4
Teorema de Anosov

O teorema de Anosov é um resultado sobre o comportamento das geodésicas em variedades com curvatura negativa. Basicamente, ele diz que o fluxo geodésico em uma variedade riemanniana de curvatura seccional estritamente negativa possui a propriedade de ser Anosov, ou hiperbólico. Sem muito rigor, isto significa que existe uma decomposição do espaço transversal ao fluxo geodésico em dois subespaços linearmente independentes tais que um se contrai no futuro e outro se contrai no passado. Esta é uma informação forte sobre a dinâmica das geodésicas na variedade.

Este teorema foi inicialmente provado por Hedlund (6) para superfícies de curvatura constante negativa e Hopf em (8) estendeu a superfícies com curvatura negativa. Finalmente, Anosov provou o teorema como é conhecido atualmente.

A demonstração baseia-se em analisar o comportamento dos subespaços estáveis e instáveis ao longo do fluxo geodésico e então usar o teorema de comparação de Rauch para obter cotas para os campos de Jacobi. Para o estudar o comportamento de tais subespaços é definida a equação de Riccati, que é obtida a partir da equação de Jacobi.

Este capítulo dedica-se a mostrar este resultado em superfícies. A demonstração do teorema depende de dois lemas que fazemos apenas para o caso de superfícies, mas eles valem em qualquer dimensão. Inclusive a demonstração do teorema de Anosov dada neste texto vale em dimensão qualquer admitindo os lemas.

4.1
O Teorema de comparação de Rauch

O teorema de comparação de Rauch desempenha um papel importante em geometria riemannina. Ele oferece informações sobre o comportamento dos campos de Jacobi de uma variedade em função da comparação entre a curvatura desta e a curvatura de uma outra variedade. Por exemplo, ele dá cotas para a distância entre pontos conjugados ao longo de uma geodésica, além de aplicações à teoria de imersões.

Uma propriedade importante que é admitida no teorema de Rauch, e que aparecerá ao longo do texto é a existência de pontos conjugados.

Definição 4.1 *Seja M uma variedade riemanniana e $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica. Fixado os pontos $p = \gamma(t_0)$ e $q = \gamma(t_1)$, se existir um campo de Jacobi não trivial J tal que $J(t_0) = J(t_1) = 0$ então os pontos p e q são ditos* ***conjugados*** *ao longo da geodésica γ. De modo geral, a variedade M não possui pontos conjugados se para toda geodésica γ em M e todo ponto $p \in \gamma$ nenhum outro ponto de γ é conjugado a p.*

Teorema 4.2 *Sejam $\gamma : [0,a] \to M^n$ e $\tilde{\gamma} : [0,a] \to \tilde{M}^{n+k}$, $k \geq 0$, geodésicas com a mesma velocidade (i.e, $|\gamma'(t)| = |\tilde{\gamma}'(t)|$), e sejam J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente, tais que*

$$J(0) = \tilde{J}(0) = 0, \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle,$$

$$|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|.$$

Admita que $\tilde{\gamma}$ não possui pontos conjugados em $(0,a]$ e que, para todo $t \in (0,a]$ e todo $x \in T_{\gamma(t)}M$, $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$, tem-se

$$\tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(x, \gamma'(t)),$$

sendo que $K(x,y)$ é a curvatura seccional com respeito ao plano gerado pelos vetores x e y. Nessa condições

$$|\tilde{J}| \geq |J|.$$

Além disto, se para algum $t_0 \in (0,a]$, tem-se $|\tilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, então $\tilde{K}(\tilde{J}(t), \tilde{\gamma}(t)) = K(J(t), \gamma(t))$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Este enunciado, bem como sua demonstração e aplicações podem ser encontrados em (3). Observe que no caso de superfícies, o teorema de comparação de Rauch nada mais é que o teorema de comparação de Sturm de equações diferenciais.

