

1

Conceitos Iniciais

O objetivo deste capítulo é revisar conceitos básicos, mas fundamentais, sobre grafos, passeios aleatórios (*random walks*) – com especial destaque aos passeios aleatórios sobre grafos – e cadeias de Markov, além de estabelecer algumas relações entre estes assuntos. No capítulo 2, será possível notar que tais relações surgem na própria formulação teórica do método *Diffusion Maps*.

1.1

Grafos

Definição 1.1.1

Um grafo é uma estrutura $G = (V, E, w)$ em que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ é um conjunto não-vazio e enumerável cujos elementos são chamados nós ou vértices de G e $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$ é o conjunto das arestas de G , cujos pesos são obtidos a partir de uma função $w : V \times V \rightarrow W \subset \mathbb{R}$.

Se V é finito e $n(V) = n$, então diz-se que a ordem de G é n , o que é representado por $ord(G) = n$. A existência do elemento e_{ij} indica que o nó v_i é adjacente ao nó v_j . Um vértice v_i possui um laço se existe um elemento de E da forma $e_{ii} = (v_i, v_i)$. A relação de adjacência de um grafo pode ser representada matricialmente.

Definição 1.1.2

Dado um grafo $G = (V, E, w)$, tal que $ord(G) = n$, a matriz $A_{n \times n}$ é a matriz de adjacência de G se seus elementos a_{ij} são tais que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_{ij} \in E \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (1-1)$$

A figura a seguir ilustra um grafo e sua matriz de adjacência.

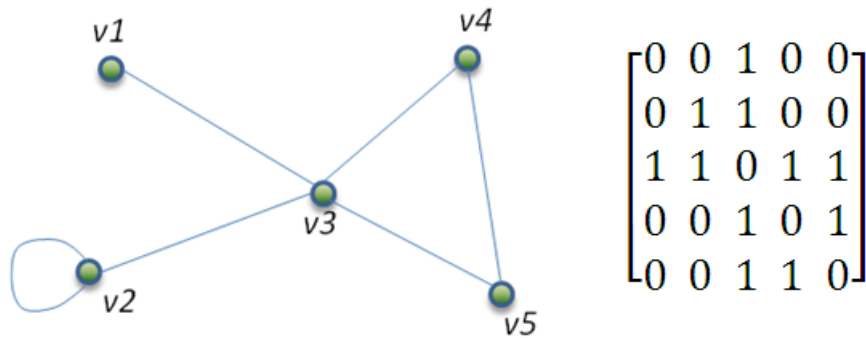


Figura 1.1: Grafo (com um laço) e sua matriz de adjacência.

Definição 1.1.3

Um grafo $G = (V, E, w)$, com $w : V \times V \rightarrow W \subset \mathbb{R}$ é chamado de grafo sem pesos se $W = \{0, 1\}$.

Considerando A a matriz de adjacência de G , para um grafo sem pesos tem-se $w_{ij} = w(v_i, v_j) = a_{ij}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Um grafo sem pesos G é chamado de não-orientado se $w_{ij} = w_{ji}$ para todo i, j , ou seja, se sua matriz de adjacência é simétrica. Em caso contrário, G é orientado. A figura 1.2 ilustra um grafo orientado sem pesos e sua matriz de adjacência.

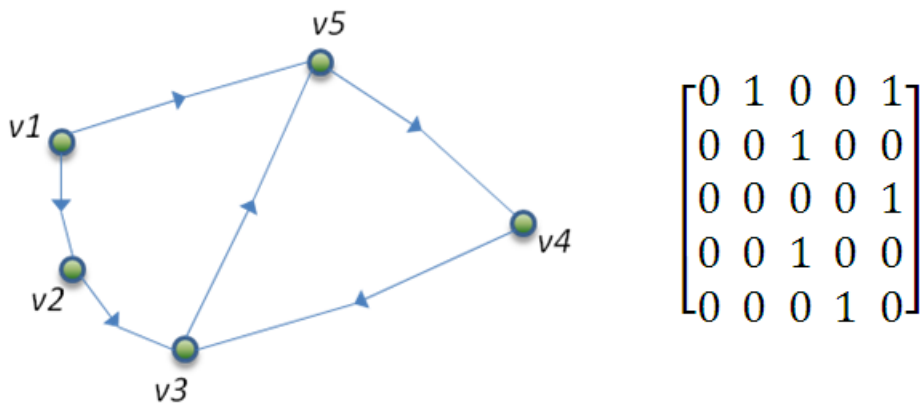


Figura 1.2: Grafo orientado sem pesos e sua matriz de adjacência.

