2
Geometrias de Curvatura seccional Constante

2.1
Introdução

Cumprindo o prometido, vamos apresentar alguns exemplos de geometrias. Classificar geometrias, em geral, não é uma tarefa tão fácil. Portanto, impomos sempre algumas hipóteses adicionais para que possamos classificar. Neste capítulo vamos apresentar as geometrias n-dimensionais *isotrópicas*. Uma geometria isotrópica, como o próprio nome sugere, é uma geometria que independe das direções. Em termos mais técnicos, dizemos que uma geometria é isotópica quando, dado ponto p sobre a variedade $\mathbb{X}$ e duas bases ortonormais ordenadas do espaço tangente de $\mathbb{X}$ em p, β_1 e β_2, existe uma isometria f de $\mathbb{X}$ que fixa p tal que $d_pf(\beta_1) = \beta_2$. Em outras palavras, o subgrupo

$$\mathrm{Aut}(T_p\mathbb{X}) \;\; := \;\; \{d_pf : T_p\mathbb{X} \to T_p\mathbb{X};\; f \in G_p\}$$

do grupo de automorfismos de $T_p\mathbb{X}$ age transitivamente sobre o conjunto de bases ortonormais de $T_p\mathbb{X}$. Isso assegura que a curvatura seccional independe do plano seccional considerado. Supondo $\mathbb{X}$ uma variedade riemanniana isotrópica, segue que a curvatura seccional é constante.

Gostariamos de observar quem em alguns livros a isotropia é definida de modo que a homogenidade segue como consequência. Todavia, na definição de geometria a variedade é homogênea por hipótese.

2.2
Espaço Euclidiano, $\mathbb{E}^n$.

O Espaço Euclidiano consiste de uma variedade riemaniana completa de curvatura zero. O modelo clássico, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com a métrica euclidiana

$$ds = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

como vimos no exemplo 2 do capítulo 1, é uma variedade riemanniana que denotamos por $\mathbb{E}^n$. O grupo de todas as isometrias de $\mathbb{E}^n$ é chamado *Grupo Euclidiano* que usualmente é denotado por $E(n)$. É fácil ver que $\mathbb{E}^n$ é homogênea, pois, dados dois pontos x, y em $\mathbb{E}^n$, sempre podemos tomar uma translação que leve x em y. Sabemos que $E(n)$ é um grupo de Lie pelo Teorema 1.21. Contudo, uma representação explícita de $E(n)$ nos permite não apenas mostrar que este é um grupo de Lie, mas também encontrar alguns de seus subgrupos que tenham as propriedades que nos convém. Nessa secção não faremos uma descrição completa dos subgrupos do grupo euclidiano para n qualquer. Todavia, vamos falar um pouco mais do $E(2)$ no capítulo 3 e de $E(3)$ no capítulo 4.

Seja $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{E}^n)$ uma aplicação da forma $f(x) = A{\cdot}x + b$ com A em $O(n)$ e b em $\mathbb{R}^n$, em outras palavras, $f = t_b \circ A$ onde $t_b(x) = x + b$. Temos $d_p f = A$ para cada p em $\mathbb{X}$ e assim $f \in E(n)$. De outro lado, supondo f em $E(n)$ e $p \in \mathbb{E}^n$ temos $d_p f \in O(n)$, digamos $d_p f = A$. Considere $g(x) := A \cdot x + b$ com $b = f(p) = A \cdot p$. Segue que g e f são isometrias de $\mathbb{E}^n$ tais que $g(p) = f(p)$ e $d_p g_p = d_p f$. Pela proposição 1.10 segue que $f(x) = g(x)$ para todo x em $\mathbb{E}^n$. Portanto,

$$E(n) = \{t_b \circ A \in \mathrm{Diff}(\mathbb{E}^n); A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Em outras palavras, $E(n)$ é um produto semidireto do grupo ortogonal, $O(n)$, com o grupo das translações. Denotamos por $Tr(n)$ o grupo das translações em $\mathbb{R}^n$. Claramente, $Tr(n)$ é isomorfo à $\mathbb{R}^n$, que justifica a troca de $Tr(n)$ por $\mathbb{R}^n$. Escrevemos

$$E(n) = O(n) \ltimes Tr(n) \simeq O(n) \ltimes \mathbb{R}^n. \tag{2-1}$$

Não temos um produto direto pois uma translação pode ser gerada por reflexões. Se $f \in Tr(n)$, então existe um $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x + b = t_b(x)$. Escrevemos $Tr_b(n)$ o subgrupo das translações geradas por f. Não é difícil mostar que $Tr_b(n)$ e $\mathbb{Z}$ são isomorfos. Implica que $Tr_p(n)$ é um subgrupo discreto que não fixa pontos. Segue o resultado abaixo:

