4
Geometrias tridimensionais

4.1
$\mathbb{E}^3$

Já sabemos algumas coisas sobre $\mathbb{E}^3$. O grupo de isometrias de $\mathbb{E}^3$ é isomorfo à $G = O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, e diferentemente de $\mathbb{E}^2$, os subgrupos de isometrias discretos que agem livremente não são dietrais (gerado por dois elementos), isto é, gerado por apenas dois elementos. Uma isometria de $\mathbb{E}^3$ que preserva a orientação é

– ou uma translação;

– ou uma rotação em torno de um eixo;

– ou uma rotação seguida de uma translação.

Além dessas existem mais quatro tipos de isometrias que não preservam a orientação.

Estamos, como sempre, interessados em subgrupos discreto de G que agem livremente. O subgrupo gerado por três translações é isomorfo a $\mathbb{Z}^3$ é um exemplo e o quociente

$$\mathbb{E}^3/\mathbb{Z}^3 = T^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

é chamado 3-toro.

Uma propriedade de $\mathbb{E}^3$ que nos interessa é que este pode ser folheado por linhas. Okay, vamos relembrar: Uma *folheação* de codimensão r (dimensão $m-r$) de uma variedade $\mathbb{M}$ de dimensão $m-r$ é uma atlas $\pounds = \{(U_i, \phi_i)\}$ para $\mathbb{M}$ que cumpre:

a) Para cada carta (U, ϕ) temos $\phi(U) \subset \mathbb{R}^{m-r} \times \mathbb{R}^r$ com $\phi(U) = V^1 \times V^2$, V^1 aberto de $\mathbb{R}^{m-r}$, V^2 aberto de $\mathbb{R}^{m-r}$.

b) Para cada par de cartas (U_i, ϕ) e (U_j, ψ) temos que

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U_i \cap U_j) \to \phi(U_i \cap U_j)$$

pode ser escrito com $\phi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y))$.

Observe que em cada carta y é constante na segunda coordenada. Podemos assim construir uma família de subvariedades de $\mathbb{M}$ de dimensão $m-r$. Aqui, $\mathbb{M}$ é decomposta em subvariedades de dimensão $m-r$.

Agora, considere $\mathbb{X} = \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^1$. Temos que o atlas produto define uma folheação de codimensão 1 que com a metrica produto garante que

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{X}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^1)$$

que é isomorfo ao grupo

$$O(2) \ltimes \mathbb{R}^2 \times O(1) \ltimes \mathbb{R}^1 = E(2) \times E(1).$$

Note que o grupo acima age trasitivamente sobre $\mathbb{X}$ preservando a folheção. Ficamos tentados a dizer que $(E(2) \times E(1), \mathbb{X})$ é uma geometria, contudo, $E(2) \times E(1)$ pode ser visto com subgrupo próprio de $E(3)$. Consequentemente, $(E(2) \times E(1), \mathbb{X})$ é uma subgeometria de $(E(3), \mathbb{X})$.

Folheado Euclidiano: Como observamos acima podemos escrever

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{M}_t \text{ onde } \mathbb{M}_t := \mathbb{R}^2 \times \{t\}.$$

Ou ainda,

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^2} \mathbb{N}_{(x,y)} \text{ onde } \mathbb{N}_{(x,y)} := \{(x,y)\} \times \mathbb{R}.$$

Observe que para cada ponto $p = (x, y, t)$ em $\mathbb{R}^3$ temos que

$$T_p\mathbb{R}^3 = T_{(x,y)}\mathbb{M}_t \oplus T_t\mathbb{N}_{(x,y)}.$$

Tome a métrica riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle := e^t \langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathbb{M}_t$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é induzida em cada $\mathbb{M}_t$ por $\mathbb{E}^2$ e tome a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle^1$ sobre $\mathbb{N}_{(x,y)}$ obtida pela restrição da métrica de $\mathbb{E}^3$. A variedade $\mathbb{R}^3$ com a métrica

$$ds^2 = e^t dx + e^t dy + dt$$

é chamada *Folheado euclidiano* e a denotamos por $\mathbb{E}^2_{\mathcal{F}}$.

Poderiamos tomar a métrica da forma $ds^2 = e^{\lambda t} dx + e^{\lambda t} dy + dt$ com $\lambda \neq 0$ e obter uma variedade riemanniama isométrica ao folheado euclidiano.

