1
Preliminares

Nesse capítulo temos como objetivo apresentar algumas definições e resultados que serão usados no decorrer deste trabalho. Muito do que verá nesse capítulo é interessante por si só e, sem dúvida, pode ser encontrado em outras literaturas, possivelmente, com melhor apresentação. Veja por exemplo [Ca], [Mi2] ou [Wa], [O'n] ou [Ar]. Contudo, sua leitura é aconselhável para familiarizar com a nossa notação e assim poupar tempo. Um leitor com algum conhecimento de geometria riemanniana pode iniciar sua leitura pela da última seção desse capítulo.

1.1
Variedade Riemanniana

Partimos do suposto que variedade seja algo familiar para o leitor. Usualmente denotaremos variedades por $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{E},, \cdots$. O espaço tangente por $T_x\mathbb{X}$, $T_y\mathbb{Y}$, $T_p\mathbb{E}$, $\cdots$. E o fibrado tangente denotamos por $T\mathbb{X}$, $T\mathbb{Y}$, $T\mathbb{E}$, $\cdots$. E, denotamos por d_xf a diferencial da uma aplicação f de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$. Por comodidade vamos sempre nos referir a *variedade* como uma variedade suave (C^∞), Hausdorff, separável, finito dimensional e conexa. Seja $\mathbb{X}$ uma variedade de dimensão n, $n > 0$. Sabemos que $T\mathbb{X}$ é uma variedade de dimensão $2n$. Nosso interesse principal nesse texto são as variedades riemannianas completas que passamos a definir no decorrer dessa seção.

Considere $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ o *anel* das aplicações suaves $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Um *vetor tangente* a variedade $\mathbb{X}$ no ponto x é uma aplicação suave $v_x : \mathcal{D}(\mathbb{X}) \to \mathbb{R};\ f \mapsto v_x(f)$ suave que satisfaz

a) $v_x(af + bg) = av_x(f) + bv_x(g)$;

b) $v_x(fg) = v_x(f)g(x) + f(x)v_x(g)$;

para quaisquer a, b em $\mathbb{R}$ e f, g em $\mathcal{D}(\mathbb{X})$. O *espaço tangente* à $\mathbb{X}$ no ponto x é o conjunto de todos os vetores tangentes, $T_x\mathbb{X} := \{v_x\}$. As definições de vetor tangente e espaço tangente não são muito intuitivas, porém, é possível mostrar que $T_x\mathbb{X}$ tem uma estrutura de espaço vetorial finito dimensional e é isomorfo (como espaço vetorial) a $\mathbb{R}^n$ onde $n = \dim\mathbb{X}$. Assim definimos o *fibrado tangente*

$$T\mathbb{X} := \{(x,v); x \in \mathbb{X}, v \in T_p\mathbb{X}\}$$

como um *fibrado vetorial*, $(T\mathbb{X}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{R}^m)$, onde $T\mathbb{X}$ é o espaço total, $\mathbb{X}$ o espaço base, $T_p\mathbb{X}$ é uma fibra, $\mathbb{R}^m$ é a fibra típica e a aplicação de projeção das fibras é

$$\begin{aligned} \pi : T\mathbb{X} &\to \mathbb{X}. \\ (x,v) &\mapsto x \end{aligned}$$

Com a estrutura diferenciável induzida por $\mathbb{X}$ em $T\mathbb{X}$ a aplicação de projeção π é suave e para cada carta (U,ϕ) U é um aberto de M e

$$TU := \{(x,v); x \in U, v \in T_x\mathbb{X}\}$$

é um aberto de $T\mathbb{X}$ difeomorfo a $U \times \mathbb{R}^m$.

Vemos que a cada ponto da variedade temos um espaço vetorial correspondente. Nesse contexto, um *campo vetorial suave* sobre $\mathbb{X}$ é uma aplicação suave que a cada ponto p em $\mathbb{X}$ faz corresponde um vetor tangente à $\mathbb{X}$ em p, v_p. Escrevemos $X(p) = X_p = v_p$. O adjetivo "suave", aqui, significa que para cada f em $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ a aplicação

$$\begin{aligned} Xf : \mathbb{X} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto X_p(f) = v_p(f). \end{aligned}$$

é suave.

O conjunto de todos os campos suaves sobre $\mathbb{X}$ forma um *módulo* sobre o anel $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ que denotamos por $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$. Podemos identificar $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$ com o conjunto das derivações em $\mathcal{D}(\mathbb{X})$. Relembre que uma *derivação* sobre $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ é uma aplicação $D : \mathcal{D}(\mathbb{X}) \to \mathcal{D}(\mathbb{X})$ que satisfaz

a) $\mathbb{R}$-linear: $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$;

b) Leibniz: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$;

para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$, f e g em $\mathcal{D}(\mathbb{X})$. Nesse contexto, dizer que o campo é suave indica que a derivação é suave. Isso é importante para que a composta de derivações seja ainda uma derivação. Com essa identificação podemos definir a operação *colchete*

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{X}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \\ (X,Y) &\longmapsto [X,Y] \end{aligned}$$

onde

$$[X,Y]_p(f) := X_p(Yf) - Y_p(Xf) \tag{1-1}$$

para cada $p \in \mathbb{X}$ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$. Usualmente escrevemos apenas $[X,Y] = XY - YX$.

Lema 1.1 *Para quaisquer X e Y em $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$ o colchete $[X,Y]$ pertence a $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$ e a aplicação colchete está bem definida sobre $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$.*

Prova: Basta verificar que $[X,Y]$ é uma derivação. □

Proposição 1.1 *A aplicação $[\cdot,\cdot]$ definida em* (1-1) satisfaz:

(1c) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ ($\mathbb{R}$-linearidade);

(2c) $[X,Y] = -[Y,X]$ (anti-comutatividade);

(3c) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identidade de Jacobi);

para quaisquer X, Y e Z em $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Prova: Os itens (1c) e (2c) seguem da definição. Já para o item (3c), dados X, Y e Z campos suaves quaisquer, veja que

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] &= [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
&= [XY,Z] - [YX,Z] + [YZ,X] - [ZY,X] \\
&\quad +[ZX,Y] - [XZ,Y] \\
&= XYZ - ZXY - YXZ + ZYX \\
&\quad +YZX - XYZ - ZYX + XZY \\
&\quad +ZXY - YZX - XZY + YXZ \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Um espaço vetorial com um operador $[\cdot,\cdot]$ que satisfaz os itens (1c) (2c) e (3c) é chamado *álgebra de Lie*. Nossa notação para álgebras de Lie é; $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{e} \cdots$. Observe que em geral um módulo de campos suaves não é espaço vetorial tampouco uma álgebra de Lie. Algumas vezes identificamos uma álgebra de Lie com o espaço vetorial formado pelos campo vetorial invariantes à esquerda sobre um grupo de Lie como veremos na próxima seção.

