3
A estrutura simplética do fluxo geodésico

A partir do ponto de vista da mecânica classica, a geodésica é uma solução da equação de Euler-Lagrange considerando-se o lagrangeano $L(x,v) = \frac{1}{2}|v|_x$ O objetivo deste capítulo é dissertar a cerca de alguns quantificadores geométricos, forma simplética e de contato, que são preservados pelo fluxo geodésico.

3.1
Variedades simpléticas e de contato

Definição 3.1 *Uma 2-forma ω é dita de **simplética** se*

1. *É fechada,* $\mathrm{d}\omega = 0$
2. *É não-degenerada*
3. *É anti-simétrica*

Ao par (M, ω) da-se o nome de variedade simplética.

Definição 3.2 *Se (M, ω) é uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ é um função C^r. O campo X_H definido pela relação*

$$\mathrm{d}H(Y) = \omega(X_H, Y) \quad \textit{ou} \quad i_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$$

é chamado de campo Hamiltoniano ou gradiente simplético de H. O fluxo ϕ_t de X_H é chamado fluxo Hamiltoniano.

Observação 3.1 *ω não-degenerada implica a existência de X_H.*

Lema 3.1 *ω é preservada por ϕ_t, sendo que ϕ_t é o fluxo gerado por X_H.*

Demonstração: Seja $L_{X_H}\omega$ a derivada de Lie de ω com respeito a X_H. Considere a fórmula de Cartan

$$L_{X_H}\omega = i_{X_H}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_{X_H}\omega.$$

Como ω é fechada e $i_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$ conclui-se que $L_{X_H}\omega = 0$. Agora só resta mostrar que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\omega = 0$, já que se $\phi_t^*\omega$ não depender de t então $\phi_t^*\omega = \phi_0^*\omega = \omega$, que é o resultado procurado.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\omega &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi_{t+h}^*\omega - \phi_t^*\omega}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\phi_t^*\circ\phi_h^*\omega - \phi_t^*\omega}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\phi_t^*\circ(\frac{\phi_h^*\omega - \omega}{h})\\
&= \phi_t^*\circ\lim_{h\to 0}(\frac{\phi_h^*\omega - \omega}{h})\\
&= \phi_t^*\circ L_{X_H}\omega\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Definição 3.3 *Uma 1-forma α em uma variedade orientável de dimensão 2n-1 é chamada forma de* ***contato*** *se a (2n-1)-forma*

$$\alpha\wedge(\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$$

é uma forma de volume de SM. O par (M,α) é chamado variedade de contato e um fluxo de contato é um fluxo que preserva α.

É possível definir naturalmente em uma variedade de contato um campo X, dado pelas condições $i_X\alpha = 1$ e $i_X\mathrm{d}\alpha = 0$. O campo X é chamado de campo característico e seu fluxo de fluxo característico.

Lema 3.2 *O campo X é único e uma 1-forma α em uma variedade orientável M de dimensão $2n-1$ é de contato se, e somente se, para todo $x\in M$ a restrição de $\mathrm{d}\alpha_x$ ao núcleo de α em x é não degenerada.*

Demonstração: Primeiro, suponha que a 1-forma α é de contato. Por definição

$$\alpha\wedge(\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$$

é forma de volume, e assim dados $\{X_1, \ldots, X_{2n-1}\}$ campos linearmente independendes em um aberto $U \subset M$ a forma $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$ aplicada nesses campos não se anula em nenhum ponto. Portanto $\mathrm{d}\alpha$ também não se anula. Isto também prova a volta, já que se $\mathrm{d}\alpha$ se anula para algum par linearmente independente, a forma de contato também irá se anular em uma base que contém este par.