4.2 Equação de Riccati

Para o teorema de Anosov em superfícies é necessário apenas a definição de equação de Riccati unidimensional, mas como todos os resultados deste capítulo podem ser generalizados para qualquer dimensão equação será definida de forma geral. Esta seção está baseada em (3) e (12)

Considere uma geodésica γ sem pontos conjugados ao longo da qual as curvaturas seccionais estão todas limitadas por um constante K_0. Seja $v \in T_{\gamma(0)}M$ um vetor ortogonal a $\gamma'(0)$, e seja J_T o campo de Jacobi ao longo de γ definido pelas condições $J_T(0) = v$ e $J_T(T) = 0$.

Lemma 4.3 *O campo de Jacobi J_T existe e é único.*

DEMONSTRAÇÃO: Considere $\mathcal{J}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(T) = 0$ e defina a aplicação $\Theta : \mathcal{J} \to T_{\gamma(0)}M$ dada por

$$\Theta(J) = J(0).$$

Observe que Θ é uma aplicação linear de espaços de mesma dimensão. Se existirem $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$, $J_1 \neq J_2$ e $J_1(0) = J_2(0)$ então

$$\begin{aligned} \Theta(J_1 - J_2) &= J_1(0) - J_2(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo o campo de jacobi $J_1 - J_2$ não é nulo e se anula em 0 e em T. Mas isto é uma contradição com o fato de γ não possuir pontos conjugados. Portanto Θ é injetiva e consequentemente um isomorfismo. Logo existe um único $J \in \mathcal{J}$ tal que $\Theta(J) = v$. $\square$

Lemma 4.4 *Seja J um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma : [0, a] \to M$. Então*

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0), \gamma'(0) \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO: Para tanto, basta derivar a função $f(t) = \langle J(t), \gamma'(t) \rangle$. Aqui (’) representa a derivada covariante.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle; \\ f''(t) &= \langle J''(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= -\langle R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

E assim, $f(t) = f'(0)t + f(0)$ é o resultado procurado. $\square$

Pelo lema anterior o campo J_T é perpendicular a $\gamma'(t)$ para todo t pois neste caso f é uma função linear que se anula em dois pontos.

Seja $e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t), e_n(t) = \gamma'(t)$ uma base ortonormal paralela ao longo de γ. Escreva os campos de Jacobi perpendiculares como

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle J(t), e_i(t) \rangle e_i(t).$$

Defina agora a matriz de curvatura por

$$(\mathbb{K}(t))_{ij} = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t) \rangle,$$

e observe que $\mathbb{K}$ é simétrica. Feitas essas considerações é possível a equação de Jacobi em sua forma matricial, com coordenadas dadas pela base $\{e_1, \ldots, e_n\}$,

$$\mathbb{J}''(t) + \mathbb{K}(\gamma(t))\mathbb{J}(t) = 0.$$

Para obter soluções para esta equação considere uma base de campos de Jacobi perpendiculares $\{J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)\}$ e $\mathbb{J}_{ij}(t) = \langle J_i(t), e_j(t) \rangle$. Assim, escreva todo campo de Jacobi perpendicular a γ' que pertence ao subespaço gerado por $\{J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)\}$ é escrito como

$$J(t) = \mathbb{J}(t)J(0).$$

Considere agora campos de Jacobi J_T^i tais que $J_T^i(0) = e_i(0)$ e $J_T^i(T) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Dessa forma é obtida uma nova solução da equação de Jacobi matricial que será denotada por $\mathbb{J}_T$. A matriz $\mathbb{J}_T$ é inversível para $t \neq T$ pois esta foi obtida a partir de condições iniciais linearmente independentes, e assim os campos J_T^i geram o subespaço de dimensão $n-1$ dos campos de Jacobi perpendiculares.