Definição 1.2 Uma *métrica riemanniana (estrutura riemanniana)* sobre $\mathbb{X}$ é uma aplicação suave $\langle \cdot,\cdot \rangle$: $x \mapsto \langle \cdot,\cdot \rangle_x$ que para cada x em $\mathbb{X}$ corresponde um produto interno em $T_x\mathbb{X}$, *i.e*,

$*$ $\langle\cdot,\cdot\rangle_x : T_x\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é bilinear e não-degenerada;

$*$ $\langle u, v\rangle_x = \langle v, u\rangle_x$ para todo $u, v \in T_x\mathbb{X}$ (simétrica);

$*$ $\langle u, u\rangle_x \geqslant 0$ para todo $u \in T_x\mathbb{X}$ e $\langle u, u\rangle_x = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (positiva definida).

Na definição acima dizer que a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é suave sobre $\mathbb{X}$ significa que para cada dois campos vetoriais suaves X, Y sobre $\mathbb{X}$ a função

$$\begin{aligned} \langle X, Y\rangle : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \langle X_p, Y_p\rangle \end{aligned}$$

é suave. Segue que a função $\langle X, Y\rangle$ pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{X})$.

O par $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é dita *variedade riemanniana*. Quando não houver dúvida escreveremos apenas $\mathbb{X}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$.

Exemplo 1 O *Espaço Euclidiano* $\mathbb{E}^n$ é a mais conhecida variedade riemanniana. Consiste do espaço $\mathbb{R}^n$ com a métrica dada pelo produto interno euclidiano

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \cdots + u_nv_n, \tag{1-2}$$

u, v em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3 Sejam $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e $(\mathbb{Y}, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é uma *isometria* quando para cada $x \in \mathbb{X}$ vale

$$\langle u, v\rangle_x = \langle\langle d_xf\cdot u, d_xf\cdot v\rangle\rangle_{f(x)} \tag{1-3}$$

para todo u e v em $T_x\mathbb{X}$. Nesse caso, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são ditas isométricas.

Uma aplicação suave $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é uma *isometria local em* $p \in \mathbb{X}$ quando existe uma vizinhança U de p tal que $f : U \to f(U)$ satisfaz (1-3) para cada x em U. Dizemos que f é uma *isometria local* quando é uma isometria local em p para todo $p \in \mathbb{X}$.

Definição 1.4 Uma variedade riemanniana $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é dita *variedade homogênea* quando para cada x e y em $\mathbb{X}$ existe uma isometria $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que $f(x) = y$. Nesse caso, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é dita uma *métrica riemanniana homogênea* ou apenas métrica homogênea.

Em outras palavras, a geometria da variedade é a mesma em cada ponto. Dizemos $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é *localmente homogênea* quando para cada x e y em $\mathbb{X}$ existe uma isometria local em x, f, tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, cada ponto da variedade tem a mesma geometria local.

Exemplo 2 Sejam n um inteiro positivo e $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ uma transformação linear. Temos que $T_x\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n = \mathbb{E}^n$ e $d_x f = f$ para todo $x \in \mathbb{E}^n$. E assim, f será uma isometria se, e somente se,

$$\langle u, v\rangle = \langle d_x f \cdot u, d_x f \cdot v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$$

para todo $u, v \in \mathbb{E}^n$, ou seja, $f(x) = A \cdot x$ onde $A \in O(n)$. Aqui, o grupo das matrizes invertíveis $n \times n$ e o grupo dos operadores lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$ associados será denotado por $GL(n, \mathbb{R})$. Já o subgrupo das matrizes e operadores ortogonais ($AA^t = I$) denotamos por $O(n)$.

Em verdade, toda isometria de $\mathbb{E}^n, n > 0$, é da forma $f(x) = A{\cdot}x + b$, de modo que $A \in O(n)$ e $b \in \mathbb{E}^n$ como veremos na seção 1 do capítulo 2.

Sejam $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle^1)$ e $(\mathbb{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle^2)$ variedades riemannianas. A variedade produto $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ com a *métrica riemanniana produto* definida por

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{(p,q)} = \langle\cdot,\cdot\rangle^1_p + \langle\cdot,\cdot\rangle^2_q$$

para cada $p \in \mathbb{X}$ e $q \in \mathbb{Y}$ é uma variedade riemanniana.

Denotamos por $\mathrm{Diff}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ o *grupo de difeomorfismos* (querendo dizer difeomorfismos suaves) de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$, em particular, $\mathrm{Diff}(\mathbb{X})$ é o *grupo de difeomorfismos* de $\mathbb{X}$. Supondo $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variedades riemanianas orientadas, denotamos por $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ o subgrupo de difeomorfismos de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ que preservam a orientação e $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{X})$ quando $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$. Um outro subgrupo em que estamos muito interessados é $\mathrm{Isom}(\mathbb{X})$ o *grupo de isometrias* de $\mathbb{X}$. Naturalmente temos $\mathrm{Isom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \mathrm{Isom}^+(\mathbb{X})$. Vamos falar mais sobre o grupo de isometrias de $\mathbb{X}$ na próxima seção.

Exemplo 3 A *esfera unitária* de dimensão n, $\mathbb{S}^n$, com métrica riemanniana dada pela restrição do produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seu grupo de isometrias é $O(n+1)$, o grupo das matrizes ortogonais. Na seção 2 do capítulo 2 daremos mais detalhes.

Seja $\mathbb{X}$ uma variedade riemanniana. Uma aplicação suave do intervalo I em $\mathbb{X}$, $\gamma : I \to \mathbb{X}$, é dito um *caminho suave* sobre $\mathbb{X}$. Dizemos que γ é um *caminho ligando x a y* quando $I = [a, b]$, $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. É dito um *caminho suave por partes* quando

$$I = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{k-1}, t_k] \text{ onde } \ t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k,$$

e

$$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}, \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, k$$

é um caminho suave. O conjunto imagem $|\gamma| = \{\gamma(t) \in \mathbb{X};\ t \in I\}$ é dito o *traço* do caminho γ. Por abuso de notação escreveremos as vezes apenas γ. Seja γ um caminho suave. Definimos um campo ao longo do caminho γ

$$\begin{aligned} \dot\gamma : I &\longrightarrow T\mathbb{X} \\ t &\longmapsto \dot\gamma(t) \end{aligned}$$

onde $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{X}$ é um *vetor tangente* a $\mathbb{X}$ em $\gamma(t)$ é definido por

$$\dot\gamma(t) : \mathcal{D}(\mathbb{X}) \to T_{\gamma(t)}\mathbb{X};\ f \mapsto \left.\frac{d(f\circ\gamma)(s)}{ds}\right|_{s=t}.$$

Este é chamado campo velocidade e $\dot\gamma(t)$ é chamado vetor velocidade. A *norma* de $\dot\gamma(t)$ é definida por

$$\|\dot\gamma(t)\| := \sqrt{\langle\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle\!\rangle_{\gamma(t)}}.$$

Supondo $\mathbb{X}$ uma variedade riemanniana conexa, defininimos a *distância de x a y pelo caminho* γ por

$$d_\gamma(x,y) := \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt.$$

Dizemos que o caminho $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{X}$ é uma *curva parametrizada pelo comprimento do arco* quando $d_\gamma(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = |t_1 - t_0|$ para todo $t_0, t_1 \in I$.