Definição 1.1.4

Grau de emissão de um nó v_i de um grafo orientado sem pesos é o número $d_e(v_i)$ que indica quantas arestas e_{ij} partem de v_i .

Definição 1.1.5

Grau de recepção de um nó v_i de um grafo orientado sem pesos é o número $d_r(v_i)$ que indica quantas arestas e_{ji} chegam em v_i .

Para o caso de um grafo não-orientado, tem-se simplesmente:

Definição 1.1.6

Em um grafo sem pesos e não-orientado, o grau de um nó v_i é o número $d(v_i)$ que indica quantos nós v_j são adjacentes a v_i .

Definição 1.1.7

Um grafo $G = (V, E, w)$, com $w : V \times V \rightarrow W \subset \mathbb{R}$, é chamado grafo com pesos se $W = \mathbb{R}_+$, onde \mathbb{R}_+ é o conjunto dos números reais não-negativos.

Um grafo com pesos G é chamado de não-orientado se $w_{ij} = w_{ji}$, para todo i, j . Se $w_{ij} \neq w_{ji}$, G é orientado.

Para um grafo com pesos, Chung[6] define o grau de um nó da seguinte forma:

Definição 1.1.8

Em um grafo com pesos, define-se o grau de um nó v_i como o número $d(v_i) = \sum_j w(v_j, v_i)$, que é a soma dos pesos de todas as arestas que contêm v_i .

A figura 1.3 ilustra um grafo com pesos e mostra o grau de cada vértice.

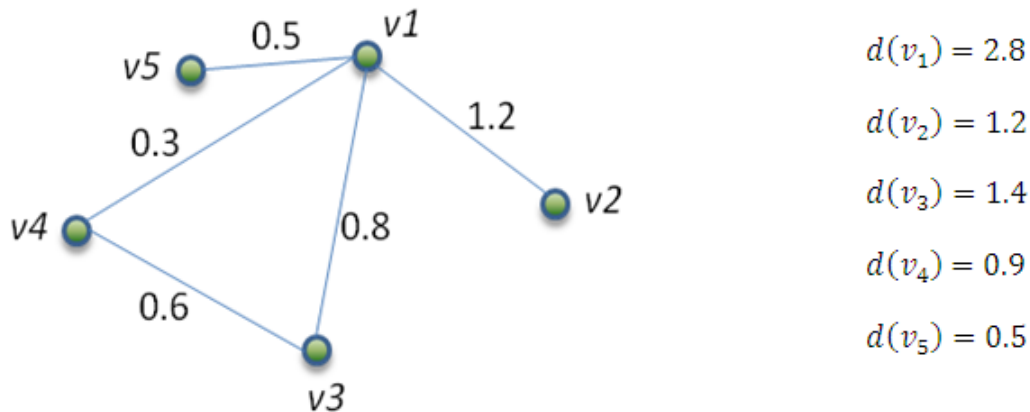


Figura 1.3: Grafo com pesos e os graus de seus nós.

Outra definição importante e que está diretamente relacionada ao conceito de conectividade de um grafo é a definição de caminho entre vértices.

Definição 1.1.9

Um caminho entre os vértices v_i e v_j é qualquer sequência de nós distintos $C_{ij} = [v_i = u_1, u_2, \dots, u_m = v_j]$ de modo que $(u_k, u_{k+1}) \in E$. Sendo $n(C_{ij}) = m$, então o comprimento do caminho é $m - 1$.

Definição 1.1.10

Um grafo é conexo se, para quaisquer $v_i, v_j \in V$, existir ao menos um caminho C_{ij} .