Defina $\mathbb{U}(t) = \mathbb{J}'(t) \cdot \mathbb{J}^{-1}(t)$, logo $\mathbb{U}$ satisfaz a equação diferencial

$$\mathbb{U}'(t) + \mathbb{U}^2 + \mathbb{K}(\gamma(t)) = 0$$

chamada equação de Riccati matricial. De fato, omitindo o parâmetro t a fim de simplificar,

$$\begin{aligned}\mathbb{U}' + \mathbb{U}^2 + \mathbb{K} &= \mathbb{J}'' \cdot \mathbb{J}^{-1} - \mathbb{J}' \cdot \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{J}' \cdot \mathbb{J}^{-1} + \mathbb{J}' \cdot \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{J}' \cdot \mathbb{J}^{-1} + \mathbb{K} \\ &= \mathbb{J}'' \cdot \mathbb{J}^{-1} + \mathbb{K} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbb{J}^{-1} \\ &= (\mathbb{J}'' + \mathbb{K} \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbb{J}^{-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplo 4.1 *Seja M^2 uma superfície de curvatura gaussiana constante igual a zero. A equação de Ricatti associada é*

$$u' + u^2 = 0.$$

É claro que $u(t) = 0$ para todo t é solução. Após resolver a EDO tem-se que a solução geral é

$$u(t) = \frac{1}{t + C}, \ C \in \mathbb{R} \ e \ t \neq -C,$$

e possui assíntota em $t = -C$.

Exemplo 4.2 *Seja M^2 uma superfície de curvatura gaussiana constante igual a $-K$, sendo que $K \in \mathbb{R}$ e $K \geq 0$. A equação de Ricatti associada é*

$$u' + u^2 - K = 0.$$

Após substituição direta, vemos que

$$u^s(t) = -\sqrt{-K}\,,\ u^u = \sqrt{-K}$$

são soluções constantes da equação. Para resolver a equação mais geralmente, considere a mudança de variáveis

$$x(t) = \exp \int_0^t u(s)\mathrm{d}s$$

e assim é obtida a equação diferencial linear, homogênea e com coeficientes constantes

$$x'' + x' - Kx = 0.$$

Sua solução geral é $x(t) = C_1 \exp(\sqrt{-K}t) + C_2 \exp(-\sqrt{-K}t)$, que leva diretamente a solução da equação de Riccati obtida como $u(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$. Devido *a mudança de variáveis as constantes C_1 e C_2 ficam ambas determinadas pelo valor de $u(0)$, por exemplo. Finalmente, a solução geral é*

$$u_s(t) = \sqrt{-K} \cdot \frac{\tanh(\sqrt{-K}t) + \frac{s}{\sqrt{-K}}}{1 + \frac{s}{\sqrt{-K}} \tanh(\sqrt{-K}t)}.$$

O lema a seguir é a chave para a demonstração do Teorema de Anosov. Ele primeiro foi demonstrado por Hopf em superfícies e depois por Green em qualquer dimensão. A demonstração a seguir é para o caso de superfícies.

É importante frisar que a propriedade de não possuir pontos conjugados não implica que a varidade tem curvatura não-positiva. De fato, existem exemplos de variedade sem pontos conjugados e com regiões de curvatura positiva. É claro que tais regiões devem ser pequenas para não criar pontos conjugados.

Lema 4.1 *Seja M uma superfície compacta sem pontos conjugados cujas curvaturas gaussianas estão limitadas inferiormente por uma constante $-K_0^2$, sendo que $K_0 \geq 0$. Nessas condições existe uma constante K_1 tal que para toda geodésica γ vale o seguinte:*

1. $|u_T(t)| \leq K_1$, *para todo* $|t - T| \geq 1$;
2. *Para todo vetor $v \in T_{\gamma(0)M}$ perpendicular a $\gamma'(0)$, o limite*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{J}_T(t) = J_v^s(t)$$

existe para todo $t \in \mathbb{R}$, e é um campo de Jacobi perpendicular que nunca se anula com $J_v^s(0) = v$;

3. *Da mesma forma, o limite acima quando $T \to -\infty$ também existe e é igual a $J_v^u(t)$, um campo de Jacobi perpendicular que nunca se anula com $J_v^u(0) = v$;*
4. *Os campos de Jacobi $J_v^s(t)$ e $J_v^u(t)$ nunca se anulam se $v \neq 0$, e ainda*

$$||(J_v^s(t))'|| \leq K_0||J_v^s(t)||$$
$$||(J_v^u(t))'|| \leq K_0||J_v^u(t)||,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Dado $\theta = (x, w) \in SM$, considere a geodésica γ_θ, com $\gamma_\theta(0) = x$ e $\gamma'_\theta(0) = w$. Seja J um campo de Jacobi perpendicular a γ_θ.