Note que $d_\gamma(x,y) \geq 0$ para quaisquer x e y em $\mathbb{X}$ e pela conexidade sempre existe tal caminho. Isso significa que o subconjuto de $\mathbb{R}$

$$\{d_\gamma(x,y) \in \mathbb{R};\ \gamma \text{ um caminho ligando } x \text{ a } y\}$$

é não-vazio e limitado inferiormente. Logo existe o número real não-negativo

$$d(x,y) := \inf\{d_\gamma(x,y);\ \gamma \text{ um caminho ligando } x \text{ à } y\} \tag{1-4}$$

que definimos como a *distância de x a y*. Segue das definições de ínfimo e de métrica riemanniana que a função não-negativa

$$\begin{aligned} d : \mathbb{X}\times\mathbb{X} &\to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

satisfaz:

(a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x,y) = d(y,x)$;

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdade triangular)

para todo x, y e z em $\mathbb{X}$.

Isso significa que d é uma *função distância* ou *métrica* (no contexto de topologia geral) para $\mathbb{X}$, e dizemos que $(\mathbb{X}, d)$ é um *espaço métrico*. As provas dos itens (b) e (c) são evidente. Quanto ao item (a) temos: Se $x = y$ é claro que $d(x,y) = 0$. Reciprocamente, suponha $d(x,y) = 0$. Dado um $\epsilon > 0$. Pela pela definição de d, podemos tomar um caminho suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{X}$ ligando x a y tal que $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt < \epsilon$. Sem perda de generalidade, suponha que existe uma carta (U, ϕ) de $\mathbb{X}$ tal que $x, y \in U$, visto que o traço $|\gamma|$ é um compacto. Obtemos o caminho suave $\gamma_\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ ligando $\gamma_\phi(a) = \phi(x)$ a $\gamma_\phi(b) = \phi(y)$. Eis que existe $c \in [a,b]$ tal que $\|\dot{\gamma}_\phi(c)\| = \{\max \|\gamma_\phi(t)\|;\ t \in [a,b]\}$, pois $\dot{\gamma}_\phi$ é contínua e $[a,b]$ é compacto. Eis que pelo "teorema fundamental do cálculo para caminhos"(Veja [Ru] pag. 135), temos

$$\begin{aligned}
\|\gamma_\phi(b) - \gamma_\phi(a)\| &= \left| \int_a^b \dot{\gamma}_\phi(t) dt \right| \\
&= \left| \int_a^b d_{\gamma(t)}\phi \cdot (\dot{\gamma}(t)) dt \right| \\
&\leq \int_a^b \|d_{\gamma(c)}\phi \cdot (\dot{\gamma}(t))\| dt \\
&\leq \max_{a \leq t \leq b} \|d_{\gamma(t)}\phi\| \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&< \max_{a \leq t \leq b} \|d_{\gamma(t)}\phi\| \epsilon.
\end{aligned}$$

Isso assegura que $\phi(\gamma(a)) = \phi(\gamma(b))$, como ϕ injetivo segue que $p = \gamma(a) = \gamma(b) = q$. Completamos assim a prova de **(a)**.

Observe que nem sempre existe um caminho γ tal que $d(x,y) = d_\gamma(x,y)$ para $x, y \in \mathbb{X}$. No caso em que tal caminho existe, dizemos que γ *minimiza* a distância de x a y e o caminho γ é chamado *segmento de geodésica ligando x a y*. Quando um caminho γ é tal que $d(x,y) = d_\gamma(x,y)$ para quaisquer x e y em $|\gamma|$ dizemos que γ *minimiza* distâncias em $\mathbb{X}$ ou que é γ é uma *geodésica minimal*. Esta é a idéia primitiva de *geodésica*. Temos uma definição mais útil, mas antes é preciso alguns fatos.

Definição 1.5 Seja p um ponto de uma variedade riemanniana $\mathbb{X}$. Uma *conexão afim em p* é uma aplicação

$$\begin{aligned}
\nabla : T_p\mathbb{X} \times \mathfrak{X}(\mathbb{X}) &\longrightarrow T_p\mathbb{X} \\
(v, Y) &\longmapsto \nabla_v Y
\end{aligned}$$

que satisfaz

(1d) $\nabla_{au+bv}Y = a\nabla_u Y + b\nabla_v Y$ ($\mathbb{R}$-linear);

(2d) $\nabla_v(Y+X) = \nabla_v X + \nabla_v Y$ ($\mathcal{D}(\mathbb{X})$-linear);

(3d) $\nabla_v(fY) = v(f)Y_p + f(p)\nabla_v Y$;

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, todo $u, v \in T_p\mathbb{X}$, todo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{X})$.

Nesse caso dizemos que $\nabla_{v_p}X$ é a *derivada covariante* do campo X na direção do vetor $v_p \in T_p\mathbb{X}$.

Definição 1.6 Seja $\mathbb{X}$ uma variedade riemanniana. Uma *conexão afim (ou conexão)* é uma aplicação suave

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{X}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que $\nabla\ _p : (X_p, Y) \mapsto \nabla_{X_p}Y$ é uma conexão afim em p para cada $p \in \mathbb{X}$.

Nesse caso dizemos que $\nabla_X Y$ é a *derivada covariante* do campo Y na direção do campo X. Note que a conexão satisfaz

(1D) $\nabla_{fX+Yg}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ($\mathcal{D}(\mathbb{X})$-linear na primeira variável);

(2D) $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$ ($\mathbb{R}$-linear na segunda variável);

(3D) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$;

para todo a e b em $\mathbb{R}$, todo f e g em $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ e todo X, Y e Z em $\mathfrak{X}(\mathbb{X})$

O resultado abaixo é fundamental na geometria riemanniana e o leitor pode consulta sua demostração em [Mi2] e também em [KN2], [Ca] ou ainda [O'n] com uma apresentação um pouco distinta.

Proposição 1.7 *Toda variedade riemanniana admite uma conexão que satisfaz*

4D $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica);*

5D $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (*compatível com a métrica*).

Essa é chamada conexão de Levi-Civita (ou conexão riemanniana).

Seja γ uma caminho suave sobre $\mathbb{X}$ e X um campo suave sobre $\mathbb{X}$. Denotamos por $\mathfrak{X}(\gamma)$ o conjunto dos campos suaves sobre γ e por $X_\gamma := X|_\gamma$ a restrição do campo X ao traço do caminho γ. É evidente que X_γ pertence $\mathfrak{X}(\gamma)$.