Caso isso não aconteça, G é chamado de desconexo. A figura 1.4 ilustra grafos conexo e desconexo.

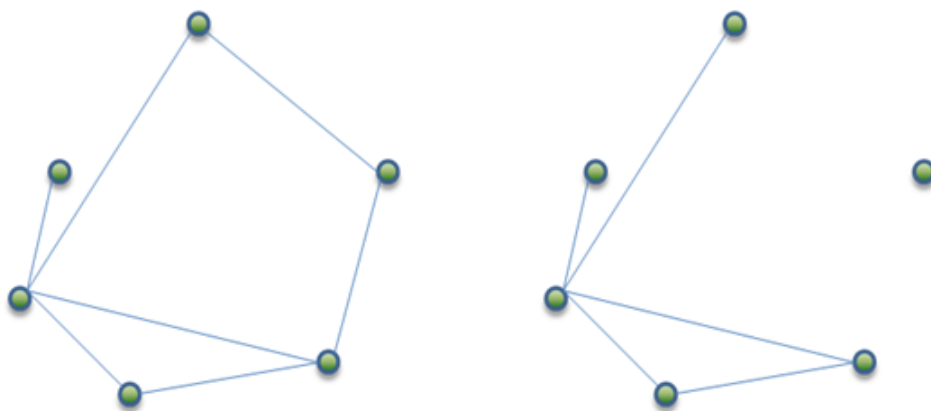


Figura 1.4: Grafos conexo e desconexo.

1.2

Passeios aleatórios

Passeios aleatórios (*random walks*) em 1, 2 e 3 dimensões foram objeto de interesse de Pólya, Kac e Pearson no início do século XX. É famosa, por exemplo, a formulação do problema da caminhada do bêbado em 1 dimensão.

Suponha que um bêbado caminha por uma avenida que tem n quadras. A cada vez que passa por uma esquina, ele opta por prosseguir indo para a direita ou para a esquerda, tendo cada sentido a mesma probabilidade – $1/2$ – de ocorrência. Sabe-se que se ele chegar em casa – na esquina 0 – a caminhada cessa, o mesmo acontecendo se ele atingir a esquina n – onde está um bar. Qual a probabilidade de que o bêbado chegue em sua casa antes de chegar ao bar?

Problemas semelhantes já foram considerados em dimensões 2 ou 3, em que a partir de um ponto inicial, o “caminhante” tem 4 e 6 escolhas, respectivamente, dentre pontos para onde dará seu próximo passo. A figura 1.5, de Grinstead e Snell[9], mostra as estruturas básicas de *random walks* em 1, 2 e 3 dimensões.

Nas ciências aplicadas, os passeios aleatórios têm sido utilizados para modelar um grande número de fenômenos, tais como o movimento browniano das partículas em um fluido, processos de difusão e até mesmo variações no mercado de ações.

Grinstead e Snell[9] definem *random walk* para um número qualquer de

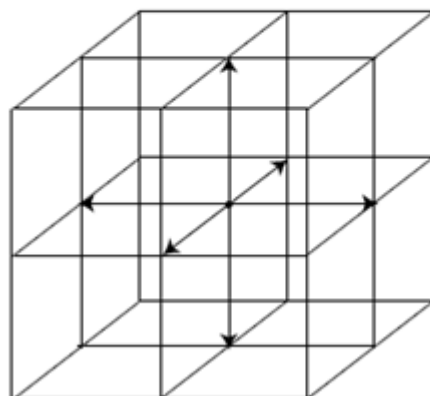
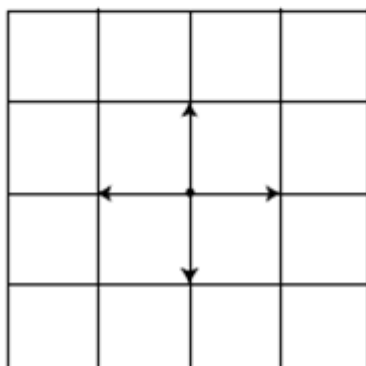
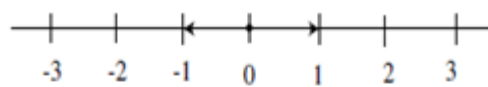


Figura 1.5: Estruturas para *random walks* em 1, 2 e 3 dimensões (Grinstead e Snell).

dimensões e livre de direções fixadas – ou seja, sem que o movimento esteja atrelado a um grid.