Proposição 2.1 *Dado b em $\mathbb{R}^n$ o subgrupo $Tr_b(n)$ age livremente e propriamente descontinuamente sobre $\mathbb{E}^n$.*

Do resultado acima concluimos que $\mathbb{E}^n/Tr_b(n)$ é uma subvariedade de $\mathbb{E}^n$ isométrica à $\mathbb{E}^n/\mathbb{Z}$. Se a e b são linearmente independente, então $Tr_a(n) \times Tr_b(n)$ é isomorfo à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e de modo analogo, temos $\mathbb{E}^n/Tr_a(n) \times Tr_b(n)$ uma subvariedade isométrica a $\mathbb{E}^n/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Teorema 2.2 *O grupo euclidiano $E(n)$ tem um subgrupo isomorfo à $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{E}^n$ modela uma variedade compacta.*

Prova: Considere a base canônica $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Temos os subgrupos $Tr_{2\pi e_i}(n), i = 1, 2, \cdots, n$. Aplicando o argumento acima obtemos o subgrupo

$$Tr_{2\pi e_1}(n) \times Tr_{2\pi e_2}(n) \times \cdots \times Tr_{2\pi e_n}(n)$$

isomorfo ao grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$. E temos assim a subvariedade $\mathbb{E}^n/\mathbb{Z}^n$ que é isométrica à variedade fechada, *i.e*, compacta sem bordo,

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1.$$

$\square$

Vejamos que $Tr(n) = \bigcup\limits_{b \in \mathbb{R}^n} Tr_b(n)$. E ainda $Tr(n)$ é um subgrupo normal de $E(n)$.

Sempre que um grupo G tem um subgrupo normal H escrevemos $H \lhd G$. Podemos reescrever o teorema acima, $Tr(n) \lhd E(n)$. Por (2-1) temos

$$O(n) = E(n)/Tr(n).$$

Tome o subgrupo $SO(n)$ que satisfaz

$$SO(n) = E^+(n)/Tr(n).$$

Aqui temos um subgrupo de $E(n)$ de índice dois que se refere às isometrias que preservam a orientação. E ainda, $Tr(n)$ age transitivamente sobre $\mathbb{E}^n$. Consequentemente,

Lema 2.3 *$E(n)$ e $E^+(n)$ agem transitivamente sobre $\mathbb{E}^n$.*

Prova: Basta mostar que as translações preservam a orientação. $\square$

Note que o grupo de isometrias que fixa a origem é $O(n)$, *i.e*, o subgrupo de isotropia $(E(n))_{\bullet}$ é isomorfo à $SO(n)$. Logo:

Lema 2.4 *$(E(n), \mathbb{E}^n)$ é uma geometria isotrópica.*

Os grupos $Tr_b(n)$ e $O(n)$ podem, naturalmente, serem vistos como subgrupos de $GL(n+1, \mathbb{R})$. Assim, para cada $f = t_b \circ A$ e $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ associamos a aplicação $f = t_b \circ A$ à matriz $(n+1) \times (n+1)$,

$$\begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que a aplicação $\phi : E(n) \to GL(n+1, \mathbb{R})$ dada por

$$f = t_b \circ A \longmapsto \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo injetivo com imagem fechada. É imediato que:

Lema 2.5 *$E(n)$ é um grupo de Lie.*

Agora é facil concluir que $\mathbb{E}^n$ é uma variedade homogênea difeomorfa a $E(n)/O(n)$, e consequentemente, difeomorfa a $E^+(n)/SO(n)$.