Observe que se $J(0) = v$, e $V(t)$ é o transporte paralelo de v ao longo de γ então

$$J(t) = f(t)V(t)$$

e assim

$$J''(t) + R(\gamma'_\theta(t), J(t))\gamma'_\theta(t) = 0;$$

e portanto

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0. \tag{4-1}$$

Sendo que $K(t)$ é a curvatura gaussiana no ponto $\gamma_\theta(t)$.

Primeiro serão demonstrados os itens 2 e 3. O item 3, na realidade, possui demonstração inteiramente análoga à do item 2.

Como a superfície M não possui pontos conjugados, para cada $T \in \mathbb{R}$, existe uma única solução f_T tal que $f_T(0) = 1$ e $f_T(T) = 0$.

Sejam $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$ tais que $T_1 > T_2$. Considere a função dada por $h(t) = f_{T_1}(t) - f_{T_2}(t)$. A função h é solução da equação (4-1) pois é diferença de soluções, e $h(0) = 0$. É fato que h não possui outros zeros, senão ela seria nula. Logo $h(T_1), h(T_2)$ são, ambos, positivos ou negativos. Mas

$$h(T_2) = f_{T_1}(T_2) > 0$$

pois $T_2 \in (0, T_1)$. Portanto, $h > 0$ para $t > 0$, implicando que

$$f_{T_1}(t) > f_{T_2}(t)$$

para $t > 0$. Como a função h se anula somente em 0, e é positiva para $t > 0$, conclui-se que

$$h(t) < 0$$

para $t < 0$. Ou seja,

$$f_{T_1}(t) < f_{T_2}(t)$$

para $t < 0$.

O próximo passo é mostrar que quando $T_n \to \infty$ as soluções f_{T_n} convergem uniformemente a uma função f. Tal função é solução da equação diferencial e nunca se anula. Antes de mostrar que tal família de funções converge em toda reta, considere apenas o caso em que $t \leq 0$.

Sem perda de generalidade, seja $T_j = j$ e considere o intervalo $[-1, 0]$. Restrinja a função f_j ao intervalo $[-1, 0]$. Nestas condições a equação de Jacobi diz que as normas das derivadas segundas são uniformemente limitadas neste intervalo. De fato,

$$\begin{aligned}
|f_j''(t)| &= |K(t)f_j(t)| \\
&\leq M \sup_{t\in[-1,0]} |f_j(t)| \\
&\leq M \sup_{t\in[-1,0]} |f_1(t)| \\
&\leq \infty.
\end{aligned}$$

Sendo que $M = \sup_{t\in[-1,0]} K(t)$.
Portanto, as derivadas segundas de f_j são todas uniformente limitadas pela mesma constante.

A sequência $f_j'(0)$ é crescente, e limitada superiormente. De fato, pelo teorema do Valor Médio,

$$|f_j(0) - f_j(-1)| = |f_j'(c_j)|$$

para algum $c_j \in (-1,0)$. Agora, tome uma subsequência de (c_j) que converge para algum $a \in [-1,0]$, que existe já que $[-1,0]$ é compacto. Por conveniência ela também será chamada (c_j). Dessa maneira, quando $j \to \infty$ a sequência $f_j(-1)$ converge pois é descrescente (para $t < 0$, $f_{j+1}(t) < f_j(t)$) e limitada inferiormente, assim $f_j'(c_j)$ também converge. A questão é que $f_j'(c_j)$ e $f_j'(a)$ convergem para o mesmo limite, pois se $f_j'(c_j) \to F$ então

$$|f_j'(a) - F| \leq |f_j'(a) - f_j'(c_j)| + |f_j'(c_j) - F|.$$

Por um lado $|f_j'(c_j) - F| \to 0$ e por outro

$$\begin{aligned}
|f_j'(a) - f_j'(c_j)| &= |f_j''(\tilde{c}_j)| \cdot |a - c_j| \\
&\leq M \cdot |a - c_j| \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto $f_j'(a) \to F$ e assim f_j' é limitada em a. Dado qualquer $x \in [-1,0]$, novamente pelo teorema do Valor Médio, ocorre que

$$|f_j'(0)| \leq M \cdot |a| + |f_j'(a)|$$

logo, pela limitação em a, concluímos a limitação em 0.