Proposição 1.8 *Seja $\gamma : I \to \mathbb{X}$ um caminho suave. Existe uma única aplicação de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$,*

$$\frac{D}{dt} : V \mapsto V' := \frac{DV}{dt},$$

tal que

(a) $\frac{D(aV+bW)}{dt} = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt}$*;*

(b) $\frac{D(hV)}{dt} = \frac{dh}{dt}V + h\frac{DV}{dt}$*;*

(c) $\frac{DX_\gamma}{dt}(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}X$*;*

(d) $\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt}\right\rangle$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{X})$ e todo $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Definição 1.9 Seja $\gamma : I \to \mathbb{X}$ uma curva parametrizada (pelo comprimento do arco) sobre uma variedade riemanniana munida de uma conexão riemanniana. Dizemos que γ é uma *geodésica* quando $\frac{D\dot\gamma}{dt}(t_0) = 0$ para todo $t_0 \in I$.

Dizemos que uma variedade riemanniana munida de uma conexão riemanniana é *geodesicamente completa* quando toda geodésica partindo de uma ponto fixado pode ser extendida indefinidamente. Em outras palavras, dada uma geodésica $\gamma : [t_0, t] \to \mathbb{X}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma geodésica $\gamma_\varepsilon : [t_0, t+\varepsilon] \to \mathbb{X}$ tal que $\gamma_\varepsilon|_{[t_0,\ t]} = \gamma$. Denotamos por $\gamma_{v,p}$ uma geodésica passando por p tal que

$$\dot\gamma_{v,p}(0) = u \text{ e } \gamma_{u,p}(0) = p.$$

E possível mostrar que $\gamma_{u,p}$ existe e é única.

Considere p um ponto de $\mathbb{X}$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e a bola centrada no origem e raio ϵ

$$B_\epsilon(0) := \{v \in T_p\mathbb{X};\ \|v\| < \epsilon\}.$$

Definimos a *aplicação exponencial em p*

$$\mathrm{Exp}_p : B_\epsilon(0) \to \mathbb{X}$$

pondo $\mathrm{Exp}_p(v) = \gamma_{u,p}(r)$ onde $\gamma_{v,p}$ é como definimos acima, $u = \frac{v}{\|v\|}$ e $r = \|v\|$. A variedade é geodesicamente completa se para todo p em $\mathbb{X}$ a aplicação exponencial Exp_p está definida para todo v em $T_p\mathbb{X}$.

Não é difícil mostrar que $d_0\mathrm{Exp_p}$ é igual a aplicação identidade $id_{T_p\mathbb{X}}$ e, portanto, pelo teorema da aplicação inversa, $\mathrm{Exp_p}$ é localmente um difeomorfismo de 0 em p. Para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere $B_\epsilon(0)$ a bola aberta de $T_p\mathbb{X}$ centrada em zero com raio ϵ. Temos $\mathcal{B}_\epsilon(p) := \mathrm{Exp_p}(\mathrm{B}_\epsilon(0))$. Nesse caso, $\mathcal{B}_\epsilon(p)$ é chamada *bola geodésica*.

Proposição 1.10 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ variedades riemannianas conexas e sejam $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ isometrias locais em $p \in \mathbb{X}$. Se $f(p) = g(p)$ e $d_pf = d_pg$, então $f(x) = g(x)$ para todo x em $\mathbb{X}$.*

Prova: Como f e g são isometrias locais, podemos tomar uma bola geodésica $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$ de p com $\varepsilon > 0$ tal que as restrições $f|_{\mathcal{B}_\varepsilon(p)}$ e $g|_{\mathcal{B}_\varepsilon(p)}$. Segue que a aplicação $h := f^{-1} \circ g : \mathcal{B}_\varepsilon \to \mathcal{B}_\varepsilon$ é um difeomorfismo tal que $d_ph = d_pf^{-1} \circ d_pg$ é igual a aplicação identidade de $T_p\mathbb{X}$.

Seja dado x em $\mathbb{X}$. Se x pertence a bola geodésica, então existe um v em $T_p\mathbb{X}$ tal que $x = \mathrm{Exp}_p^{-1}(v)$. Eis que

$$
\begin{aligned}
h(x) &= h(\mathrm{Exp}_p^{-1}(v)) \\
&= \mathrm{Exp}_p^{-1}(d_phv) \\
&= \mathrm{Exp}_p^{-1}(v) = x
\end{aligned}
$$

que significa que $f(x) = g(x)$ para todo x em $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$.

Agora, se x não pertence a bola geodésica, tome um caminho ligando p a x, $\alpha : [a, 1] \to \mathbb{X}$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = x$, cuja existência é garantida pela conexidade de $\mathbb{X}$. Suponhamos que o supremo do conjunto

$$A := \{t \in [0, 1]; f(\alpha(t)) = g(\alpha(t)) \text{ e } d_{\alpha(t)}f = d_{\alpha(t)}g\}$$

é estritamente menor que 1. Assim, se $t_0 := \sup A < 1$ podemos aplicar o mesmo argumento do paragrafo acima para $p = \alpha(t_0)$ e $x = \alpha(t)$ com $t \in (t_0, 1]$, e então concluímos que $t \in A$. Uma contradição que implica que $f(x) = g(x)$ para todo x em $\mathbb{X}$. $\square$

É evidente que no teorema acima podemos obter o mesmo resultado supondo f, g isometrias (e não isometrias locais) de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ completas (e não conexas).

Segue do teorema abaixo que $\mathcal{B}_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{X};\ d(p, x) < \epsilon\}$.

Teorema 1.11 (Hopf e Rinow) *Uma variedade riemanniana munida de uma conexão riemanniana é geodesicamente completa se, somente se, para quaisquer dois pontos dados sobre $\mathbb{X}$, x e y, existe um segmento de geodésica minimal ligando x à y,* i.e,

$$d(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = d_\gamma(\gamma(t_0), \gamma(t_1)).$$

Prova: Veja [Mi2] página 62. □

Finalizando essa seção apresentamos a definição de curvatura seccional. Está foi primeiramente apresentada por Riemann. A *curvatura seccional* de uma variedade riemanniana no ponto p com relação ao subespaço bidimensional σ do espaço tangente $T_p\mathbb{X}$ é a curvatura gaussiana da superfície S obtida pela imagem da aplicação exponencial restrita a uma vizinhança de σ. A seguir apresentamos uma definição analítica de curvatura seccional.

A aplicação $R : \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{X}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{X})$ onde

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z) := R_{XY}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)Z \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \end{aligned}$$

é chamado *tensor curvatura*. E para cada $p \in \mathbb{X}$ temos definido um *operator curvatura* por $R_{uv}w := R_{X_pY_p}Z_p$ onde $u = X_p,\ v = Y_p$ e $w = Z_p$.

A *curvatura seccional em p com relação ao plano $\sigma \subseteq T_p\mathbb{X}$* é definida (analiticamente) por

$$K(p,\sigma) := \frac{\langle R_{uv}u, v\rangle}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2}$$

onde $\{u,v\}$ é uma base para subespaço σ.

