



Rodrigo Pereira Pacheco

**Fluxo geodésico em variedades sem pontos
conjugados**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Rio de Janeiro
Março de 2010



Rodrigo Pereira Pacheco

Fluxo geodésico em variedades sem pontos conjugados

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Mario Jorge Dias Carneiro

Departamento de Matemática - UFMG

Prof. Flávio Erthal Abdenur

Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Jairo Bochi

Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de Março de 2010

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rodrigo Pereira Pacheco

Graduou-se em bacharelado em matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo, sendo que fez parte do programa PET-Matemática e do programa PIBIC de iniciação científica.

Ficha Catalográfica

Pacheco, Rodrigo Pereira

Fluxo geodésico em variedades sem pontos conjugados / Rodrigo Pereira Pacheco; orientador: Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2010.

v., 58 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Geometria Diferencial; Sistemas Dinâmicos; Topologia. I. Ruggiero, Rafael Oswaldo Rodriguez. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, ao Senhor que é maravilhoso, eterno e infinitamente grande de ser louvado.

A minha família Ronaldo, Jussara e Clarisse. O amor, carinho e apoio de vocês é fundamental em tudo o que eu faço.

Ao meu orientador Rafael Ruggiero pela ajuda e dedicação.

A todos os meus amigos de Vitória, em especial ao Arthur, Breno, Luiz e Rennzo.

Aos amigos e colegas que fiz na PUC-Rio, em especial ao Ady, Carlos, Débora, Eduardo, Inês, Gondin, João Paulo, Luiz Felipe, Miguel, Pedro e Yuri Ki.

Aos meus amigos e vizinhos, José Victor e Juliana.

Gostaria de agradecer à Sabrina, pelo carinho e atenção.

Aos funcionários do departamento de matemática, especialmente Creuza, Kátia e Otávio, que me ajudaram tanto nesses anos.

À CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro. À PUC-Rio pelo auxílio e acolhida.

Resumo

Pacheco, Rodrigo Pereira; Ruggiero, Rafael Oswaldo Rodriguez. **Fluxo geodésico em variedades sem pontos conjugados**. Rio de Janeiro, 2010. 58p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desta dissertação é o estudo de certas ferramentas clássicas de geometria, topologia e teoria das equações diferenciais para entender as relações entre a dinâmica do fluxo geodésico, a topologia e a geometria global das variedades sem pontos conjugados. Em uma parte preliminar da tese é explicado em detalhes as propriedades básicas do fluxo geodésico de variedades Riemannianas como exemplo especial de um fluxo de Euler-Lagrange. Serão enfatizados dois aspectos fundamentais: o variacional e o simplético. Os resultados principais da tese são dois teoremas cujas provas seguem das teorias supracitadas: O teorema de Hopf afirma que o toro bidimensional sem pontos conjugados é plano e o teorema de Anosov diz que em uma superfície compacta de curvatura negativa o fluxo geodésico é Anosov. Tais teoremas representam uma introdução ao estudo do fluxo geodésico.

Palavras-chave

Geometria Diferencial; Sistemas Dinâmicos; Topologia.

Abstract

Pacheco, Rodrigo Pereira; Ruggiero, Rafael Oswaldo Rodriguez (Advisor). **Geodesic Flow on Manifolds Without Conjugate Points**. Rio de Janeiro, 2010. 58p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main objective of this master thesis is the study of some classic tools of geometry, topology and theory of differential equations for understanding the relations between the dynamics of the geodesic flow, the topology and global geometry of manifolds without conjugate points. In the first, and preliminary, part of this text is explained in details the basics properties of the geodesic flow on Riemannian manifolds as a especial example of a Euler-Lagrange flow. The focus will be on two fundamental aspects: the variational and symplectic. After developing the theory, the text proceed to prove the two main results of the thesis: The Hopf's theorem asserts that the two dimensional torus without conjugate points is flat and the Anosov's theorem asserts that on a compact surface with negative curvature the geodesic flow is Anosov. Such theorems represents a introduction to the study of the geodesic flow.

Keywords

Differential Geometry; Dynamical Systems; Topology.

Sumário

1	Introdução	9
2	A métrica de Sasaki	11
2.1	Variedades diferenciáveis	11
2.2	Métrica riemanniana e conexão afim	12
2.3	Uma métrica em TM	15
2.4	Campos de Jacobi	20
3	A estrutura simplética do fluxo geodésico	23
3.1	Variedades simpléticas e de contato	23
3.2	A estrutura simplética de TM	25
3.3	A forma de contato	26
4	Teorema de Anosov	35
4.1	O Teorema de comparação de Rauch	35
4.2	Equação de Riccati	37
4.3	Subfibrados de Green	46
4.4	Demonstração do teorema de Anosov	48
5	Teorema de Hopf	51
5.1	Teorema de Gauss-Bonnet	51
5.2	Teorema ergódico de Birkhoff	52
5.3	Demonstração do teorema de Hopf	53
	Referências Bibliográficas	56

*The Road goes ever on and on
Down from the door where it began.
Now far ahead the Road has gone,
And I must follow, if I can,
Pursuing it with weary feet,
Until it joins some larger way
Where many paths and errands meet.
And whither then? I cannot say.*

J. R. R. Tolkien, *Lord of the Rings*.