Agora que foi possível obter uma limitação para a sequência estritamente crescente $f_j'(0)$, seja f a solução da equação de Jacobi com condições iniciais $f(0) = 1$ e $f'(0) = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j'(0)$. Tal solução não se anula para $t \geq 0$ já que, se isto acontecer, em algum ponto irá cruzar uma das soluções f_j. Observe também que para $t \geq 0$ as funções f_j convergem para f, graças as condições iniciais de f. Sendo assim, para $t \geq 0$

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t).$$

Para estender a solução para todo $t \in \mathbb{R}$ defina a solução da equação de Jacobi $g_{A,B}$ tal que

$$g_{A,B}(A) = 1 \text{ e } g_{A,B}(B) = 0.$$

Do que decorre a identidade

$$f_T(t) = f_T(A)g_{A,B}(t) + f_T(B)g_{B,A}(t)$$

para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$. A convergência de f_T para valores positivos de t quando $T \to \infty$ é garantida escolhendo A, B negativos.

Resta mostrar que f não se anula. Isto já está claro quando $t > 0$ já que neste caso $f(t) > f_T(t)$ para todo T, e as funções f_T's são positivas em $(0, T)$. Suponha que f se anule para algum valor $t_0 < 0$. Sendo assim, $f(t) < 0$ se $t < t_0$ já que f não se anula duas vezes, e caso se anule nunca é com derivada zero pois nesse caso seria a solução nula. O fato da sequência $\{f_T\}$ convergir para f implica que em algum momento, a partir de um certo termo da sequência, elas teriam que ser negativas também, o que é uma contradição. Ficam demonstrados os itens 2 e 3.

Para demonstrar o item 1, defina $u(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ solução da equação de Riccati

$$u'(t) + u^2(2) + K(t) = 0. \tag{4-2}$$

Considere

$$p_{A,B}(s) = \frac{\exp K_0(B-s) - \exp K_0(s-B)}{\exp K_0(B-A) + \exp K_0(B-A)}$$

solução de

$$p''(t) - K_0^2 p(t) = 0 \tag{4-3}$$

com $p_{A,B}(A) = 1$ e $p_{A,B}(B) = 0$.

Se f_t é solução de (4-1) e $p_{0,T} = p_T$ é solução de (4-3) então

$$\begin{aligned}(p_T f_T' - f_T p_T')' &= p_T f_T'' - f_T p_T'' \\ &= p_T(-K f_T) - f_T(K_0^2 p_T) \\ &= -(K + K_0^2) p_T f_T.\end{aligned}$$

Para $t < T$ ocorre que p_T e f_T são positivos. Como por hipótese $K(t) + K_0^2 \geq 0$ então

$$(p_T f_T' - f_T p_T')' \leq 0,$$

e para $t = T$

$$p_T f_T' - f_T p_T' = 0.$$

Portanto que

$$p_T f_T' - f_T p_T' > 0$$

quando $t < T$, e assim

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{T \to \infty} \frac{f_T'(t)}{f_T(t)} \\ &\geq \lim_{T \to \infty} \frac{q_T'(t)}{q_T(t)} \\ &= -K_0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se p_E, com $E < 0$, é solução de (4-3) então para $t > E$ g_E e f_T serão positivos, daí

$$\begin{aligned} p_E(t) f_T'(t) - f_T(t) p_E'(t) &< p_E(E) f_T'(E) - f_T(E) p_E'(E) \\ &= -f_T(E) p_E'(E) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Por conseguinte

$$\frac{f_T'(t)}{f_T(t)} < \frac{p_E'(t)}{p_E(t)} < K_0$$

e quando $E \to -\infty$ obtém-se que

$$u(t) \leq K_0.$$

Dessa forma,

$$|u(t)| \leq K_0.$$

Isto conclui os itens 1 e 4. $\square$

Os campos J_v^s e J_v^u são chamados de campos de Jacobi estável e instável, respectivamente. Em curvatura gaussiana constante negativa $-a^2$, $a > 0$, tais campos são da forma

$$\begin{aligned} J_v^s(t) &= \exp(-at) V(t); \\ J_v^u(t) &= \exp(at) V(t). \end{aligned}$$

Sendo que $V(t)$ é o transporte paralelo de v ao longo da geodésica γ.