1.2
Grupos de Lie

Os grupos de Lie formam uma classe muito especial de variedades e consiste de uma vasta teoria. Aqui vamos apresentar apenas algumas definições e resultados que usaremos no decorrer desse trabalho. Todavia, não apresentaremos a prova da maioria dos resultados enunciados para não nos distanciarmos de uma rota segura.

Definição 1.12 Um *grupo de Lie* $(G,\cdot)$ é um grupo com uma estrutura de variedade (suave, não necessariamente conexa) tal que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g\cdot h \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

sejam suaves.

Exemplo 4 O grupo das matrizes $GL(n,\mathbb{R})$ e $O(n)$ são exemplos de grupos de Lie clássicos.

O elemento neutro de G, também chamado elemento unitário, denotamos por e_G ou simplesmente por e quando não houver dúvida. Em verdade, poderíamos inicialmente supor que a aplicação $(g,h) \mapsto g{\cdot}h$ é suave e mostrar que $g \mapsto g^{-1}$ também o é. Mas por comodidade deixamos assim mesmo. Note que $g \mapsto g^{-1}$ é um difeomorfismo do grupo de Lie cuja aplicação inversa é ela própria.

Fixando um elemento h no grupo de Lie G, definimos as aplicações de G; $L_h(g) := h \cdot g$ *translação à esquerda* e $R_h(g) := g \cdot h$ *translação à direita* que claramente são suaves. As aplicações L_h e R_h são difeomorfismos de G cuja inversas são $L_{h^{-1}}$ e $R_{h^{-1}}$, respectivamente. Veja que $L_h \circ L_{h'} = L_{h \cdot h'}$ para quaisquer h e h' em G, em particular, $L_h \circ L_{h^{-1}} = id_G$ e de fato, L_h é um difeomorfismo. De modo análogo procedemos para R_h. Devido a sua importância escrevemos dL_h e dR_h para a derivada na unidade de L_h e R_h para cada ponto h em G. Veja que

$$dL_h : T_eG \longrightarrow T_hG \quad \text{e} \quad dR_h : T_eG \longrightarrow T_hG \tag{1-5}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais. Um campo vetorial suave sobre G, X, é dito *invariante à esquerda* quando $X_{g \cdot x} = dL_g X_x$ para cada $g \in G$ e $x \in \mathbb{X}$. E é dito *invariante à direita* quando $X_{x \cdot g} = dR_g X_x$ para cada $g \in G$ e $x \in \mathbb{X}$.

Proposição 1.13 *Todo grupo de Lie tem um campo suave invariante à esquerda e um campo suave invariante à direita.*

Prova:
Existência: Fixamos um vetor v_e em T_eG e definimos o campo vetorial pondo

$$\begin{aligned} X : G &\longrightarrow TG \\ g &\longmapsto X_g := dL_g \cdot v_e \end{aligned}$$

onde $dL_g \cdot v_e \in T_gG$ por (1-5).
Suavidade: Seja f em $\mathcal{D}(G)$. Perceba que $Xf(g) = v_e(f \circ L_g)$, isso significa que Xf é composta das aplicações suaves v_e e $g \mapsto L_g$ onde a segunda aplicação é a repesentação do grupo G por automorfismos. Segue que Xf é suave para cada $f \in \mathcal{D}(G)$, e portanto, X é suave. □

Definição 1.14 Uma *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ é o espaço vetorial com uma aplicação

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (x,y) &\mapsto [x,y] \end{aligned}$$

que satisfaz:

(1c) $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ ($\mathbb{R}$-bilinearidade);

(2c) $[x, y] = -[y, x]$ (anti-comutatividade);

(3c) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (identidade de Jacobi);

para quaisquer x, y e z em $\mathfrak{g}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. A aplicação acima é chamada *colchete de Lie.*

A álgebra de Lie de um grupo de Lie G é o espaço tangente a unidade T_eG com o colchete de Lie.

Exemplo 5 A álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ denotamos por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ que consiste do espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$ com

$$[A, B] := AB - BA$$

para todo A e B em $M(n, \mathbb{R})$.

Proposição 1.15 *Todo grupo de Lie tem uma álgebra de Lie.*

Prova: Pela proposição (1.2) para cada v_e em T_eG temos um campo suave sobre G invariante à esquerda V. E definimos a operação de colchete por

$$[u_e, v_e] := [U, V]$$

onde U e V são campos invariantes à esquerda referentes a u_e e v_e, respectivamente. □

Proposição 1.16 *Um grupo de Lie tem uma métrica riemanniana invariante à esquerda e uma métrica invariante à direita.*

Prova: Seja G um grupo de Lie.Basta tomar um produto interno em T_eG e espalhe por multiplicação à esqueda ou a direita respectivamente. □

Definição 1.17 Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo abstrato de G. Dizemos que H é um *subgrupo de Lie* de G quando H é um grupo de Lie e aplicação de inclusão, $\phi : H \hookrightarrow G$, é um mergulho.

Teorema 1.18 *Um subgrupo abstrato H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie de G se, e somente se, H é um subconjunto fechado de G.*

Prova: Veja [Wa]. □

Vimos que todo grupo de Lie tem uma álgebra de Lie. De outro lado, toda álgebra de Lie é uma álgebra de Lie de um grupo de Lie simplesmente conexo. Consequentemente, dois grupos de Lie conexos tem a mesma álgebra de Lie, e somente se, seu recobrimento universal, que também é um grupo de Lie, tem álgebras de Lie isomorfas.

Teorema 1.19 *Existe uma correspondência biunívoca entre álgebras de Lie e grupos de Lie simplesmente conexos.*

Uma medida de Borel regular μ para um grupo de Lie G é dita uma *medida de Haar* quando é invariante a esquerda, i.e, $\mu(gS) = \mu(S)$ para todo $g \in G$ e todo conjunto de Borel S. (Veja os detalhes no clássico [Ha].) A integral de uma aplicação integrável $f : G \to \mathbb{R}$ com relação a essa medida

$$\int_G f d\mu$$

é chamada *integral de Haar* de f.

Exemplo 6 O grupo dos números reais positivos com a multiplicação $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo de Lie. A medida definida por

$$\mu(S) := \int_S \frac{1}{t} dt$$

é medida de Haar de $(\mathbb{R}, +)$. A saber a medida é invariante à direita e à esquerda em razão do grupo ser abeliano.

Todo grupo topológico localmente compacto tem uma médida de Haar. Esse não é um resultado fácil de se demonstrar. A demonstração para grupos topológicos compactos foi apresentada por Haar em 1933. Já a primeira demonstração para grupos localmente compactos foi apresentada por Weil usando o axioma da escolha. Mais tarde, Cartan mostrou o resultado sem o axioma da escolha. Um grupo G localmente compacto é dito *unimodular* quando a medida (invariante) é invariante à direita. No exemplo 6 vimos um grupo de Lie unimodular.