A unicidade do campo característico vem do fato de que satisfazendo essas condições, este campo torna-se dual a forma α. De fato, se em cada ponto x, $T_xM = ker(\alpha_x) \oplus H(x)$, então a primeira condição afirma que em todo ponto X possui componente em $H(x)$ e a segunda condição afirma que X não possui nenhuma componente no núcleo de α. $\square$

3.2
A estrutura simplética de TM

Do capítulo anterior segue que o espaço tangente a TM no ponto θ pode ser escrito como $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$. Defina

$$J_\theta : T_\theta TM \to T_\theta TM$$

por

$$J_\theta(\xi_h, \xi_v) = (-\xi_v, \xi_h).$$

Definição 3.4 *Defina a 2-forma Ω por*

$$\Omega_\theta(\xi, \eta) = \langle\langle J_\theta(\xi), \eta\rangle\rangle_\theta.$$

Segue da definição que

$$\Omega_\theta(\xi, \eta) = \langle \mathrm{d}_\theta\pi(\xi), K_\theta(\eta)\rangle - \langle K_\theta(\xi), \mathrm{d}_\theta\pi(\eta)\rangle.$$

Ω é antisimétrica e não-degenerada. Mais a frente é mostrado que Ω também é fechada, e portanto, uma forma simplética em TM.

Observação 3.2 *Admita que Ω é um forma simplética. Dessa forma o campo geodésico pode ser visto como o campo hamiltoniano da função $H(x, v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_x$.*

Proposição 3.1 $\mathrm{d}H = i_G\Omega$ *ou, da mesma forma,* $\forall\theta = (x, v) \in TM$ *e* $\forall\xi \in T_\theta TM$

$$\mathrm{d}_\theta H(\xi) = \Omega_\theta(G(\theta), \xi)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $z : (-\epsilon, \epsilon) \to TM$ uma curva adaptada a ξ, e escreva $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$. Observe que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\theta H(\xi) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (H \circ z) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \langle Z(t), Z(t)\rangle_{\alpha(t)} \\
&= \langle \nabla_{\alpha'} Z, Z\rangle_{\alpha(0)} \\
&= \langle K_\theta(\xi), v\rangle_x
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Omega_\theta(G(\theta), \xi) &= \langle \mathrm{d}_\theta\pi(G(\theta)), K_\theta(\xi)\rangle - \langle K_\theta(G(\theta)), \mathrm{d}_\theta\pi(\xi)\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}_\theta\pi(G(\theta)), K_\theta(\xi)\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}_\theta\pi(L_\theta(v)), K_\theta(\xi)\rangle \\
&= \langle v, K_\theta(\xi)\rangle
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.5 *O fluxo geodésico preserva a forma simplética* Ω.

DEMONSTRAÇÃO: Segue da Proposição (3.1) e do Lema (3.1). □

3.3
A forma de contato

Definição 3.6 *Defina a 1-forma* α *por*

$$\alpha_\theta(\xi) = \langle\langle \xi, G(\theta)\rangle\rangle_\theta = \langle \mathrm{d}_\theta\pi(\xi), v\rangle_x$$

Observe que $V(\theta)$ anula α_θ. A forma simplética Ω e a forma α estão relacionadas pela seguinte proposição:

Proposição 3.7

$$\Omega = -\mathrm{d}\alpha$$

Fica claro que Ω é fechada, pois é exata, propriedade que faltava para mostrar que Ω é simplética.

Antes da demonstração da Proposição, um Lema.

Lema 3.3 *Seja* $\overline{\nabla}$ *a conexão Riemanniana em* TM *compatível com a métrica de Sasaki. Para todo* $\eta \in H(\theta)$ *obtém-se* $\overline{\nabla}_\eta G \in V(\theta)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja U uma vizinhança normal em $x = \pi(\theta)$ e $E_1, \ldots, E_n$ um referêncial ortonormal em U, que é geodésico em x, isto é, $\nabla_{E_i} E_j(x) = 0$ para todo i, j. Defina

$$X_i(y, w) = L_{(y,w)}(E_i(y)) = (E_i(y), 0).$$

Dessa forma os campos $X_1, \ldots, X_n$ são ortonormais na métrica de Sasaki e geram o subfibrado horizontal em TU.