Definição 1.2.1

Seja $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias discretas independentes e identicamente distribuídas. Para cada inteiro positivo n , seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. A sequência $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada de *random walk*. Se cada um dos $X_k \in \mathbb{R}^m$, $\{S_n\}$ é um *random walk* em \mathbb{R}^m .

A Definição 1.2.1 trata do conceito de passeio aleatório no espaço euclidiano. Entretanto, para os propósitos deste trabalho, será suficiente examinar *random walks* definidos sobre grafos.

Suponha que uma partícula esteja inicialmente sobre um vértice v_i de um grafo conexo, e que a cada passo de tempo, ela possa saltar para um nó adjacente a v_i . Obviamente, não se pode garantir com plena certeza qual será o próximo vértice visitado pela partícula, mas é possível dizer qual a probabilidade de isso vir a ocorrer.

Definição 1.2.2

Seja $G = (V, E, w)$ um grafo conexo sem pesos. As probabilidades de transição a partir de um nó v_i para seus vizinhos v_j , através de um *random walk* sobre G , são dadas por

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/d(v_i), & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (1-2)$$

Definição 1.2.3

Seja $G = (V, E, w)$ um grafo conexo com pesos. As probabilidades de transição a partir de um nó v_i para seus vizinhos v_j , através de um *random walk* sobre G , são dadas por

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{w(v_i, v_j)}{\sum_j w(v_i, v_j)}, & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (1-3)$$

As definições 1.2.2 e 1.2.3 deixam claro que é possível estabelecer uma estreita relação entre grafos e *random walks*. O tema abordado na próxima seção – Cadeias de Markov – também se acopla a estes conceitos, como será visto ao fim deste Capítulo.

1.3

Cadeias de Markov

Seja $X = \{X(t) | t \in T\}$ um conjunto de variáveis aleatórias chamado espaço de estados, de modo que $X(t) = x_t$ represente o estado de um certo

sistema no tempo t .

Se T é um conjunto enumerável, então X define um processo estocástico discreto no tempo. Caso contrário, X será um processo estocástico em tempo contínuo. Por outro lado, se X é enumerável, então o processo estocástico em questão é discreto em relação ao espaço de estados, caso em que é chamado simplesmente de cadeia.

Definição 1.3.1

Diz-se que X define uma *cadeia de Markov CM* se

$$P1 = Pr[X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k, X(k-1) = x_{k-1}, \dots, X(0) = x_0] \text{ e} \\ P2 = Pr[X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k] \text{ são tais que } P1 = P2 .$$

Isto quer dizer que a probabilidade de se atingir um estado futuro x_{k+1} depende apenas do estado presente x_k .

A probabilidade condicional $Pr[X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k]$ é chamada probabilidade de transição entre os estados x_k e x_{k+1} , e considerando dois estados x_i e x_j de uma *CM* pode-se escrever $Pr[X(k+1) = x_j | X(k) = x_i] = p_{ij}$, com $p_{ij} \in [0, 1]$. Naturalmente, como cada p_{ij} representa uma probabilidade, não se deve deixar de notar que, se além de enumerável X for também finito, então $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, onde $n = n(X)$.

Definição 1.3.2

Numa *CM*, um estado x_j é chamado de acessível a partir de um estado x_i se, para algum tempo finito $t \geq 0$, for verificado que $Pr[X(t) = x_j | X(0) = x_i] = p_{ij}^{(t)} > 0$.

Assim, $p_{ij}^{(t)} > 0$ configura a transição $x_i \rightarrow x_j$ no tempo t , do mesmo modo que $p_{ji}^{(\bar{t})} > 0$ indica que x_i é acessível a partir de x_j no tempo \bar{t} .