Exemplo 7 Seja G o grupo das matrizes reais

$$G := \{T \in GL(n, \mathbb{R});\ |\det T| = 1\}$$

e seja dX a medida de Lesbegue de $\mathbb{R}^{n^2}$, $n > 1$ e $\det T$ o determinante de T. A medida

$$\mu(S) := \int_S \frac{1}{|\det X|^n} dX$$

é a medida de Haar para o grupo G. Aplicando o teorema de mudança de variáveis, com cuidado, verificamos que o grupo G é unimodular. Em particular, o grupo $SL(n,\mathbb{R})$ é unimodular e consequentemente seus subgrupos também o são com a medida induzida.

1.3
Ações de Grupo

Como já mencionamos, os nossos métodos são em sua maioria topológicos. Um dos objetos onde concentra o estudo de topologia diferencial, dentre vários outros, são os grupos de Lie os quais introduzimos na seção anterior. Um dos principais resultados apresentados nessa secção é o teorema de Myers-Steenrod [Ar] que afirma que o grupo de isometrias de uma variedade riemanniana suave é um grupo de Lie. Vamos apresentar resultados centrais em ações de grupos de Lie sobre variedade. Desse modo estaremos seguindo o método introduzido por Klein no Programa de Erlangen, que em poucas palavras, é o estudo da geometria de uma variedade através da ação dos grupos de isometrias sobre a mesma.

Definição 1.20 Seja G um grupo, $\mathbb{X}$ um conjunto e

$$\begin{aligned} \phi : G \times \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{X} \\ (g,x) &\longmapsto \phi_g(x) = gx \end{aligned}$$

um aplicação. Dizemos que ϕ é uma *ação a esquerda* de G sobre $\mathbb{X}$ quando

i) $g(hx) = (g \cdot h)x$ para todo g, h em G e x em $\mathbb{X}$,*i.e* $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$;

ii) $ex = x$ para todo x em $\mathbb{X}$,*i.e*, $\phi_e = id_{\mathbb{X}}$.

Nesse caso, dizemos que o grupo G *age à esquerda* sobre $\mathbb{X}$. Analogamente, definimos *ação à direita* e dizemos que o grupo G *age à direita* sobre $\mathbb{X}$. Note que para cada g em G a aplicação $\phi_g : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é uma bijeção cuja aplicação inversa é $\phi_{g^{-1}}$. Estamos interessados em ações que tenham alguma estrutura. Por exempo, um grupo topológico G agindo *continuamente* sobre uma variedade topologica $\mathbb{X}$, ou seja, a ação $\phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é uma *ação contínua* e ϕ_g um homeomeorfismo de $\mathbb{X}$. Ou ainda, um grupo de Lie G agindo *suavemente* sobre uma variedade suave $\mathbb{X}$, ou seja, a ação $\phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é uma *ação suave* e ϕ_g é um difeomorfismo de $\mathbb{X}$.

Fixado um ponto x em $\mathbb{X}$ o subgrupo

$$G_x := \{g \in G;\ \phi_g(x) = x\} \tag{1-6}$$

é chamado *grupo de isotropia de* x, ou também, *estabilizador de* x. O conjunto

$$G\cdot x := \{gx \in \mathbb{X};\ g \in G\} \tag{1-7}$$

é chamado *órbita* de x. Definimos em $\mathbb{X}$ a relação;

$$x \sim y \Leftrightarrow gx = y \text{ para algum } g \in \mathbb{X}. \tag{1-8}$$

Esta define uma relação de equivalência em $\mathbb{X}$ onde $\bar{x} = G\cdot x$ é a classe de equivalência de x. Denotamos por

$$\mathbb{X}/G \quad \text{ou} \quad \mathbb{X}/\sim$$

o *espaço quociente*, conjunto das classes de equivalência com a topologia quociente. A aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_G : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{X}/G \\ x &\longmapsto G\cdot x \end{aligned}$$

é a projeção natural de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{X}/G$. Escreveremos apenas pr quando não houver dúvida.

Exemplo 8 Seja G um grupo de Lie e H um *subgrupo de Lie* de G. Não é difícil mostrar que para cada $h \in H$ $\phi(h,g) = gh$ é uma ação a esquerda sobre G e $\phi(h,g) = hg$ é uma ação a direita sobre G.
Se $\mathbb{X}$ é uma variedade e Γ um subgrupo de difeomorfismos de $\mathbb{X}$, então dizemos que a *ação natural* de Γ sobre $\mathbb{X}$ é $(f,x) \mapsto f(x)$.

O teorema seguinte nos dá um importante exemplo de ação de grupos de Lie sobre variedades riemannianas. Essencialmente é o teorema de Steenrod numa linguagem moderna.

Teorema 1.21 *Seja* $\mathbb{X}$ *uma variedade riemanniana com grupo de isometrias* $G := \mathrm{Isom}(\mathbb{X})$. *Então existe uma única estrutura diferenciável* Φ *para* G *tal que:*

i) *G é um grupo de Lie;*

ii) $\phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X},\ (f,x) \mapsto f(x)$ *é uma ação suave.*

Prova: Veja [MySt] ou [O'n]. □

Definição 1.22 Uma ação $\phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é dita *transitiva* quando para quaisquer x e y em $\mathbb{X}$ existe $g \in G$ tal que $\phi_g(x) = y$. Nesse caso, dizemos que G age *transitivamente* sobre $\mathbb{X}$.

Observação 1.23 Pelo teorema acima, dizer que uma variedade riemanniana é homogênea equivale a dizer que o grupo de isometrias age transitivamente sobre a variedade.

Proposição 1.24 *Seja G um grupo de Lie agindo transitivamente sobre a variedade $\mathbb{X}$. Então G_x e G_y são isomorfos para quaisquer x e y em $\mathbb{X}$.*

Prova: Sejam dados x e y em $\mathbb{X}$. Como a ação é transitiva, existe $h \in G$ tal que $hx = y$. Note que $x = (h^{-1} \cdot h)x = h^{-1}(hx) = h^{-1}y$ donde $x = h^{-1}y$. Assim, para cada g em G_x, $y = hx = h(gx) = (h \cdot g \cdot h^{-1})y$ que implica $h \cdot g \cdot h^{-1} \in G_y$. Definimos $\varphi_h : G_x \to G_y$ pondo $\varphi_h(g) := h \cdot g \cdot h^{-1}$. Note que φ_h é um homomorfismo diferenciável, *i.e*, (homomorfismo de grupos de Lie) e analogamente $\psi_h(g) := h^{-1} \cdot g \cdot h$ é um homomorfismo diferenciável e também a aplicação inversa de φ_h. Portanto, G_x é isomorfo à G_y. $\square$

Teorema 1.25 *Seja G um grupo de Lie agindo transitivamente sobre a variedade suave $\mathbb{X}$ e seja $x \in \mathbb{X}$. Então $\mathbb{X}$ é difeomorfo à G/G_x e a aplicação de projeção de G em G/G_x é uma aplicação aberta.*

Prova: Veja [Wa]. $\square$

Teorema 1.26 *Seja G um grupo de Lie agindo transitivamente sobre a variedade suave $\mathbb{X}$ e seja $x \in \mathbb{X}$. Se o grupo de isotropia G_x é compacto, então $\mathbb{X}$ admite uma métrica riemanniana preservada por G,i.e, uma métrica G-invariante.*

Prova: Assumindo que G é um grupo de difeomorfismos de $\mathbb{X}$, podemos reescrever o teorema dizendo que existe uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{X}$ tal que o grupo de isometrias com respeito a essa métrica contém o grupo G.