Devido à linearidade da conexão, basta mostrar que $\overline{\nabla}_{X_j} G \in V(\theta)$ para todo j. Como o campo geodésico é horizontal, é possível escrevê-lo como

$$G(y, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(y), w \rangle X_i.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_j} G &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{X_j} \langle E_i(y), w \rangle X_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_j(\langle E_i(y), w \rangle) X_i}_{(i)} + \underbrace{\langle E_i(y), w \rangle \overline{\nabla}_{X_j} X_i}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

Como π, a projeção canônica, é uma submersão Riemanniana, a componente horizontal de $\overline{\nabla}_{X_j} X_i$ é igual ao levantamento horizontal de $\nabla_{E_j} E_i$, que em θ é zero já que o referencial é geodésico neste ponto. Logo (ii) é nulo.

Falta mostrar que (i) também é vertical, ou seja, que ele se anula.

Seja $\alpha_j : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva integral de E_j tal que $\alpha_j(0) = x$ e Z_j o transporte paralelo de v ao longo de α_j.

$$\begin{aligned}
X_j \langle E_i(x), v \rangle &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle E_i(\alpha_j), Z_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{\alpha_j'} Ej, x \rangle + \langle E_j, \nabla_{\alpha_j'} Z_j \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

DEMONSTRAÇÃO:(*da proposição (3.7)*) É possível escrever

$$\mathrm{d}\alpha(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\alpha(\xi_2) - \xi_2\alpha(\xi_1) - \alpha([\xi_1,\xi_2])$$

Pela definição de α e pela simetria da conexão $\overline{\nabla}$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha(\xi_1,\xi_2) &= \xi_1\langle\langle\xi_2, G\rangle\rangle - \xi_2\langle\langle\xi_1, G\rangle\rangle - \langle\langle[\xi_1,\xi_2], G\rangle\rangle \\ &= \langle\langle\overline{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 - \overline{\nabla}_{\xi_2}\xi_1, G\rangle\rangle + \langle\langle\xi_2, \overline{\nabla}_{\xi_1}G\rangle\rangle - \langle\langle\xi_1, \overline{\nabla}_{\xi_2}G\rangle\rangle - \langle\langle[\xi_1,\xi_2], G\rangle\rangle \\ &= \langle\langle\xi_2, \overline{\nabla}_{\xi_1}G\rangle\rangle - \langle\langle\xi_1, \overline{\nabla}_{\xi_2}G\rangle\rangle\end{aligned}$$

Agora, considere uma base de campos em uma vizinhança em TM ao redor de θ, dada por $\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n\}$ sendo que os campos X_i são como no lema anterior e $Y_j(y,w) = J_{(y,w)}(X_j(y,w))$. Esta base é ortonormal em cada ponto (y,w), e como Y_i é tangente às fibras de TM o colchete $[Y_i,Y_j]$ é vertical. Portanto, como G é horizontal

$$\mathrm{d}\alpha_\theta|_{V(\theta)\times V(\theta)} = 0.$$

Pelo lema

$$\mathrm{d}\alpha_\theta|_{H(\theta)\times H(\theta)} = 0.$$

Sendo assim, para terminar a prova só resta mostrar que, para todo i,j,

$$\mathrm{d}\alpha_\theta(X_i,Y_j) = -\Omega_\theta(X_i,Y_j).$$

Primeiro, observe que para todo i,j o colchete $[X_i,Y_j]$ é igual a zero. De fato, tome $\theta = (x,v) \in TM$ e $\beta_j : (-\epsilon,\epsilon) \to TM$ uma curva integral de E_j passando por x, e seja $V_j(t)$ o transporte paralelo de v ao longo de β_j. Defina a aplicação

$$Z_{ij} : (-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon) \to TM$$

dada por

$$Z_{ij} = (\beta_i(t), sE_j(\beta_i(t)) + V_i(t)).$$

Agora, observe que

$$\pi \circ Z_{ij}(t,s) = \beta_i(t)$$

e portanto, para t fixo, $Z_{ij}(t,s) = Z^t_{ij}(s)$ é tangente as fibras com velocidade $E_j(\beta_j(t))$ logo

$$\frac{\partial Z_{ij}}{\partial s}(t,s) = Y_j(Z_{ij}(t,s)).$$

Por outro lado, $sE_j(\beta_i(t)) + V_i(t)$ é o transporte paralelo de $se_j + v$ ao longo de β_i, implicando que $\frac{\partial Z_{ij}}{\partial t}$ é horizontal, logo

