3
Geometrias bidimensionais

Nesse capítulo vamos falar sobre os mesmos espaços que falamos no capítulo anteror. Vamos ainda apresentar o teorema de uniformização ou teorema da classifição das geometrias 2-dimensionais.

3.1
$\mathbb{E}^2$

Na secção 2.2 apresentamos o espaço euclidiano $\mathbb{E}^n$ para um n qualquer maior que 1. Nossa abordagem concerne o estudo do grupo euclidiano que nesse caso é $E(2)$. Como era de se esperar, a complexidade do estudo de $E(n)$ é menor quando $n = 2$, em grande parte pelos resultados abaixo. A demonstração é omitida aqui. Grande parte dos resultados são bem conhecido e quase sempre é consequência do fato que o grupo de isometrias de $\mathbb{E}^2$ é isomorfo a $O(2) \times \mathbb{R}^2$.

Proposição 3.1 *Uma isometria f de $\mathbb{E}^2$ é*

– *ou uma* translação *;*

– *ou uma* rotação em torno de um ponto*;*

– *ou uma* reflexão por uma reta*;*

– *ou uma* g-reflexão, i.e*, um rotação seguida de uma reflexão.*

Proposição 3.2 *Todo subgrupo de $E(2)$ que age propriamente descontinuamente e livremente sobre $\mathbb{E}^2$ é gerado por no máximo dois elementos.*

A proposição 3.1 nos fornece uma classificação completa de todas as isometrias de $\mathbb{E}^2$. Já a proposição 3.2 assegura que os subgrupos de $E(2)$ que nos interessam são finitamente gerado. Denotamos por $\langle F \rangle$ o grupo gerado pelo conjunto F. Combinando as proposições 3.1 e 3.2 temos o seguinte esquema:

Teorema 3.1 *Uma variedade bidimensional, $\mathbb{M}$, modelada por $\mathbb{E}^2$ é*

– *ou o cilindro e $\mathbb{M} \simeq \mathbb{E}^2/\langle\{\alpha\}\rangle$, onde α é uma translação;*

– *ou o toro e $\mathbb{M} \simeq \mathbb{E}^2/\langle\{\alpha, \beta\}\rangle$, onde α e β são translações;*

– *ou a faixa de Möbius e* $\mathbb{M} \simeq \mathbb{E}^2/\langle\{\alpha\}\rangle$*, onde* α *é uma g-reflexão;*

– *ou a garrafa de Klein e* $\mathbb{M} \simeq \mathbb{E}^2/\langle\{\alpha,\beta\}\rangle$*, onde* α *é uma g-reflexão e* β *é uma translação.*

Lembre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao plano complexo $\mathbb{C}$ que podemos identificar com

$$\mathbb{C} \sim \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R});\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

onde $z = x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. E ainda, $ds^2 = |dz|^2$.

Por conseguinte, concluímos que $SO(2)$ e $\mathbb{S}^1$ são isomorfos à esfera de raio 1 no plano complexo, $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

3.2 $\mathbb{S}^2$

Na seção 2.3 apresentamos a esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ de dimensão n. No caso $n = 2$ podemos identificar $\mathbb{S}^2$ com a *esfera de Riemann* que consiste de $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ obtida pela projeção estereográfica. O grupo de isometrias de $\mathbb{S}^2$ é $O(3)$. Sabemos assim que as isometrias de $\mathbb{S}^2$ são

i) ou a aplicação antípoda, $A : x \mapsto -x$;

ii) ou uma rotação em torno de um eixo.

Veja que apenas a aplicação antípoda age livremente. Em verdade, já vimos o subgrupo $\langle\{A\}\rangle$ age propriamente descontinuamente e livremente sobre $\mathbb{S}^2$. Obtemos

$$\mathrm{P}\mathbb{R}^2 = \mathbb{S}^2/\langle\{A\}\rangle$$

chamado plano projetivo real. Com a estrutura riemanniana herdada da esfera, o $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$ se torna um exemplo de superfície de curvatura 1 diferente da esfera. A saber, o único subgroupo discreto, e por compacidade finito, de $O(2)$ é $\langle\{A\}\rangle$. E por fim, as únicas variedades modeladas por $\mathbb{S}^2$ são o espaço projetivo real e a própria esfera.

Curiosamente, existem outros subgrupos finitos de $O(3)$ que agem propriamente descontinuamente, mas não agem livremente. Obviamente o quociente não nos dá uma variedade, mas um orbifold que não é nosso interesse nesse trabalho.

Observe que $\mathbb{S}^2$ não pode ser um grupo de Lie. Pois se fosse um grupo de Lie os campos suaves invariantes à esquerda obtidos pelas multiplicações à esquerda seriam campos suaves sem singularidades. Que é impossível pelo "the Hairy ball theorem".

