5
Teorema de Hopf

Uma variedade riemanniana M não possue pontos conjugados se a aplicação exponencial não é singular em nenhum ponto. Isto é o equivalente a dizer que para uma geodésica qualquer γ de M, todo campo de Jacobi ao longo de γ se anula no máximo uma vez.

Se M possui curvatura seccional não positiva então M não possui pontos conjugados. Um tema de grande interesse é saber quais propriedades das variedades sem pontos conjugados permanecem validas para variedade de curvatura não positiva. Em 1943, E. Hopf (7) mostrou que toda métrica sem pontos conjugados no toro $\mathbb{T}^2$ é plana. Este resultado foi estendido por L. W. Green (5) em 1957 que mostrou que a integral da curvatura de Ricci de uma variedade compacta sem pontos conjugados é não positiva, e se anula somente se a métrica é localmente plana. O problema de provar o teorema de Hopf em dimensão n, ficou em aberto por 45 anos ficando conhecido como conjectura de Hopf, até que Burago-Ivanov (1) o provaram usando métodos completamente diferentes.

5.1
Teorema de Gauss-Bonnet

Para a demonstração do teorema de Hopf será necessário o uso do teorema de Gauss-Bonnet, um famoso teorema sobre superfícies. Ele liga informações sobre a geometria com informações sobre a topologia da superfície, diga-se a curvatura total com a característica de Euler. No nosso contexto a superfície sempre será tratada sem bordo e compacta. Dessa maneira, dito sem muito rigor, a característica de Euler conta a quantidade de asas que uma superfície possui. O teorema de classificação topológica de uma superfícies diz que toda superfície compacta é soma conexa da esfera com ansas. Uma asa é um toro menos um disco de raio pequeno, e fazer a soma conexa de uma asa é colar esse toro menos um disco na superfície. A característica de Euler de tal superfície é $2g - 2$ sendo que g é a quantidade de asas. A informação sobre a geometria é dada pela curvatura total, que nada mais é que a integral sobre superfície da função de curvatura $K : M \to \mathbb{R}$, que a cada ponto associa a curvatura seccional naquele ponto. O enunciado do teorema é apresentado abaixo sem demonstração.

Teorema 5.1 (Teorema de Gauss-Bonnet) *Seja M uma superfície riemanniana compacta com curvatura seccional K. Se $\mathcal{X}(M)$ denota a característica de Euler de M então*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K \,\mathrm{d}A = \mathcal{X}(M),$$

sendo que $\mathrm{d}A$ *é a forma de área de M.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (14).

Intuitivamente, o teorema diz que dada uma superfície M caso amasse uma parte dela e assim criar uma área de curvatura positiva, será preciso amassar outra parte para obter uma área de curvatura negativa já que a integral da curvatura não pode mudar.

Conclusões muito interessantes sobre a geometria de superfícies podem ser obtidas pelo teorema de Gauss-Bonnet. Por exemplo que a esfera $\mathbb{S}^2$ não admite métrica de curvatura não positiva, pois sua característica de Euler é 2. Ou então que o toro $\mathbb{T}^2$ não admite métrica de curvatura não positiva com partes estritamente negativas, nem métrica de curvatura não negativa com partes estritamente positiva porque o toro possui característica de Euler 0.

5.2 Teorema ergódico de Birkhoff

Nesta seção será apresentado o teorema de Birkhoff, que tem suas raízes na conjectura de Boltzmann sobre mecânica estatística. O teorema em questão não respondeu a tal conjecture, porém deve implicações profundas na matemática, um exemplo disso será o teorema de Hopf.

Definição 5.2 *Dada uma variedade suave e completa N, com $\varphi_t : N \to N$ um fluxo suave, e seja μ uma medida de probabilidade em N. Uma medida é* ***invariante pelo fluxo*** *φ_t se para todo conjunto mensurável $A \in N$ temos que*

$$\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A)$$

qualquer que seja t.

Teorema 5.3 (Teorema de Birkhoff) *Seja $\varphi_t : N \to N$ um fluxo suave, sendo que N é uma variedade suave e completa. Suponha que N possua uma medida de probabilidade μ que é invariante por φ_t. Seja $f : N \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e integrável. Nestas condições:*

1. *A função*
$$\tilde{f}(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\varphi_s(x))\, \mathrm{d}s$$
está bem definida em um subconjunto de medida total de N.

2. *$\tilde{f}$ é uma função integrável e φ_t-invariante, isto é, $\tilde{f} \circ \varphi_t = \tilde{f}$ para quase todo ponto em N.*

3. *A integral de $\tilde{f}$ satisfaz*
$$\int_N \tilde{f}\, \mathrm{d}\mu = \int_N f\, \mathrm{d}\mu.$$

O teorema de Birkhoff pode ser encontrado em sua versão para difeomorfismos no livro de Mañé (10).

5.3 Demonstração do teorema de Hopf

Antes de dar início à demonstração do teorema considere algumas observações relativas à teoria da medida:

Observação 5.1 *Se uma sequência de funções mensuráveis converge pontualmente para uma função f então f é mensurável.*

Observação 5.2 *A inteseção enumerável de conjuntos de medida total também possui medida total.*

Teorema 5.4 (Teorema de Hopf) *O toro $\mathbb{T}^2$ munido de uma métrica sem pontos conjugados é plano.*

Demonstração: O toro é uma superfície compacta, sendo assim suponha que a curvatura gaussiana está limitada inferiormente por uma constante $-K_0^2$, com $K_0 \geq 0$. Dado um ponto $\theta \in SM$ seja

$$U_\theta = \frac{\mathrm{d}J_\theta}{\mathrm{d}t} / J_\theta^s$$

a solução estável da equação de Riccati associada ao ponto θ, sendo que o campo de Jacobi J_v^s é obtido seguindo o lema (4.1) com $v \in T_{\pi(\theta)}M$ perpendicular a geodésica associada a θ. Vale ressaltar que neste caso como o objeto é uma superfície e sem pontos conjugados, o espaço dos campos perpendiculares tem dimensão 1, portanto é possível trata-los apenas como funções, o que foi feito anteriormente.