$$\frac{\partial Z_{ij}}{\partial t}(0,s) = X_i(Z_{ij}(0,s))$$

e

$$\frac{\partial Z_{ij}}{\partial t}(0,s) = X_i(Z_{ij}(t,0)).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
[X_i, Y_j](f)(\theta) &= X_i Y_j(f)(\theta) - Y_j X_i(f)(\theta) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial (f \circ Z_{ij})}{\partial s}(0,0) - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial (f \circ Z_{ij})}{\partial t}(0,0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Computando $\mathrm{d}\alpha_\theta$ diretamente em X_i, Y_j

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha_\theta(X_i, Y_j) &= X_i \alpha_\theta(Y_j) - Y_j \alpha_\theta(X_i) - \alpha([X_i, Y_j]) \\
&= -Y_j \alpha_\theta(X_i) \\
&= -Y_j \langle\langle X_i, G \rangle\rangle_\theta
\end{aligned}$$

como $t \mapsto (E_j(x)t + v)$ é uma curva integral de Y_j,

$$\mathrm{d}\alpha_\theta(X_i, Y_j) = -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle E_i(x), E_j(x)t + v \rangle = -\delta_{ij}.$$

Por outro lado,

$$\Omega_\theta(X_i, Y_j) = \langle\langle J_\theta X_i, Y_j \rangle\rangle = \langle\langle Y_i, Y_j \rangle\rangle = -\delta_{ij.}$$

$\square$

Definição 3.8 *Para $\theta \in SM$ defina $S(\theta) := Ker\alpha_\theta$. Observe que $S(\theta)$ é o complemento ortogonal em $T_\theta SM$ de $G(\theta)$ com respeito a métrica de Sasaki.*

Lemma 3.9 *Dado $\theta = (x, v) \in SM$ as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Um vetor $\xi \in T_\theta TM$ pertence a $T_\theta SM$ se, e somente se, $\langle K_\theta(\xi), v \rangle = 0$;*
2. *$\Omega_\theta(\xi, G(\theta)) = 0$ para todo $\xi \in T_\theta SM$;*
3. *$\Omega_\theta(\xi, J_\theta G(\theta)) = 0$ para todo $\xi \in S(\theta) \subset T_\theta SM$;*

4. *O complemento ortogonal de $S(\theta)$ em $T_\theta TM$ é dado pelos subespaços gerados por $G(\theta)$ e $J_\theta G(\theta)$, portanto $S(\theta)$ e seu complemento ortogonal são invariantes por J_θ;*

5. *Seja $E \subset T_\theta SM$ complementar ao subespaço gerado por $G(\theta)$ então $\Omega_\theta|_{E\times E}$ é não degenerado.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela identificação $T_\theta SM \simeq T_xM \times \{w \in T_xM | w \perp v\}$, e pelo fato de que o subespaço vertical é núcleo da aplicação $\mathrm{d}_\theta\pi$ fica provado o primeiro item.

Dado $\xi \in T_\theta SM$ temos que

$$\Omega_\theta(\xi, G(\theta)) = \langle \mathrm{d}_\theta\pi(\xi), K_\theta(G(\theta))\rangle - \langle K_\theta(\xi), \mathrm{d}_\theta\pi(G(\theta))\rangle,$$

mas $K_\theta(G(\theta)) = 0$ e pelo primeiro item

$$\begin{aligned}\langle K_\theta(\xi), \mathrm{d}_\theta\pi(G(\theta))\rangle &= \langle K_\theta(\xi), v\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

decorrendo assim, o segundo item.