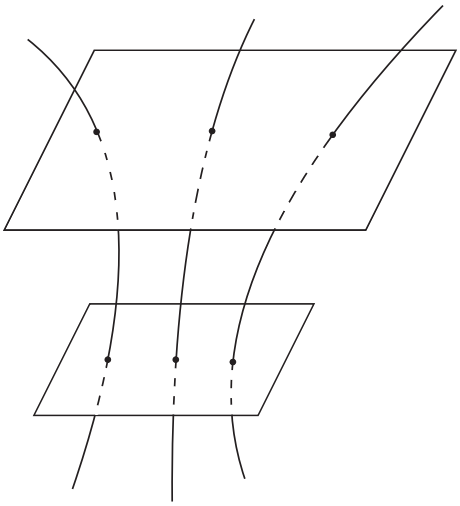

Figura 2

4.2
$\mathbb{S}^3$

A esfera $\mathbb{S}^3$ pode se identificada com a componente conexa da identidade do grupo das matrizes unitárias

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C});\ z\bar{z} + w\bar{w} = 1 \right\}.$$

Ao contrário de $\mathbb{S}^2$ a esfera $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie com a multiplicação de matrizes sobre os números complexo. A álgebra de Lie de $U(2)$ tem uma base

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4-1}$$

Note que $\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3$, $[\xi_1, \xi_3] = -2\xi_2$ e $[\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1$. Lembre que $SU(2)$ é o recobrimento universal de $SO(3)$. E por isso a álgebra de Lie de $\mathbb{S}^3$ é $\mathfrak{so}(3)$. Segue que $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie simples e unimodular. Por multiplicação à esquerda obtemos três campos vetoriais invariantes à esquerda sobre $\mathbb{S}^3$. Fixado um produto interno em $\mathfrak{so}(3)$ podemos obter, por translações à esquerda, uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{S}^3$. Desse modo, temos que $\mathbb{S}^3$ é uma variedade riemanniana cuja métrica é invariante por tranlações à esquerda.

Podemos ainda escrever a esfera como espaço homogêneo $\mathbb{S}^3 = SU(2)$ considerando a ação de $U(2)$ sobre $\mathbb{C}^2$. E de modo semelhante ao espaço projetivo real definimos o espaço projetivo complexos

$$P\mathbb{C}^{n-1} := \mathbb{S}^{2n-1}/\{I, -I\} = SU(n)/U(n-1).$$

Em particular, $P\mathbb{C}^1 = SU(2)/U(1)$. Como $P\mathbb{C}^1 = \mathbb{S}^2$ e $U(1) = \mathbb{S}^1$ temos a sequência exata

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

que forma um fibrado conhecido como *fibrado de Hopf*. Este é preservado pela ação de $\mathbb{S}^3$ sobre si mesma.

Esferas de Berger: Em 4-1, contudo, dado $\tau > 0$ tome $\sigma_1 = \frac{1}{\tau}\xi_1$, $\sigma_2 := \tau\xi_2$ e $\sigma_3 := \tau\xi_3$. Observe que

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \frac{2}{\tau}\sigma_3,\ [\sigma_1, \sigma_3] = -\frac{2}{\tau}\sigma_2 \text{ e } [\sigma_2, \sigma_3] = \frac{2}{\tau}\sigma_1.$$

Considere os campos invariantes a esquerda obtidos por multiplicação a esquerda. A variedade $SU(2)$ com a métrica riemanniana obtida através desse campo é chamada *esfera de Berger*.

4.3
$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$

A variedade $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ é obtida pelo produto de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{E}^1$ com a métrica riemanniana produto. Naturalmente o grupo de isometrias de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ pode ser identificado com o grupo $G = \text{Isom}(\mathbb{S}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{E}^1)$ que é isomorfo à $O(3) \times O(1) \ltimes \mathbb{R}$. Em outras palavras, cada isometria f de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ pode ser representada pelo par (α, β) onde $\alpha \in O(3)$ e $\beta \in O(1) \ltimes \mathbb{R}$. Logo a componente conexa do grupo de isotropia da ação de G sobre $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ é isomorfa a $SO(2)$.

Seja Γ o grupo gerado por (e, β) onde β é uma translação. Temos que o quociente $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}/\Gamma$ é isométrico a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Trocando e pela aplicação antípoda temos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}/\Gamma$ que é isométrico a $\mathrm{P}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Esse são duas das sete variedades sem bordo modeladas por $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$. E como o leitor deve ter desconfiado essa não é a mais fascinante das geometrias.

4.4
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$

Similar a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ construímos a variedade $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ como a produto das variedades $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{R}$ e com a métrica riemanniana produto. O grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ que preserva a métrica riemanniana produto é $G := \text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}) = \text{Isom}(\mathbb{H}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{E}^1)$. Como $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Isom}(\mathbb{E}^1)$ agem transitivamente sobre $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{E}$, respectivamente, segue que $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{E}^1)$

age transitivamente sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$. Perceba que $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E})$ é isomorfo a $O_+(2,1) \times O(1) \ltimes \mathbb{R}$. Logo a componente conexa do grupo de isotropia da ação de G sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ é isomorfa a $SO(2)$. Ao contrario de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ temos várias variedades modeladas por $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ obtidas pelo produto de uma superfície hiperbólica com $\mathbb{E}^1$.

