theta$ e $z'(0) = \xi$ defina

$$f(s,t) = \pi \circ \phi_t(z(s))$$

a variação da geodésica $\gamma_\theta(t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$. Dessa forma, $J_\xi(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ é campo de Jacobi pois como $0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f}{\partial t} - \mathrm{R}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial s} + \mathrm{R}(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

consequentemente,

$$J''_\xi + \mathrm{R}(\gamma'_\theta, J_\xi)\gamma'_\theta.$$

Como os campos de Jacobi satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem, cada campo fica completamente determinado pelas condiçoes iniciais $J(0)$ e $J'(0)$. Como $J_\xi(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = \mathrm{d}_{\phi_t(\theta)}\pi \cdot \mathrm{d}_\theta\phi_t \cdot z'(0)$, e $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} f = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} \pi \circ \phi_t(z(s)) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0} Z(s)$ então

$$\begin{cases} J_\xi(0) = \mathrm{d}_\theta\pi \cdot \xi \\ J'_\xi(0) = K_\theta(\xi) \end{cases} \tag{2-1}$$

Seja $J(\gamma_\theta)$ o espaço de todos os campos de Jacobi sobre γ_θ, que pelas considerações anteriores possui dimensão $2 \cdot dim(M)$. Considere a aplicação

$$i_\theta : T_\theta TM \longrightarrow J(\gamma_\theta)$$

dada por $i_\theta(\xi) = J_\xi$. Segundo a equação anterior, dado $\xi \in T_\theta TM$ existe um único campo de Jacobi associado e assim, i_θ é um isomorfismo.

Propriedades dinâmicas do fluxo geodésico decorrem do estudo de sua linearização, isto é, da ação do fluxo no espaço tangente.

$$\mathrm{d}\phi_t(\theta) : T_\theta TM \to T_{\phi_t(\theta)}TM.$$

O lema a seguir mostra a relação entre esta ação e os campos de Jacobi.

Lema 2.4 *Dado $\theta \in TM$, $\xi \in T_\theta TM$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que*

$$\mathrm{d}_\theta\phi_t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t)). \tag{2-2}$$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} J_\xi(t) &= \mathrm{d}_{\phi_t(\theta)}\pi \cdot \mathrm{d}_\theta\phi_t \cdot \xi \\ J'_\xi(t) &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA

Mas $\pi \circ \phi_t(z(s)) = \gamma_{z(s)}(t) \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi \circ \phi_t(z(s))) = \gamma'_{z(s)}(t) = \phi_t(z(s)).$$

Daí,

$$J'_\xi(t) = \left.\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \phi_t(z(s)) = K_{\phi_t(\theta)}(\mathrm{d}_\theta \phi_t(\xi)).$$

Finalmente, pela identificação $j_\theta(\xi) = (\mathrm{d}_\theta \phi(\xi), K_\theta(\xi))$ conclui-se que

$$\mathrm{d}_\theta \phi_t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t)).$$

□

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812247/CA