Definição 1.3.3

Uma *CM* é chamada de irredutível se, para qualquer par de estados (x_i, x_j) , for verificado que $p_{ij}^{(t)} > 0$ e $p_{ji}^{(\bar{t})} > 0$, com $t \geq 0$ e $\bar{t} \geq 0$, para t e \bar{t} finitos.

Para uma CM irredutível, considere que π_j é a probabilidade, a longo tempo, de se atingir o estado x_j , independentemente do estado inicial. Considerando $j = 1, 2, \dots, n$, é possível mostrar que os valores π_j são as únicas soluções para o sistema linear

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \pi_i p_{ij} = \pi_j \\ \sum_{j=1}^n \pi_j = 1 \end{cases} \quad (1-4)$$

A primeira equação do sistema acima pode ser explicada, como assim o faz Ross[16], do seguinte modo: como π_i é a probabilidade – a longo tempo – de que a CM se encontre no estado x_i e p_{ij} é a probabilidade de transição deste estado para o estado x_j , então o produto $\pi_i p_{ij}$ dá a probabilidade – a longo tempo – de que se atinja o estado x_j , tendo x_i como estado imediatamente anterior, independente do estado a partir do qual todo o processo tenha se iniciado. Daí, considerando todos os possíveis valores $i, j = 1, 2, \dots, n$, a soma $\sum_{i=1}^n \pi_i p_{ij} = \pi_j$ expressa a probabilidade total de se atingir um estado final x_j , tendo x_i como estado imediatamente anterior. Os valores π_j são chamados probabilidades estacionárias da CM .

Definição 1.3.4

Uma CM irredutível é chamada de reversível se, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a seguinte equação de balanceamento é satisfeita:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad (1-5)$$

Aldous e Fill[1] explicam que o nome reversível está associado à seguinte idéia: dado um movimento “para a frente” numa CM e o mesmo movimento “para trás”, não é possível se distinguir um do outro.

Definição 1.3.5

Uma CM irredutível é chamada de aperiódica se existem algum $t \geq 0$ e algum estado x_j tais que $Pr[X(t) = x_j | X(0) = x_0] > 0$ e $Pr[X(t+1) = x_j | X(0) = x_0] > 0$.

Tal como nas Definições 1.3.2 e 1.3.3, deve-se considerar aqui t finito.

Seja $E[t_j]$ o tempo médio de retorno ao estado x_j . Se $E[t_j]$ é finito, então x_j é chamado de estado positivo recorrente. Se o estado x_j for ao mesmo tempo aperiódico, então x_j será um estado ergódico da CM .

Definição 1.3.6

Uma CM é chamada de ergódica se todos os elementos do seu espaço de estados são ergódicos.

1.3.1

Representação matricial de uma cadeia de Markov

Seja X um espaço de estados enumerável de uma CM . Se X é finito, com $n = n(X)$, pode-se representar a CM por meio de uma matriz $P_{n \times n}$, chamada matriz de transição ou matriz de probabilidades

$$P = [p_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

para a qual vale a propriedade $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.

Teorema 1.3.1.1

O produto de duas matrizes de transição é uma matriz de transição.

Prova: Sejam $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrizes de transição, com $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} = 1$. Sabe-se que

$$(A.B)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}).$$

Então:

$$\sum_{j=1}^n (A.B)_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}(b_{11} + b_{12} + \dots + b_{1n}) +$$

$$+ a_{i2}(b_{21} + b_{22} + \dots + b_{2n}) +$$

$$\dots + a_{in}(b_{n1} + b_{n2} + \dots + b_{nn})$$

onde as somas entre parênteses são todas iguais a 1. Daí,
 $\sum_{j=1}^n (A.B)_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = 1 .$

Então, pelo Teorema 1.3.1.1, para uma matriz de transição P valem as seguintes afirmações:

$$\begin{aligned}
 P.P &= P^2 \text{ é de transição} \\
 P^2.P &= P^3 \text{ é de transição} \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 P^{k-1}.P &= P^k \text{ é de transição}
 \end{aligned}$$

onde P^k representa as transições de estados de uma CM em k passos de tempo.