Lema 4.2 *Se M é uma superfície cuja curvatura gaussiana satisfaz $-a^2 \geq K$ então a norma dos campos de Jacobi estáveis e instáveis está limitada superiormente por funções exponenciais.*

Demonstração: Seja N uma superfície de curvatura constante igual a $-a^2$ (isso pode ser obtido, por exemplo, multiplicando a métrica do plano hiperbólico $\mathbb{H}$ por uma constante). Considere as geodésicas γ e α com equações de Jacobi de M e N, respectivamente. Sejam

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0 \tag{4-4}$$
$$g''(t) - a^2 g(t) = 0 \tag{4-5}$$

as equações de Jacobi associadas e essas geodésicas.

Dado $T \neq 0$, pelo lema (4.3), existem únicas soluções f_T da equação (4-4), e g_T da equação (4-5) tais que

$$f_T(0) = 1 \text{ e } f_T(T) = 0;$$
$$g_T(0) = 1 \text{ e } g_T(T) = 0.$$

Suponha que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f_T(t) > g_T(t)$$

para $\epsilon > t > 0$. Sendo assim

$$f'_T(0) \geq g'_T(0).$$

Suponha que vale a igualdade: $f'_T(0) = g'_T(0)$. Observe que as hipóteses do teorema de Rauch são satisfeitas, pois neste caso subtrair 1 das soluções não importa no resultado final. Aplicando o teorema (4.2) obtém-se

$$f_T(t) \geq g_T(t),$$

$\forall t \in [0, T]$. Porém, o teorema de Rauch nos diz que como $f_T(T) = g_T(T)$ então

$$K(t) = -a^2,$$

$\forall t \in [0, T]$. Logo $f_T(t) = g_T(t)$, que é uma contradição.

Para o caso em que desigualdade é estrita escolha uma nova solução de (4-4), por exemplo $\tilde{f}$, tal que $\tilde{f}(0) = 1$ e $\tilde{f}'(0) = g_T'(0)$. O teorema de Rauch implica que

$$\tilde{f}(t) \geq g_T(t),$$

$\forall t \in [0, T]$. Por outro lado, $f_T(t) \geq \tilde{f}(t)$ pois $f_T'(0) > \tilde{f}'(0)$. Logo

$$f_T(t) \geq \tilde{f}(t) \geq g_T(t) \Longrightarrow \tilde{f}(T) = 0.$$

Novamente a situação do primeiro caso. Assim $f_T(t) = \tilde{f}(t) = g_T$. Uma contradição.

Inicialmente supusemos que $f_T(t) > g_T(t)$ próximo do zero, mas isso pode acontecer a partir de algum t_0. A demonstração é inteiramente análoga tomando o cuidado de trocar 0 por t_0 nas horas certas.

Para finalizar,

$$\exp(-at) = \lim_{T\to\infty} g_T(t) \geq \lim_{T\to\infty} f_T(t) = f^s(t).$$

O mesmo vale para o caso instável, quando $T \to -\infty$. $\square$

4.3
Subfibrados de Green

Nesta seção é estabelecido o conceito de Subfibrados de Green, que será importante para a demonstração do teorema de Anosov.

Dado um ponto $\theta \in SM$ e uma geodésica γ_θ o conjunto dos campos de Jacobi estáveis e instáveis, introduzidos na seção anterior, se levantam para $T_{\gamma_\theta(t)}SM$ usando o lema (2.4).