Pelos lemas 2.3, 2.4 e 2.5, concluimos:

Teorema 2.6 *$(E(n), \mathbb{E}^n)$ é uma geometria n-dimensional isotrópica.*

Observação 2.7 De forma explícita, a ação ϕ de $E(n)$ sobre $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$\phi(f, x) := \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde $f = t_b \circ A$ com $t_b = Tr(n)$, $A \in O(n)$ e $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Para finalizar essa secção vamos falar sobre a álgebra de Lie de $E(n)$, $\mathfrak{e}(n)$. Podemos olhar para $E(n)$ como um subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{R})$. Em razão disso, podemos olhar para $\mathfrak{e}(n)$ como uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$. Deste modo, $\mathfrak{e}(n)$ consiste das matrizes B em $M(n+1, n+1, \mathbb{R})$ tais que $\exp(B) \in E(n)$. Ou seja,

$$\mathfrak{e}(n) = \{B \in M(n+1, n+1, \mathbb{R});\ \exp(B) \in E(n)\}$$

onde

$$\exp(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = I + B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \cdots, \ B^0 = \mathrm{I}.$$

Como $\mathfrak{e}(n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, se B pertence a $E(n)$, então $tB \in \mathfrak{e}(n)$ e assim $\exp(tB)$ pertence a $E(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O caminho

$$\alpha^B : t \mapsto \exp(tB)$$

é um *subgrupo a um parâmetro* para B em $E(n)$, *i.e*, $\alpha^B : \mathbb{R} \to G$ é um homomorfismo tal que $\dot{\alpha}^B(0) = B$. Claramente,

$$\exp(tB) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tB)^k.$$

Escrevemos

$$B = \left(\begin{array}{cccc} & & & B_{1,n+1} \\ & Y & & B_{2,n+1} \\ & & & \vdots \\ B_{n+1,1} & B_{n+1,2} & \cdots & B_{n+1,n+1} \end{array} \right), \; Y_{i,j} = B_{i,j} \text{ para } 1 \leq i, j \leq n.$$

Eis que

$$B = \frac{d}{dt} \exp(tB) \Big|_{t=0}.$$

Isso implica $B_{n+1,i} = 0$ para todo i. Obtemos

$$B = \left(\begin{array}{cccc} & Y & & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right), \; y = (B_{1,n+1}, B_{2,n+1}, \cdots, B_{n,n+1},).$$

Fazendo algumas contas temos

$$\left(\begin{array}{cccc} & Y & & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)^k = \left(\begin{array}{cccc} & Y^k & & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right).$$

Segue que

$$\exp(tB) = \left(\begin{array}{cccc} & \exp(tY) & & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \text{ daí } \exp(tY) \in O(n).$$

Portanto, a álgebra de Lie do grupo euclidiano é formada pelas matrizes da forma;

$$\begin{pmatrix} & Y & & y \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

tal que $Y^T = -Y$, isto é, $Y \in \mathfrak{so}(n)$, e $y \in \mathbb{R}^n$. Isso deixa claro que a dimensão de $E(n)$ é $\frac{(n+1)n}{2}$ e que $\mathfrak{so}(n)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{e}(n) = \mathfrak{so}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$, como era de se esperar.

2.3 Esfera unitária, $\mathbb{S}^n$

Uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante igual a 1 é o modelo geométrico que passamos a definir. Considere a forma quadrática, simétrica, não-degenerada e positiva definida

$$\begin{aligned} \tilde{q} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

que, como sabemos, define o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$, e portanto, uma métrica riemaniana. Definimos a esfera unitária,

$$\mathbb{S}^n := \tilde{q}^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{E}^{n+1};\ \tilde{q}(x) = 1\},$$

a imagem inversa do valor regular 1 da forma quadrática. Aqui, $\mathbb{S}^n$ será uma variedade compacta, conexa e simplesmente conexa para $n > 1$. E restringindo a métrica riemanniana de $\mathbb{E}^{n+1}$ a $\mathbb{S}^n$ definimos uma métrica riemanniana para $\mathbb{S}^n$. Assim, $\mathbb{S}^n$ é uma subvariedade riemanniana de $\mathbb{E}^{n+1}$. Podemos mostrar que com tal estrutura riemanniana $\mathbb{S}^n$ tem curvatura seccional constante igual a 1. De outro lado, $E(n+1)$ é o grupo de isometrias de $\mathbb{E}^{n+1}$ e o grupo de isometrias de $\mathbb{S}^n$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n)$, é isomorfo ao subgrupo de $E(n+1)$ que fixa $\mathbb{S}^n$, G. Note que