Seja $e(0) = [\rho_1^{(0)}, \rho_2^{(0)}, \dots, \rho_n^{(0)}]$ um vetor que representa as probabilidades de se estar em cada um dos estados $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, no tempo $t = 0$. Nessas condições, vale o seguinte

Teorema 1.3.1.2

As probabilidades de se estar em cada um dos estados de uma CM num tempo k são dadas por

$$e(k) = e(0).P^k \tag{1-6}$$

sendo $e(0)$ a distribuição inicial de probabilidades da cadeia.

Prova: Pode ser encontrada em Meyer[14].

No estudo das CM , a análise do espectro (autovalores e autovetores) das matrizes de transição desempenha importante papel. Alguns resultados fundamentais acerca disso são dados a partir de agora.

Teorema 1.3.1.3

Se $P_{n \times n}$ é uma matriz de transição, então $\lambda = 1$ é um autovalor de P .

Prova: Para $Pu = \lambda u$, admita $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, com $u_i = 1$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, considerando a i -ésima componente de Pu , vem:

$$(Pu)_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}u_j = \sum_{j=1}^n p_{ij}.1 = 1 = \lambda(u)_i \Rightarrow \lambda = 1$$

Teorema 1.3.1.4

Os autovalores λ de uma matriz de transição $P_{n \times n}$ são tais que $|\lambda| \leq 1$.

Prova: Seja u um autovetor de P tal que $\max(u_i) = u_k$. Então, partindo de $Pu = \lambda u$, vem:

$$\begin{aligned} (Pu)_k &= p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + \dots + p_{kn}u_n \\ |\lambda u_k| &= |\lambda| |u_k| = |p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + \dots + p_{kn}u_n| \\ &\leq |p_{k1}u_1| + |p_{k2}u_2| + \dots + |p_{kn}u_n| \\ &= p_{k1}|u_1| + p_{k2}|u_2| + \dots + p_{kn}|u_n| \\ &\leq p_{k1}|u_k| + p_{k2}|u_k| + \dots + p_{kn}|u_k| \\ &= |u_k| \sum_{i=1}^n p_{ki} = |u_k| \end{aligned}$$

Então, $|\lambda| |u_k| \leq |u_k| \Rightarrow |\lambda| \leq 1$.

Teorema 1.3.1.5

Os autovalores à direita e à esquerda de qualquer matriz são iguais.

Prova: De $Pu = \lambda u$, vem o polinômio característico $\mathfrak{p}(\lambda) = \det(P - \lambda I)$, que também é característico de $uP = \lambda u$.

Combinando os Teoremas 1.3.1.3 e 1.3.1.5 é possível enunciar a seguinte

Proposição 1.3.1.1

$\lambda = 1$ é autovalor à esquerda de uma matriz de transição P .

Esta afirmação, por sua vez, combinada com a primeira equação do

sistema (1-4), permite dizer:

Proposição 1.3.1.2

As probabilidades estacionárias π_j , $j = 1, 2, \dots, n$, de uma *CM* formam o vetor $\Pi^T = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$, que é o autovetor à esquerda de P associado ao autovalor $\lambda = 1$.

1.4

Relações entre grafos, random walks e cadeias de Markov

No fim da seção 1.2, ao se considerar as probabilidades que uma suposta partícula – inicialmente em um vértice v_i de um grafo – tem de transitar pela vizinhança de v_i , viu-se como os conceitos de *random walk* e grafo podem ser naturalmente relacionados. Por outro lado, a seção 1.3 mostrou como o conceito de probabilidade de transição está na essência da formulação do conceito de cadeia de Markov. Por isso, é claro admitir que um *random walk* sobre um grafo pode ser totalmente analisado por sua cadeia de Markov equivalente.

De fato, as probabilidades de transição, tal como aparecem nas definições 1.2.2 e 1.2.3, podem ser armazenadas em matrizes de transição que representam cadeias de Markov, dado que se pode admitir que o estado futuro da partícula – ou seja, o próximo vértice a ser “visitado” – depende exclusivamente do estado atual – o nó onde ela se encontra – e não dos estados passados – os nós anteriormente “visitados”.