Definição 4.5 *Os subespaços*

$$E^s(\phi_t(\theta)) = \{(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}SM | J \text{ é um campo de Jacobi estável}\}$$
$$E^u(\phi_t(\theta)) = \{(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}SM | J \text{ é um campo de Jacobi instável}\}$$

são chamados de subfibrados de Green *sobre* γ_θ. *Para cada* t *fixo, os espaços* $E^s(\phi_t(\theta))$ *e* $E^u(\phi_t(\theta))$ *são chamados de* subespaços de Green.

Observação 4.1 *Na definição (4.5) é usada identificação* $T_\theta SM = H(\theta) \oplus V(\theta)$.

Os subespaços de Green possuem dimensão $n-1$, $n = dim(M)$, pois são levantamentos do espaço dos campos de Jacobi estáveis e instáveis. O espaços dos campos de Jacobi tem dimensão $2n$. Restringindo-se apenas aos campos perpendiculares a dimensão cai para $2n-1$. Mas os campos em questão são limite de campos que assumem um valor qualquer escolhido em um ponto e 0 em outro, assim a dimensão final é $n-1$.

Uma base de $E^u(\phi_t(\theta))$ é dada por

$$\{(J_{s,i}(t), J_{s,i}(t)), i = 1, \dots, n-1\}$$

sendo que $\{J_{s,1}(0) = e_1, \dots, J_{s,n-1}(0) = e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de do espaço perpendicular a $\gamma'_\theta(0)$ em $T_{\gamma_\theta(0)}M$.

Sejam U^s_θ e U^u_θ soluções da equação de Riccati ao longo da geodésica γ_θ. Os subespaços de Green em θ tomam a seguinte forma:

$$E^s(\theta) = \{(W, U^s_\theta(0)W) | W \in H(\theta)\}$$
$$E^u(\theta) = \{(W, U^u_\theta(0)W) | W \in H(\theta)\}.$$

Portanto os subespaços de Green são gráficos de funções que dependem de θ, cujo domínio é o espaço horizontal. Observe que esta dependência é contínua ao longo das órbitas do fluxo geodésico.

Os subfibrados de Green terão papel crucial na estrutura hiperbólica do fluxo geodésico. A proposição a seguir é um passo nessa direção.

Proposição 4.1 *Seja M uma variedade riemanniana tal que sua curvatura seccional K seja estritamente negativa. Nessas condições os espaços $E^s(\theta)$ e $E^u(\theta)$ são linearmente independentes para todo $\theta \in TM$.*

Demonstração: Suponha que $E^s(\theta)$ e $E^u(\theta)$ são linearmente dependentes. Nesse caso, existe um campo de Jacobi J que é estável e instável ao mesmo tempo (tal campo é correspondente a interseção dos espaços).

Seja $f(t) = \| J(t) \|^2$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\langle J'(t), J(t)\rangle; \\ f''(t) &= 2\langle J''(t), J(t)\rangle + 2\langle J'(t), J'(t)\rangle \\ &= -2K(t) \| J(t) \|^2 + 2 \| J'(t) \|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pois $K(t) \leq 0$. Logo f é um função convexa, e além disso, limitada pois

$$\| J_T(t) \| \geq \| J(t) \|$$

quando $T > 0$ ($T < 0$) e $t < 0$ ($T > 0$). Portanto f é constante. Assim existe $C > 0$ tal que $\| J \|^2 = C^2$. Daí, $f'' = 0$ implica que

$$\| J' \|^2 \geq K(t)C^2.$$

Mas como $K \leq 0$ obtém-se $K = 0$ no plano gerado por J e γ'_θ.

□

4.4 Demonstração do teorema de Anosov

Finalmente estamos em condições de mostrar o teorema título deste capítulo. O enunciado preciso deste teorema é:

Teorema 4.6 (Teorema de Anosov) *Seja M uma superfície riemanniana compacta com curvatura gaussiana negativa. Suponha que a curvatura esteja limitada inferiormente por $-K_0^2$, e superiormente por $-a^2$, sendo que $a, K_0 \geq 0$. Nestas condições o fluxo geodésico de M é do tipo Anosov.*

Falta ainda definir o que é um fluxo Anosov. Para isso, vamos definir o que é um conjunto hiperbólico.