$$G = \{f \in E(n+1);\ \|f(x)\| = \|x\| = 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{S}^n\} = O(n+1)$$

onde $\|x\| = \sqrt{\tilde{q}(x)}$. Isso significa que $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n)$ é isomorfo a $O(n+1)$. Segue que $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n)$ tem uma *representação fiel*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n) &\longrightarrow E(n+1) = O(n+1) \ltimes \mathbb{R}^{n+1} \\ f &\longmapsto \rho(f) = \tilde{f} \end{aligned}$$

onde $\tilde{f} \in E(n+1)$ é uma extensão de f que preserva a métrica riemanniana

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+1}^2.$$

Considere a ação

$$\begin{array}{rcl} \phi : GL(n+1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1}. \\ (A, v) & \longmapsto & A \cdot v \end{array}$$

É um fato conhecido da álgebra linear que essa ação é transitiva e que cada A é determinado por duas base. Por Gram-Schmidt, podemos supor que tais bases são ortonormais. Reciprocamente, cada par de bases ortonormais determina um operador em GL(n+1, $\mathbb{R}$). Eis que, toda base ortonormal está contida em $\mathbb{S}^n$. Vamos considerar a restrição da ação

$$\begin{array}{rcl} \phi|_{O(n+1)} : O(n+1) \times \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n. \\ (A, x) & \longmapsto & A \cdot x \end{array}$$

Não é difícil perceber que a ação está bem definida e que:

Lema 2.8 *$O(n+1)$ e $SO(n+1)$ agem transitivamente sobre $\mathbb{S}^n$.*

Note que o subconjunto de $O(n+1)$ das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pode ser esctrito como

$$\{A \in O(n+1);\ A \cdot e_{n+1} = e_{n+1} \text{ com } e_{n+1} = (0, 0, \cdots, 0, 1)\}.$$

Este forma uma subgrupo de $O(n+1)$ que fixa e_{n+1} e é isomorfo a $O(n)$, *i.e*, o grupo de isotropia de e_{n+1} é $O(n)$, e portanto:

Lema 2.9 *$(O(n+1), \mathbb{S}^n)$ é isotrópica e $\mathbb{S}^n$ é uma variedade homogênea isométrica a $O(n+1)/O(n)$ e $SO(n+1)/SO(n)$.*

E finalmente, temos:

Teorema 2.10 $(\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n), \mathbb{S}^n)$ *é uma geometria n-dimensional isotrópica.*

Se I é a identidade em $O(n+1)$ então $\Gamma := \{I, -I\}$ é um subgrupo. E ainda, Γ age livremente e propriamente descontinuamente sobre $\mathbb{S}^n$. Obtemos a variedade $\mathrm{P}\mathbb{R}^n := \mathbb{S}^n/\Gamma$ chamado *espaço projetivo real*. Não é tão imediato, porém é possivel, mostrar que $\mathrm{P}\mathbb{R}^n = SO(n+1)/O(n)$.

Nos capítulo 3 falaremos um pouco mais sobre $\mathbb{S}^2$ e no capítulo 4 sobre $\mathbb{S}^3$.

2.4
Espaço hiperbólico, $\mathbb{H}^n$

O espaço *hiperbólico n-dimensional* consiste de uma variedade riemanniana, completa de curvatura constante igual a -1. Existem três modelos clássicos para o espaço hiperbólico. Todavia, optamos por estudar o *modelo do hiperbolóide* , que passamos a definir. Considere a forma quadrática

$$\begin{array}{rcl} q : \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 \end{array}$$

que define uma forma bilinear, simétrica e não-degenerada

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2$$

sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Esta é chamada *métrica pseudoriemaniana*. O espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com tal métrica é uma variedade pseudoriemanniana que denotamos por $\mathbb{E}^{n,1}$ conhecido como *espaço de Lorentz*. Veja que dado um x em $\mathbb{E}^{n,1}$ temos que $q(x)$ é positivo, negativo ou zero. O grupo de difeomorfismos que preservam q, $P(n,1)$, é conhecido como *grupo de Poincaré*. De modo semelhante ao que fizemos na secção anterior, podemos concluir que $P(n,1) = O(n,1) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$ onde $O(n,1)$ é o grupo de transformações lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam q. Às vezes $O(n,1)$ é chamado *grupo ortogonal generalizado*.