Fixado um p em $\mathbb{X}$ considere o seu grupo de isotropia G_p e defina um homomorfismo $\theta : G_p \to \text{Aut}(T_p\mathbb{X})$ pondo $\theta(g) := d_pg : T_p\mathbb{X} \to T_p\mathbb{X}$. Por hipótese G_p é compacto, consequentemente, sua imagem é um subgrupo compacto de $\text{Aut}(T_p\mathbb{X})$, em particular, é um subgrupo fechado e assim é um subgrupo de Lie. E como sabemos um grupo de Lie compacto é unimodular e tem volume finito (digamos que o volume seja 1). Tome um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $T_p\mathbb{X}$. Note que para cada g que pertence à $\mathbb{X}$ $\langle\langle d_pg\cdot, d_pg\cdot\rangle\rangle$ define um novo produto interno. Usando o fato de que a medida de Haar μ é bi-invariante temos

$$\langle u, v\rangle_p := \int_{g\in G_p} \langle\langle d_pg \cdot u, d_pg \cdot v\rangle\rangle d\mu$$

onde u, v pertencem à $T_p\mathbb{X}$, define um produto interno em $T_p\mathbb{X}$ G_p-invariante. Como a ação de G sobre a variedade é transitiva podemos espalhá-lo sobre $\mathbb{X}$ de modo a obter uma métrica riemanniana G-invariante. $\square$

Teorema 1.27 *Seja G um grupo de Lie agindo sobre uma variedade suave, simplesmente conexa $\mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. Se G age transitivamente sobre $\mathbb{X}$, então a componente conexa da identidade $H := G_\bullet$ também age transitivamente sobre $\mathbb{X}$ e seu grupo de isotropia H_x é igual à componente conexa de G_x, $(G_x)_\bullet$.*

Prova: Como a aplicação de projeção de G em G/G_x é uma aplicação aberta e G/G_x é difeomorfa à $\mathbb{X}$. Segue que a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : H &\longrightarrow \mathbb{X} \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

é uma aplicação aberta. Devemos mostrar que $\psi(H) = \mathbb{X}$. Veja que $\mathbb{X} = \bigcup_{y \in \mathbb{X}} Hy$ e podemos tomar y_α's onde cada y_α é o representante de uma única classe. Deste modo, escrevemos $\mathbb{X}$ como uma união disjunta

$$\mathbb{X} = \dot{\bigcup_{y_\alpha}} H y_\alpha.$$

Seja $y \in \psi(H)$. Pela homogeneidade, temos que $y = hx$ para algum h em H. Teremos um aberto $U \subseteq H$ contendo a unidade e e obtemos uma aberto hU contendo h. Note que $y = hx \in hU$ implica que $\psi(hU) = h\psi(U)$ é um aberto de H contendo y. Segue que $\psi(H)$ é aberto em $\mathbb{X}$. Assim os Hy_α's formam uma partição de $\mathbb{X}$ por abertos. Como $\mathbb{X}$ é conexo segue que $\mathbb{X} = Hy$ para algum, e por conseguinte, para todo y em H.

E por fim, dado x em $\mathbb{X}$, seja $(G_x)_\bullet$ a componente conexa da identidade do grupo de isotropia G_x pela ação de G. Note que $(G_x)_\bullet$ está contido em H e consequentemente em H_x. Assim, pela maximalidade da componente conexa, basta mostrarmos que H_x é conexo.

Considere $(H_x)_\bullet$ a componente conexa da unidade de H_x. Perceba que

$$\widetilde{\mathbb{X}} := \bigcup_{x \in \mathbb{X}} H_x/(H_x)_\bullet = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} \{h(H_x)_\bullet;\ h \in H_x\}$$

é um recobrimento de $\mathbb{X}$ com aplicação de projeção

$$\begin{aligned} \mathrm{p} : \widetilde{\mathbb{X}} : &\longrightarrow \mathbb{X} \\ h(H_x)_\bullet &\longmapsto x \end{aligned}$$

e uma topologia adequada. Eis que $\mathbb{X}$ é simplesmente conexo e consequentemente esse recobrimente deve ser trivial. Isso significa que cada $h(H_x)_\bullet$ consiste de um único elemento, e portanto, $H_x = (H_x)_\bullet$. Isso completa nossa prova. $\square$

Definição 1.28 Uma ação $\phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é dita *livre* quando para qualquer x em $\mathbb{X}$ o grupo de isotropia é trivial, ou seja, $G_x = \{e\}$ para qualquer x em $\mathbb{X}$. Nesse caso, dizemos que G age *livremente* sobre $\mathbb{X}$.

Definição 1.29 Uma ação $\phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é dita *propriamente descontínua* quando para qualquer subconjunto compacto C de $\mathbb{X}$ o conjunto

$$\{g \in G; g(C) \cap C \neq \emptyset\}$$

é finito. Nesse caso, dizemos que G age *propriamente descontinuamente* sobre $\mathbb{X}$.

Teorema 1.30 *Seja $\mathbb{X}$ uma variedade e Γ um grupo agindo sobre $\mathbb{X}$ livremente e propriamente descontinuamente. Então o espaço quociente $\mathbb{X}/\Gamma$ é uma variedade e a projeção π_G é uma aplicação de recobrimento.*

Prova: Primeiramente, considere $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/G,\ x \mapsto G\cdot x = \bar{x}$. Evidentemente a aplicação é sobrejetiva e $\mathbb{X}/G$ tem uma topologia natural definida. Um subconjunto A de $\mathbb{X}/G$ é um aberto em $\mathbb{X}/G$ desde que $\pi^{-1}(A)$ seja um aberto em $\mathbb{X}$. É imediato que π é contínua com tal topologia.

Dado $\bar{x} \in \mathbb{X}/G$ onde x em $\mathbb{X}$, tome (U, φ) uma carta para x em $\mathbb{X}$. Seja C um subconjunto compacto contido em U. Como a ação é propriamente descontínua e livre podemos tomar U suficientemente pequena tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$ em G. Agora não é difícil concluir que $\mathbb{X}/G$ tem uma estrutura diferenciável e que π é difeomorfismo local. Veja [Ca] página 24. $\square$

Observação 1.31 No teorema acima, por abuso de notação, G é o grupo de isometrias de $\mathbb{X}$ e aplicando a Proposição 1.10 segue que θ é a representação fiel do grupo G_p.