Boyd et al.[5] afirmam que qualquer cadeia de Markov finita reversível pode ser representada por um *random walk* sobre um grafo com pesos e não-orientado. Naturalmente, esta afirmação pode ser estendida para grafos sem pesos, que são casos particulares onde os pesos são 0 ou 1.

Como primeiro exemplo, seja o grafo $G1 = (V, E, w)$ sem pesos representado na figura 1.6, juntamente com os graus dos seus vértices.

As probabilidades de transição p_{ij} de um *random walk* sobre este grafo são calculadas de acordo com a Definição 1.2.2 e armazenadas na seguinte matriz:

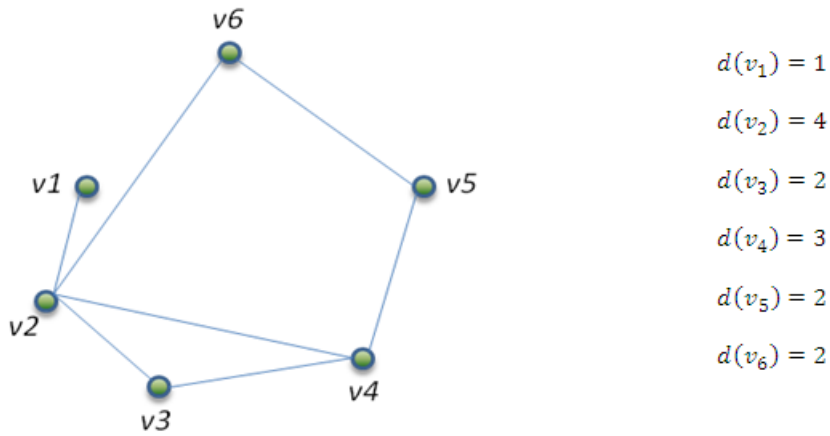


Figura 1.6: Grafo conexo, sem pesos e não-orientado e os graus de seus nós.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Não é difícil verificar que tal matriz representa uma CM reversível, cuja distribuição de probabilidades estacionárias – seu autovetor à esquerda associado ao autovalor 1 – é o vetor

$$\Pi^T = \left[0.0714 \quad 0.2857 \quad 0.1429 \quad 0.2143 \quad 0.1429 \quad 0.1429 \right]$$

Considere agora o grafo com pesos $G_2 = (V, E, w)$ representado na figura 1.3, em que os graus de seus nós são

$$d(v_1) = 2.8, \quad d(v_2) = 1.2, \quad d(v_3) = 1.4, \quad d(v_4) = 0.9 \quad e \quad d(v_5) = 0.5$$

De acordo com a Definição 1.2.3, as probabilidades de transição p_{ij} de um *random walk* sobre G_2 são calculadas e armazenadas na seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/7 & 2/7 & 3/28 & 5/28 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 0 & 0 & 3/7 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que esta matriz representa uma *CM* reversível, cuja distribuição de probabilidades estacionárias é o vetor

$$\Pi^T = \left[0.4118 \quad 0.1765 \quad 0.2059 \quad 0.1324 \quad 0.0735 \right]$$

Cabe fazer aqui algumas observações importantes sobre o conceito de probabilidade estacionária, com o objetivo de reforçar ainda mais a idéia de como os conceitos de grafos, *random walks* e cadeias de Markov estão interligados. O Teorema 1.3.1.2 diz que $e(k) = e(0).P^k$. Considerando valores cada vez maiores de k , tem-se o

Teorema 1.4.1

Considere um *random walk* sobre um grafo conexo $G = (V, E, w)$, com distribuição inicial de probabilidades $e(0)$ e matriz de transição P . Para k suficientemente grande, as componentes de $e(0).P^k$ convergem para as probabilidades estacionárias π_j da cadeia de Markov representada por P .

Prova: Pode ser encontrada em Chung[6].