Definição 4.7 *Seja $\phi_t : N \to N$ um fluxo C^∞ agindo sem singularidades em uma variedade completa N. Um conjunto fechado e invariante $A \subset N$ é chamado* ***hiperbólico*** *para o fluxo se existem constantes $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$, e uma decomposição $T_pN = E^s(p) \oplus E^u(p) \oplus X(p)$ para todo $p \in A$, sendo que $X(p)$ é o subespaço tangente a órbita de ϕ_t em p e ainda*

1. $\| \mathrm{d}\phi_t(W) \| \leq C\lambda^t \| W \| \;\; \forall W \in E^s(p)$ *e* $t \geq 0$,
2. $\| \mathrm{d}\phi_t(W) \| \leq C\lambda^{-t} \| W \| \;\; \forall W \in E^u(p)$ *e* $t \geq 0$.

Quando $A = N$ é dito que o fluxo é **Anosov**.

DEMONSTRAÇÃO:[do teorema de Anosov] Neste caso, quem fará o papel da variedade N da definição (4.7) é SM. Da mesma forma, os espaços estáveis e instáveis serão os subespaços de Green definidos na seção anterior.

Pelo lema (4.1)

$$\| J_s'(t) \| \leq K_0 \| J_s(t) \|,$$
$$\| J_s'(t) \| \leq K_0 \| J_s(t) \| .$$

Tome vetores $W^s = (W_1^s, W_2^s) \in E^s(\theta)$ e $W^u = (W_1^u, W_2^u) \in E^u(\theta)$. Campos de Jacobi surgem como soluções de equações diferenciais de segunda ordem, logo obtém-se campos J_{s,W^s} e J_{u,W^u}. Finalmente, é possível estimar a norma do fluxo geodésico. Pelo lema (2.4) e pela consideração anterior

$$\begin{aligned} \| \mathrm{d}_\theta \phi_t(W^s) \|_S &= \| (J_{s,W^s}(t), J'_{s,W^s}(t)) \|_S \\ &\leq \sqrt{\| J_{s,W^s}(t) \|^2 + \| J'_{s,W^s}(t) \|^2} \\ &\leq \sqrt{\| J_{s,W^s}(t) \|^2 + K_0 \| J_{s,W^s}(t) \|^2} \\ &= \sqrt{1 + K_0} \| J_{s,W^s}(t) \| . \end{aligned}$$

Sendo que $\| \cdot \|_S$ é a norma referente a métrica de Sasaki. O mesmo resultado vale para o caso instável, basta trocar o s por u para obter

$$\| \mathrm{d}_\theta \phi_t(W^u) \|_S \leq \sqrt{1 + K_0} \| J_{u,W^u}(t) \| .$$

Considere uma nova superfície $\tilde{M}$ de curvatura constante igual $-a^2$. Tal superfície pode ser obtida, por exemplo, considerando o plano hiperbólico $\mathbb{H}$ e multiplicando a métrica por uma constante conveniente. A norma dos campos de Jacobi estáveis em $\tilde{M}$ é dada por

$$\| J_s^{V_1}(t) \| = \| V_1 \| \exp(-at)$$

sendo que $J_s^{V_1}(0) = V$. E dos instáveis por

$$\| J_u^{V_2}(t) \| = \| V_2 \| \exp(at)$$

sendo que $J_u^{V_2}(0) = V_2$.

Pelo lema (4.2),

$$\| J_{s,W^s}(t) \| \leq \| W_1^s \| \exp(-at)$$

e

$$\| J_{u,W^u}(t) \| \leq \| W_1^u \| \exp(at),$$

para todo $t \geq 0$.

Como $\parallel W_1 \parallel \leq \parallel W \parallel_S$,

$$\parallel \mathrm{d}_\theta \phi_t(W^s) \parallel_S \leq \sqrt{1+K_0} \parallel W^s \parallel_S \exp{(-at)};$$
$$\parallel \mathrm{d}_\theta \phi_t(W^u) \parallel_S \leq \sqrt{1+K_0} \parallel W^u \parallel_S \exp{(at)};$$

para $t \geq 0$. $\square$