Na equação de Jacobi, as soluções, bem como suas derivadas, dependem contínuamente das condições iniciais. Logo a aplicação $\theta \to J_\theta(0)$ é C^1. Como a solução U_θ é obtida por

$$U_\theta(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{d}J^s_{\theta,T}}{\mathrm{d}t} / J^s_{\theta,T}$$

então a aplicação

$$\Omega : SM \to \mathbb{R}$$

tal que $\Omega(\theta) = U^s_\theta(0)$, é mensurável. Observe que, se $\varphi_t : SM \to SM$ é o fluxo geodésico de M, então

$$\begin{aligned} \Omega(\varphi_t(\theta)) &= U_{\varphi_t(\theta)}(0) \\ &= U_\theta(t). \end{aligned}$$

Integrando $U'_\theta(t)$ e tome a média por t. Agora considere o limite quando $t \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t U'_\theta(s)\ \mathrm{d}s &= \lim_{t\to\infty} \frac{U_\theta(t) - U_\theta(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{U_\theta(t)}{t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois pelo lema (4.1) $U_\theta(t)$ é limitada. Substituindo o resultado na equação de Riccati concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (U_\theta(t))^2\ \mathrm{d}t = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(\gamma_\theta(t))\ \mathrm{d}t.$$

Como

$$U_\theta(t) = U_{\varphi_t(\theta)}(0) = \Omega(\varphi_t(\theta)),$$

pelo item (1) do teorema de Birkoff o limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\Omega(\varphi_t(\theta)))^2\ \mathrm{d}t$$

existe em um conjunto de medida total em SM. Aqui é usado o fato de que o fluxo geodésico preserva a medida de Liuville em SM. Agora, como $\gamma_\theta(t) = \gamma_{\varphi_t(\theta)}(0)$ tem-se que pelo item (3) do teorema de Birkoff

$$\int_{S\mathbb{T}^2} (\Omega(\theta))^2 \; \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = -\int_{S\mathbb{T}^2} K(\theta) \; \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

Pelo mesmo argumento do lema (3.5) e o fato de que $K(\theta) = K(\pi(\theta))$ observa-se que

$$\begin{aligned}\int_{S\mathbb{T}^2} K(\theta) \; \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha &= vol(S^1) \cdot \int_{\mathbb{T}^2} K(p)\mathrm{d}V \\ &= 2\pi \cdot \int_{\mathbb{T}^2} K(p)\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

sendo que $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha$ é a forma de Liuville em $\mathbb{T}^2$ e $\mathrm{d}V$ representa a forma de volume de $\mathbb{T}^2$. Pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned}vol(S^1) \cdot \int_{\mathbb{T}^2} K(p)\mathrm{d}V &= 4\pi\mathcal{X}(\mathbb{T}^2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dessa forma, a aplicação $(\Omega(\theta))^2$ é igual a zero em um conjunto de medida total em $S\mathbb{T}^2$, já que ela é positiva definida. Sendo assim Ω é zero em quase todo ponto de $S\mathbb{T}^2$.

Seja Γ o conjunto dos pontos tal que $\Omega = 0$. Tal conjunto pode não ser invariante pelo fluxo geodésico, mas como este preserva a medida de Liuville, que é a medida de Lebesgue de $S\mathbb{T}^2$,

$$\varphi_t(\Gamma) \cap \Gamma$$

possui medida total para todo $t \in \mathbb{R}$. Já que a interseção enumerável de conjuntos de medida total tem medida total, defina o conjunto de medida total Γ_∞ por

$$\Gamma_\infty = \bigcap_{t \in \mathbb{Q}} \varphi_t(\Gamma).$$

Obtém-se conjunto invariante, Γ_∞, pois se $\theta \in \Gamma_\infty$ então existe $t \in \mathbb{Q}$ e algum $\tilde{\theta} \in \Gamma$ ocorre que $\theta = \varphi_t(\tilde{\theta})$, e aí para $s \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}\varphi_s(\theta) &= \varphi_s(\varphi_t(\tilde{\theta})) \\ &= \varphi_{s+t}(\tilde{\theta}) \in \Gamma_\infty.\end{aligned}$$

E assim, $\Omega(\varphi_t(\theta)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Q}$ e $\theta \in \Gamma$.

Por definição $\Omega(\varphi_t(\theta)) = U_\theta(t)$, e U_θ é diferenciável ao longo da geodésica γ_θ, por ser solução da equação de Riccati, e é zero para todo t racional, logo é zero para todo $t \in \mathbb{R}$. Retornando a equação de Riccati,

$$\begin{aligned} U_\theta'(t) + (U_\theta(t))^2 + K(\gamma_\theta(t)) &= 0 \\ K(\gamma_\theta(t)) &= 0, \end{aligned}$$

para todo θ em um conjunto de medida total. O que significa que K é zero em um subconjunto denso de $\mathbb{T}^2$ e portanto em todo $\mathbb{T}^2$. $\square$

Observação 5.3 *Na demonstração do teorema de Hopf foi provou-se um pouco mais que o necessário. De fato, foi provado que a curvatura total de uma superfície riemanniana compacta e sem pontos conjugados é não positiva.*