3.3
$\mathbb{H}^2$

Vimos no capítulo anterior três modelos para $\mathbb{H}^n$. Seguindo o modelo do hiperbóloide temos que o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$ que preservam a orientação é $SO_+(2,1) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$. Obtemos um fibrado de círculos de $SO_+(2,1)$ sobre $\mathbb{H}^2$, mais claramente,

$$\mathbb{S}^1 = SO(2) \to SO_+(2,1) \to \mathbb{H}^2 = \frac{SO_+(2,1)}{SO(2)}.$$

Podemos induzir uma métrica riemanniana no fibrado $(SO_+(2,1), \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^1)$ de modo que aplicação de projeção seja uma submersão riemanniana. Contudo, tomando

$$T^1\mathbb{X} = \{(x,v) \in T\mathbb{X};\ \|v\| = 1 \text{ e } x \in \mathbb{X}\},$$

o *fibrado tangente unitário* de $\mathbb{X}$ com a métrica herdada do fibrado tangente temos um novo fibrado de círculos sobre $\mathbb{H}$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \widetilde{SO_+(2,1)} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & SO_+(2,1) & \longrightarrow & \mathbb{H}^2. \end{array}$$

Segue que $\widetilde{SO_+(2,1)}$ fibra sobre $\mathbb{H}^2$ por retas,

$$\mathbb{R}^1 \longrightarrow \widetilde{SO_+(2,1)} \longrightarrow \mathbb{H}^2. \tag{3-1}$$

Considere o modelo do semi-plano superior, $\mathbb{R}^2_+$, com a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) = \frac{4dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}. \tag{3-2}$$

Nesse caso, o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$ é identificado com o grupo das aplicações $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que preservam a métrica e o semi-plano superior. Olhe para o diferencial de difeomorfismos de $\mathbb{C}$ como uma transformação linear $\mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} d_{z_0}f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}. \\ z & \longmapsto & f'(z_0)z \end{array}$$

Assim, com a métrica (3-2) temos

$$\begin{aligned} \langle f'(z_0)z, f'(z_0)w\rangle_{f(z_0)} &= \frac{4f'(z_0)z)(\overline{f'(z_0)w})}{(f(z_0)-\overline{f(z_0)})^2} \\ &= \frac{f'(z_0)\overline{f'(z_0)}(z_0-\overline{z_0})^2}{(f(z_0)-\overline{f(z_0)})^2}\frac{4z\overline{w}}{(z_0-\overline{z_0})^2} \\ &= \langle z, w\rangle_{z_0}. \end{aligned}$$

Verifique que se $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ onde a, b, c e $d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1$, então

$$\frac{f'(z_0)\overline{f'(z_0)}(z_0-\overline{z_0})^2}{(f(z_0)-\overline{f(z_0)})^2} = 1$$

sempre que $\mathrm{Im} z_0 > 0$. Ficamos convencidos de que o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$ no modelo do semi-plano superior é

$$\{T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ onde } a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\}$$

que é isomorfo ao grupo $SL_2\mathbb{R}/\{I, -I\}$. É uma consequência direta que $SL_2\mathbb{R}/\{I, -I\}$ é isomorfo a $SO_+(2, 1)$. E por (3-1) segue que $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ fibra sobre $\mathbb{H}^2$ por retas. Supondo uma métrica definida sobre as fibras, escrevemos

$$\mathbb{E}^1 \longrightarrow \widetilde{SL_2\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{H}^2.$$

3.4 Classificação de Geometrias bidimensionais

Como é de se esperar, o caso bidimensional é bem mais simples que os demais. O que torna isso interessante é o teorema de uniformização de Riemann e também sua utilidade na classifição das geometrias tridimensionais conhecidas como geometrias de Thurston. Por essa razão seremos pragmáticos aqui.

Lemma 3.3 *Toda variedade riemanniana bidimensional e homogênea $\mathbb{X}$ tem curvatura seccional constante.*

Prova: Lembramos que, em dimensão dois, a curvatura seccional $k(\sigma, p)$ é a curvatura gaussiana e depende apenas do ponto p. Eis que na varidade homogênea a curvatura independe do ponto, e portanto, a curvatura é constante. $\square$

Teorema 3.2 *Uma geometria bidimensional* $(G, \mathbb{X})$ *é equivalente a* $(Isom(\mathbb{E}^2), \mathbb{E}^2)$ *ou* $(Isom(\mathbb{S}^2), \mathbb{S}^2)$ *ou* $(Isom(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$.

Prova: Com o lema acima a prova é consequência direta do teorema 2.13. $\square$