Definição 1.32 Seja $\mathbb{X}$ uma variedade riemanniana e Γ um subgrupo de isometrias agindo livremente e propriamente descontinuamente sobre $\mathbb{X}$. Então a variedade $\mathbb{M} := \mathbb{X}/\Gamma$, como no Teorema 1.30, é dita uma *variedade modelada por* $\mathbb{X}$ ou *quociente compacto.*

Quando $\mathbb{M}$ é uma variedade modelada por uma variedade riemanniana $\mathbb{X}$ podemos definir naturalmente uma métrica riemanianna sobre $\mathbb{M}$. Com tal métrica a aplicação de projeção de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{M}$ é uma isometria local.

Corolário 1.33 *Se $\mathbb{X}$ é simplesmente conexo, então Γ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{X}/G)$.*

1.4
O que é uma Geometria Modelo?

Esse é o momento de explicar o título do nosso trabalho. Como vimos, a métrica riemanniana determina a geometria intrínseca da variedade. Ou seja, sua curvatura, geodésicas e grupo de isometrias são determinado pela métrica riemanniana sem considerar um espaço ambiente. Daí a importância do conceito de variedade. É possível mostrar que toda variedade suave tem uma métrica riemanniana [Ca]. Contudo, uma questão importante é escolher uma métrica riemanniana que seja "mais rica". Queremos dizer, uma métrica que determine propriedades que consideramos importantes; homogeneidade, isotropia, completude. Uma forma de se obter e estudar tal estrutura geométrica foi proposta por Klein no célebre trabalho [Kl]. Partindo do estudo de um grupo de Lie e uma variedade, construímos um conceito de geometria. Como vimos, o grupo de isometrias pode ser visto com um grupo de Lie agindo suavemente sobre a variedade. Por outro lado, supondo G um grupo de Lie agindo suavemente, livremente e transitivamente sobre $\mathbb{X}$ uma variedade simplesmente conexa, podemos ver G como um subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathbb{X})$. Nesse caso, temos que $\mathbb{X}$ e G/G_p são difeomorfas, e portanto, $\mathbb{X}$ é uma variedade homogênea. Todavia, se para algum p em $\mathbb{X}$ (e pela Proposição 1.24, para todo p) o grupo de isotropia G_p é compacto, então podemos definir uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{X}$ que é invariante por G. Segue que G é um grupo de isometrias de $\mathbb{X}$. Pela transitividade da ação, tal métrica é automaticamente homogênea, e claro, temos que $\mathbb{X}$ uma variedade homogênea (Definição 1.4).

Possivelmente, o grupo G, como vimos no parágrafo acima, pode não ser o "maior"grupo de isometrias de $\mathbb{X}$. Isso não seria bom, pois é através dos subgrupos de isometrias que encontramos subvariedades isometricamente mergulhadas, em outras palavras, as variedades modeladas por $\mathbb{X}$, como visto na Definição 1.32. Contornamos isso pedindo que se H é um subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathbb{X})$ com grupo de isotropia compactos e $G \subseteq H$, então $G = H$.

Enfim, definimos uma geometria modelo ou simplesmente geometria:

Definição 1.34 Uma *geometria* $(G, \mathbb{X})$, consiste de uma variedade $\mathbb{X}$ e um grupo de Lie G subgrupo de difeomorfismos de $\mathbb{X}$ que cumprem:

a) $\mathbb{X}$ é conexo e simplesmente conexo;

b) G age transitivamente sobre $\mathbb{X}$ com subgrupos de isotropia compactos;

c) se G é um subgrupo de H agindo transitivamente sobre $\mathbb{X}$ com grupo de isotropia compacto e $G \subseteq H$, então $G = H$.

Quando $\mathbb{X}$ é uma variedade de dimensão n dizemos que $(G, \mathbb{X})$ é uma *geometria n-dimensional* ou *bidimensional* para $n = 2$ e *tridimensional* para $n = 3$. Seja $(\mathbb{X}, H)$ cumprindo os itens a, b. Se $(\mathbb{X}, G)$ é uma geometria tal que H é um subgrupo de Lie próprio de G dizemos que $(\mathbb{X}, H)$ é uma *subgeometria* de $(\mathbb{X}, G)$.

Observação 1.35 Pela Proposição 1.26, uma geometria $(\mathbb{X}, G)$ admite uma métrica riemanniana de modo que G seja o seu grupo de isometrias. Para um p em $\mathbb{X}$ denotamos por $O(T_p\mathbb{X})$ o grupo de automorfismos de $T_p\mathbb{X}$ que preservam a métrica ou melhor preservam o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} G_p & \longrightarrow & O(T_p\mathbb{X}) \\ g & \longmapsto & d_p g \end{array}$$

é claramente uma representação fiel do grupo G_p, pela Proposição 1.10. Segue que a componente conexa de G_p, H_p, é isomorfo a um subgrupo conexo de $O(T_p\mathbb{X})$. Consequentemente, é isomorfo a um subgrupo conexo de $O(n)$ onde dimensão de $\mathbb{X}$ é n.

Um leitor experiente ou que simplesmente tenha folheado algumas paginas de [Th] vai perceber que nossa definição difere pela condição; "existe uma variedade compacta modelada por $(G, \mathbb{X})$", Definição 1.32. Isso é o que chamamos de *quociente compacto*. Essa condição é um tanto artificial, no sentido que é possível exibir uma classificação das geometrias tridimensionais sem essa hipótese. Essa é a méta do nosso trabalho. Contudo, a existência de uma variedade compacta modelada, ou seja, um quociente compacto, é necessaria para que se tenha a classificação das oito geometrias tridimensionais segundo Thurston. Adiamos nossas justicativas para o capítulo 5 onde vamos advogar a nosso favor.

Quando nos referimos à classificação nos questionamos sobre quais geometrias modelos existem a menos de uma equivalência, ou seja, quantas geometrias realmente diferentes existem e quais são. Devemos, portanto, estabelecer que:

Definição 1.36 Duas geometrias $(G, \mathbb{X})$ e $(H, \mathbb{Y})$ são equivalentes quando existe um difeomorfismo $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, tal que para todo $h \in H$ existe um $g \in G$ tal que $g = f^{-1} \circ h \circ f$.

Temos, em particular, que G e H são isomorfos e f é uma isometria. Isso nos dá um certo alívio, pois mostra que o método (de Klein), aqui aplicado, é coerente (equivale) ao método da geometria intrínseca da geometria riemanniana.

É didático e importante apresentar alguns exemplos de geometrias e propriedades que as tornam interessantes e possivelmente uma classificação. Pois bem, essa é uma deixa para os próximos capítulos. Nos propomos a apresentar superficialmente ressaltando apenas os resultados que nos serão mais úteis.