Viu-se também que os valores π_j formam o vetor $\Pi^T = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$, autovetor à esquerda de P (Proposição 1.3.1.2). É interessante notar que é possível obter Π diretamente a partir da estrutura do grafo G . Pode ser verificado que, para um grafo conexo e sem pesos, vale a igualdade

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(v_1)/2n(E) \\ d(v_2)/2n(E) \\ \vdots \\ d(v_n)/2n(E) \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

e que para o caso em que G tem pesos, tem-se

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^*(v_1)/2n^*(E) \\ d^*(v_2)/2n^*(E) \\ \vdots \\ d^*(v_n)/2n^*(E) \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

onde $d^*(v_i)$ atende à Definição 1.1.8 e $n^*(E) = n(E)w$ significa que cada aresta é ponderada pela função peso w . A figura a seguir mostra sinteticamente as maneiras abordadas aqui de se obter a probabilidade estacionária Π .

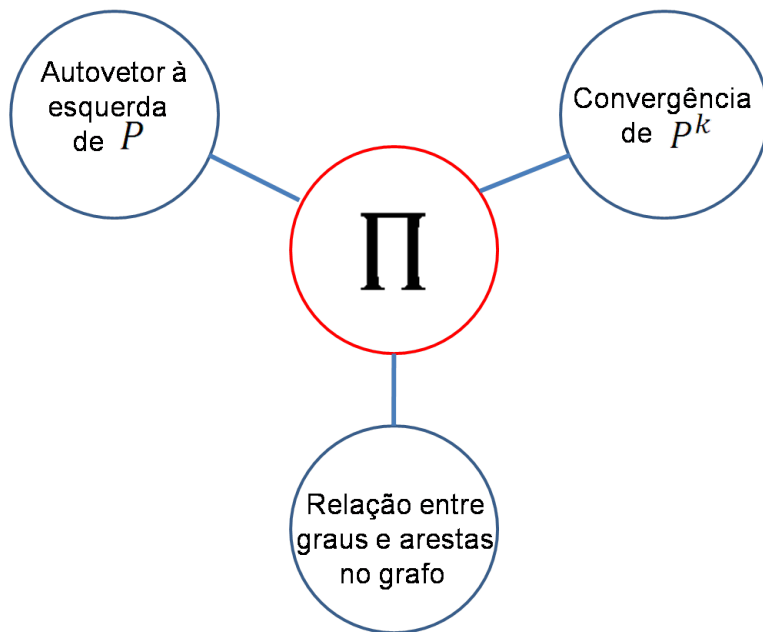


Figura 1.7: Conceitos relacionados à distribuição estacionária.

Outra relação notável engloba os conceitos de irreduzibilidade de uma CM e conectividade de um grafo, relação esta que traz uma implicação direta sobre o espectro – conjunto dos autovalores – da cadeia em questão. Para apresentar essas idéias, são necessárias primeiramente as seguintes definições:

Definição 1.4.1

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é chamada de matriz não-negativa se qualquer $a_{ij} \geq 0$.

Logicamente, uma matriz de transição de probabilidades $P_{n \times n}$ é não-negativa .

Definição 1.4.2

Uma matriz quadrada não-negativa $M_{n \times n}$ é chamada de matriz redutível se existe uma matriz de permutação Γ tal que

$$\Gamma M \Gamma = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

onde X e Z são matrizes quadradas. Em caso contrário, M é chamada de irredutível .

Teorema 1.4.2

Uma matriz quadrada não-negativa $M_{n \times n}$ é irredutível se e somente se o seu grafo correspondente for conexo.

Prova: Pode ser encontrada em Meyer[14].

Então, uma cadeia de Markov irredutível (Definição 1.3.3) é representada por uma matriz de transição $P_{n \times n}$ irredutível que está associada a um grafo conexo (Definição 1.1.10).

E o fato de P ser irredutível permite fazer uma importante afirmação sobre seu espectro. Isto é enunciado pelo teorema de *Perron-Frobenius*:

Teorema 1.4.3

Se $M_{n \times n}$ é uma matriz não-negativa irredutível com autovalores λ , então $\Lambda = \max|\lambda|$ tem multiplicidade 1.

Prova: Pode ser encontrada em Meyer[14].

Esta informação, combinada com os teoremas 1.3.1.3 e 1.3.1.4, permite então concluir que $\lambda = 1$ é um autovalor simples de uma cadeia de Markov irredutível .