Similar ao caso da esfera de raio 1 em $\mathbb{E}^{n+1}$, consideremos agora a esfera de raio $i := \sqrt{-1}$

$$H^n := q^{-1}(-1)$$

de $\mathbb{E}^{n,1}$ com a métrica induzida. Em verdade, H^n é um hiperbolóide de duas folhas que, por sua vez, não é conexo e tampouco é uma variedade riemaniana. Contudo, considerando apenas a folha de H^n que mora no semi-espaço superior

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} > 0\},$$

temos o *espaço hiperbólico*

$$\mathbb{H}^n := H^n \cap \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

A forma quadrática q restrita a $\mathbb{H}^n$ é positiva definida. Desse modo, podemos ver o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^n$ como o subgrupo de todas as isometrias de $\mathbb{E}^{n,1}$ que preservam $\mathbb{H}^n$, que é $O_+(n,1)$, como veremos adiante.

Eis que, para cada $f \in P(n,1)$, temos $f(x) = Ax + b$ onde $A \in O(n,1)$ e $b \in \mathbb{R}^{n+1}$. Podemos, similarmente ao grupo euclidiano, obter uma representação do grupo de Poincaré:

$$\begin{aligned} \rho : P(n,1) &\longrightarrow GL(n+2,\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_{n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $f = t_b \circ A$, $A \in O(n,1)$ e $b \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, a álgebra de Lie $\mathfrak{p}(n,1)$, de $P(n,1)$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} & Y & & y \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ onde } Y \in \mathfrak{o}_+(n,1) \text{ e } y \in \mathbb{R}^{n+1},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} & Y_1 & & y_1 & y \\ & & & & \\ & y_1^T & & \pm 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ onde } Y_1^T = -Y_1 \text{ e } y_1 \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Sabemos que $O(n,1)$ é um grupo de Lie de dimensão $\frac{(n+1)n}{2}$ com 4 componentes conexas e $P(n,1)$ é um grupo de Lie de dimensão $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Agora, tome $O_+(n,1)$ o subgrupo de $O(n,1)$ de transformações lineares que preservam o sinal da $(n+1)$-coordenada. O grupo $O_+(n,1)$ é chamado *grupo ortogonal de Lorentz*. Sua álgebra de Lie é formada pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} & Y_1 & & y_1 & y \\ & & & & \\ & y_1^T & & +1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ tal que } Y_1^T = -Y_1 \text{ e } y_1 \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Segue que $O_+(n,1)$ é o subgrupo de $P(n,1)$ que preserva $\mathbb{R}_+^{n+1}$. De outro lado, o subgrupo de $P(n,1)$ que preserva $q^{-1}(-1)$ é $O(n,1)$ e assim $O_+(n,1) \cap O(n,1)$ é o subgrupo que preserva $\mathbb{H}^n$. Portanto:

Lemma 2.1 *O grupo de isometrias de* $\mathbb{H}^n$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, *é isomorfo à* $O_+(n,1)$.

Além disso, o subgrupo de isometrias de $\mathbb{H}^n$ que preservam a orientação, $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$, é chamado o *grupo ortogonal especial de Lorentz* geralmente escrito como $SO_+(n,1)$. O grupo $SO_+(n,1)$, e portanto, $O_+(n,1)$, age sobre $\mathbb{H}^n$ transitivamente. Note que o subconjunto de $O_+(n+1)$ das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ onde } B \in O(n),$$

pode ser escrito como

$$\{A \in O_+(n,1);\ A \cdot e_{n+1} = e_{n+1},\ e_{n+1} = (0,0,\cdots,1)\}.$$

Este forma um subgrupo de $O_+(n,1)$ que fixa e_{n+1} e que é isomorfo a $O(n)$, *i.e*, o grupo de isotropia de e_{n+1} é $O(n)$. Temos assim:

Lemma 2.2 $\mathbb{H}^n$ *é uma variedade homogênea e isotrópica, isométrica a* $O_+(n,1)/O(n)$ *e a* $SO_+(n,1)/SO(n)$.