Para o terceiro item, observe que $\xi \in S(\theta)$ é o mesmo que dizer que $\xi \in Ker\alpha_\theta$, e assim $\langle \mathrm{d}_\theta\pi(\xi), v\rangle = 0$. Calculando Ω_θ :

$$\begin{aligned}\Omega_\theta(\xi, J_\theta G(\theta)) &= \langle \mathrm{d}_\theta\pi(\xi), K_\theta(J_\theta G(\theta))\rangle - \langle K_\theta(\xi), \mathrm{d}_\theta\pi(J_\theta G(\theta))\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}_\theta\pi(\xi), v\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por definição, $G(\theta)$ é ortogonal a $S(\theta)$ em $T_\theta TM$. Dado um vetor $\xi \in S(\theta)$,

$$\langle\langle J_\theta G(\theta), \xi\rangle\rangle = \langle v, K_\theta(\xi)\rangle,$$

logo $J_\theta G(\theta)$ é ortogonal a $S(\theta)$ porque como $\xi \in S(\theta) \subset T_\theta SM$ obtém-se pelo primeiro item que $\langle v, K_\theta(\xi)\rangle = 0$.

Pelo segundo item, $G(\theta)$ é uma direção nula em $T_\theta SM$. O fato é que esta é a única direção nula porque se houver outra então a forma passa a ser degenerada em $T_\theta TM$. Com efeito, escreva $T_\theta TM = J_\theta G(\theta) \oplus T_\theta SM$, aqui $J_\theta G(\theta)$ é considerado como o espaço gerado por este vetor. Como Ω é simplética,

$$\Omega_\theta(G(\theta), \eta) \neq 0$$

quando $\eta \in J_\theta G(\theta)$. Suponha que Ω possui uma direção nula $U \subset T_\theta SM$, complementar a $G(\theta)$. Portanto do fato de Ω ser simplética deve haver um subespaço de $T_\theta TM$ tal que $\Omega_\theta(U, \cdot)$ não se anule. Certamente este espaço não está contido em $T_\theta SM$. Dessa forma, suponha que este subespaço é $J_\theta G(\theta)$. Logo, o espaço U é o mesmo que o gerado por $G(\theta)$, uma contradição. Fica assim provado o quinto item. $\square$

Agora é possível mostrar que o fluxo geodésico preserva uma forma de volume em SM, chamada de **forma de Liouville** que dá origem a uma medida de probabilidade chamada de **medida de Liouville**.

Corolário 3.1 *α é uma forma de contato em SM.*

DEMONSTRAÇÃO: Já foi visto na seção de variedades simpléticas e de contato que basta mostrar que $d\alpha_\theta$ restrita a $S(\theta)$ é não degenerada. Isto é consequência do lema e da proposição anteriores. $\square$

Lema 3.4 *O fluxo geodésico em SM é o fluxo característico de α.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $H : SM \to \mathbb{R}$ a função energia dada por $H(x, v) = |v|_x^2$. Tome $\theta \in SM$ e observe que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(G(\theta)) &= \langle d_\theta\pi(G(\theta)), v\rangle \\ &= \langle v, v\rangle \\ &= 1, \end{aligned}$$

e para $\xi \in T_\theta SM$

$$\begin{aligned} i_G d\alpha_\theta(\xi) &= d\alpha_\theta(G(\theta), \xi) \\ &= -\Omega_\theta(G(\theta), \xi) = d_\theta H(\xi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que H é constante em SM. $\square$

Observação 3.3 *O fluxo geodésico preserva a forma de contato já que ele é o fluxo característico associado a ela.*

Lema 3.5 *$vol(SM) = vol(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot vol(M)$, sendo que $vol(\mathbb{S}^{n-1})$ é o volume da esfera de dimensão $n - 1$ contida em $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual.*

Demonstração: Ao redor de um ponto $(x, v) \in SM$ é possível obter uma vizinhança coordenada $U_x \subset M$ de x de forma que localmente SM é dado por $U_x \times \mathbb{S}^{n-1}$. Cubra M por uma quantidade enumerável de tais vizinhanças. Chame de U_j tais vizinhanças e de $\mathcal{O}$ a família de todas elas.

Tome uma partição da unidade Σ subordinada a $\mathcal{O}$. Assim, observe que

$$\int_{SM} \mathrm{d}\theta = \sum_j \varphi_j \int_{U_j \times \mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}\theta,$$

sendo que $\varphi_j \in \Sigma$. Pelo Teorema de Fubini

$$\int_{U_j \times \mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}\theta = \int_{U_j} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}v\mathrm{d}x.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_{SM} \mathrm{d}\theta &= \sum_j \varphi_j \cdot \int_{U_j \times \mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_j \varphi_j \cdot \int_{U_j} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&= (\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}v) \cdot (\varphi_j \cdot \sum_j \int_{U_j} \mathrm{d}x) \\
&= vol(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot vol(M)
\end{aligned}$$

□

Lema 3.6 *A forma de volume em SM induzida pela métrica de Sasaki coincide a menos de um sinal com $\frac{1}{(n-1)!}\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$, sendo que n é a dimensão de M.*

Demonstração: Dado $\theta \in SM$, seja U uma vizinhança normal em torno de $x = \pi(\theta)$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referêncial ortonormal que é geodésico em x, como no lema (3.3). Tal referêncial pode ser tomado tal que, se $\theta = (x, v)$, $E_1(0) = v$. Considere o subfibrado SU, e dado $(y, w) \in SU$ seja

$$X_i(y, w) = L_{(y,w)}(E_i(y))$$

com $i = 1, \ldots, n$ uma base para o espaço horizontal $H(y, w)$. Agora, defina $Y_i(y, w) = J_{(y,w)}(X_i(y, w))$. O referêncial de TU :

$$\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$$

é ortonormal na métrica de Sasaki e ainda, pelo primeiro item do lema (3.9), temos que $Y_i \in SM$ para $i \neq 1$ logo

$$\{X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n\}$$

é um referêncial ortonormal para SU. É preciso calcular $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$ no ponto θ, avaliada na base acima definida.

$$\begin{aligned}&\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n)\\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1})(X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n)\end{aligned}$$

e assim, $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$ avaliado na base $\{X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n\}$ é igual a

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\sigma \in S_{2n-1}} sgn(\sigma) \cdot \alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}, Y_{\sigma(2)}, \ldots, Y_{\sigma(n)}).$$

Agora alguns fatos irão simplificar muito as coisas. Primeiro, esta base foi tomada ortonormal, logo $\alpha(Y_j) = 0$ para todo j e $\alpha(X_i) = 1$ se $i = 1$ e do contrário é igual a zero. Segundo, como foi visto na demonstração da proposição (3.7):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha_\theta|_{H(\theta)\times H(\theta)} &= 0\\ \mathrm{d}\alpha_\theta|_{V(\theta)\times V(\theta)} &= 0\\ \mathrm{d}\alpha_\theta(X_i, Y_j) &= -\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Assim basta considerar permutações que fixam X_1 e que agrupam lado a lado X_i e Y_j quando $i = j$. Como

$$\mathrm{d}\alpha_\theta(X_i, Y_i) = -\mathrm{d}\alpha_\theta(Y_i, X_i) \tag{3-1}$$

então a menos de um sinal

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\sigma \in S_{2n-1}} sgn(\sigma) \cdot \alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}, Y_{\sigma(2)}, \ldots, Y_{\sigma(n)})$$

é igual a

$$\sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \cdot \alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_2, Y_2, \ldots, X_n Y_n).$$

Pois se trocar quaisquer par X_i, Y_i por outro par X_j, Y_j na (n-1)-upla

$$(X_2, Y_2, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_j, Y_i, \ldots, X_n, Y_n)$$

não não se muda de sinal. De fato, basta observar que entre X_i e X_j existem um número ímpar de termos, duplas X_k, Y_k e Y_i, e o mesmo acontece com Y_i e Y_j. Por outro lado, se trocarmos X_i com Y_i o sinal muda, mas pela equação (3-1)

$$\begin{aligned}&\alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_2, Y_2, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_n, Y_n)\\ &= -\alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_2, Y_2, \ldots, Y_i, X_i, \ldots, X_n, Y_n)\end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}&\alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_2, Y_2, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_n, Y_n)\\ &- \alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_2, Y_2, \ldots, Y_i, X_i, \ldots, X_n, Y_n)\\ &= 2\alpha \otimes (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_2, Y_2, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_n, Y_n).\end{aligned}$$

Finalmente, como S_{n-1} possui $(n-1)!$ elementos, a menos de um sinal

$$\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}(X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n) = (n-1)!$$

que é o resultado procurado. □