E finalmente, temos:

Teorema 2.11 $(\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n), \mathbb{H}^n)$ *é uma geometria isotrópica n-dimensional.*

Finalizamos essa seção apresentando outros dois modelos do espaço hiperbólico.

Modelo do disco: Considere a aplicação $\Pi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{D}$ onde $\Pi(x) = \frac{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{1+x_{n+1}}$ e $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}; \|x\| < 1\}$. Vimos que $1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2$ daí segue

$$\Pi(x) = \frac{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{1+x_{n+1}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+\|x\|^2}}$$

e assim $\Pi(x)$ pertence a $\mathbb{D}$ e não é difícil concluir que este é um difeomorfismo de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{D}$. Esta induz uma métrica riemanniana em $\mathbb{D}$ e desse modo obtemos o modelo do disco chamado também de disco de Poincaré.
Modelo do semi-espaço: De modo semelhante ao que fizemos acima tome uma aplicação Θ de $\mathbb{D}$ no semi-espaço $\{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ pondo

$$\Theta(x) = 2\frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n$$

onde $e_n = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

2.5 Classificação das Geometrias Isotrópicas

Vimos até o momento que $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{E}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são variedades homogêneas e isotrópicas. Consequentemente, têm curvatura constante, a saber; 1, 0 e -1 respectivamente. E ainda

$$\mathbb{S}^n \simeq SO(n+1)/SO(n),\ \mathbb{E}^n \simeq E^+(n+1)/SO(n) \text{ e } \mathbb{H}^n \simeq SO_+(n,1)/SO(n).$$

Como o leitor pôde perceber, as três variedades homogêneas são isométricas a $H/SO(n)$, onde H satifas;

i) H é a componente conexa de um grupo de Lie de $Isom(\mathbb{X})$;

ii) H tem dimensão $\frac{(n+1)n}{2}$;

iii) H tem $SO(n)$ com subgrupo fechado;

iv) $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, para algum $m \geq n$.

Em verdade, toda variedade n-dimensional, homogênea e isotrópica, $\mathbb{X}$, é isométrica à $G_\bullet/(G_p)_\bullet$. Consequentemente, isométrica a $H/SO(n)$, tal que H satisfaz i),ii), iii) e iv).

Proposição 2.12 *Seja $\widetilde{\mathbb{M}}$ o recobrimento universal de uma variedade riemanniana $\mathbb{M}$ de dimensão $n \geq 2$. Se $\mathbb{M}$ tem curvatura seccional constante k, então*

i) $\widetilde{\mathbb{M}} = E^+(n+1)/SO(n)$, *se* $k = 0$;

ii) $\widetilde{\mathbb{M}} = SO(n+1)/SO(n)$, *se* $k > 0$;

iii) $\widetilde{\mathbb{M}} = SO_+(n,1)/SO(n)$, *se* $k < 0$.

Prova: Veja [Sh] página 242. □

A proposição acima é conhecido como teorema de uniformização ou teorema de Cartan. A demonstração do teorema acima apresentada em [Sh] é bem interessante, porém, envolve a definição de conexões sobre fibrados. Como não tratamos disso em nosso texto sua demonstração deixaremos de fora. Uma outra opção e consultar [Ca] página 181.

Duas consequências importantes da proposição são:

Teorema 2.13 *Uma geometria n-dimensional isotrópica* $(G, \mathbb{X})$ *é equivalente à* $(SO(n+1), \mathbb{S}^n)$ *ou* $(E(n), \mathbb{E}^n)$ *ou* $(O_+(n,1), \mathbb{H}^n)$.

Corolário 2.14 *Uma geometria n-dimensional* $(G, \mathbb{X})$ *de curvatura seccional constante* k *é equivalente a* $(O(n+1), \mathbb{S}^n)$ *se* $k > 0$, *ou* $(E(n), \mathbb{E}^n)$ *se* $k = 0$, *ou* $(O_+(n,1), \mathbb{H}^n)$ *se* $k < 0$.