Folheado Hiperbólico: Vamos seguir a mesma ideia aplicada no folheado euclidiano. Note que podemos escrever $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ como

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E} = \bigcup_{t \in \mathbb{E}} \mathbb{M}_t \text{ onde } \mathbb{M}_t := \mathbb{H}^2 \times \{t\}.$$

Ou ainda,

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E} = \bigcup_{(x,y) \in \mathbb{H}^2} \mathbb{N}_{(x,y)} \text{ onde } \mathbb{N}_{(x,y)} := (x,y) \times \mathbb{E}.$$

Observe que, para cada ponto $p = (x,y,t)$ em $\mathbb{R}^3$, temos que

$$T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}) = T_{(x,y)}\mathbb{M}_t \oplus T_t\mathbb{N}_{(x,y)}.$$

Tome a métrica riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle := e^t \langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathbb{M}_t$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é induzida em cada $\mathbb{M}_t$ por $\mathbb{H}^2$ e tome a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle^1$ sobre $\mathbb{N}_{(x,y)}$ obtida pela restrição da métrica de $\mathbb{E}$. A variedade $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ com a métrica

$$ds^2 = \frac{e^t}{y^2}dx + \frac{e^t}{y^2}dy + dt$$

é chamada *Folheado hiperbólico* e a denotamos por $\mathbb{H}^3_{\mathcal{F}}$.

4.5
$\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$

Nessa secção, faremos uma breve apresentação do espaço $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ e definiremos o Fibrado Simples. O espaço $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ é o recobrimento universal do grupo de Lie $SL_2\mathbb{R}$ que bem conhecido. De outro lado, o fibrado simples que ainda vamos definir não é conhecido, até onde sei. O Fibrado simples é uma das geometrias que surgem quando retiramos a hipótese do quociente compacto na definição de geometria. Por tudo isso, vamos tentar defini-lo de forma a motivar o caro leitor.

Primeiramente, apresentamos algumas definições importantes que usaremos agora de no decorrer de todo trabalho. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade suave tridimensional. Um *campo de planos* sobre $\mathbb{M}$ é uma aplicação, $P : x \mapsto P_x$, que a cada pondo $x \in \mathbb{M}$ da variedade corresponde um plano seccional, P_x, isto é, um subespaço vetorial de $T_x\mathbb{M}$ bidimensão. Dado um campo de planos P sobre $\mathbb{M}$ e um ponto x em $\mathbb{X}$. Dizemos que P é *integrável em* p quando existe uma subvariedade $\mathbb{N}_x$ de $\mathbb{M}$ que passa por x e seu espaço tangente no ponto x seja P_x, ou seja, x pertence à $\mathbb{N}$ e $T_x\mathbb{N} = P_x$. Nesse caso, a subvariedade $\mathbb{N}$ é chamada *variedade integral passando por* x. Naturalmente, dizemos que o campo de planos é *não-integrável em* x quando é não-integrável em x. Quando o campo de planos é integrável em todos os pontos de $\mathbb{M}$ dizemos que o campo de planos é *integrável* ou *totalmente integrável*. Quando o campo de planos é não-integrável em cada ponto de $\mathbb{M}$ dizemos que o campo de planos é *totalmente não-integrável*, nesse caso, dizemos que $\mathbb{M}$ é uma *estrutura de contato*.

O teorema abaixo é uma versão para variedades tridimensional do *Teorema de Frobenius* cuja demonstração pode ser encontrado em [Wa] ou [CaNe].

Teorema 4.1 *(Frobenius) Seja $\mathbb{M}$ uma variedade de dimensão três e seja P um campo de planos sobre $\mathbb{M}$. O campo de planos P é integrável (totalmente) se, somente se, para cada ponto x em $\mathbb{M}$ um par de campos vetoriais suaves, X e Y, definidos em uma vizinhança de x temos que $[X,Y] \in P$.*

Agora, como vimos no final da secção 3 do capítulo 2 $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ fibra sobre $\mathbb{H}^2$ por retas. Considere $\mathbb{H}^2$ com o modelo do semi-plano superior, olhemos para $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ como a variedade

$$\{(z,t) \in \mathbb{R}^3;\ t \in \mathbb{R} \text{ e } z = x + iy \in \mathbb{H}^2\}$$

com a métrica induzida pela projeção das fibras. Naturalmente, a aplicação de projeção das fibras é uma submerção riemanniana. Por outro lado, a álgebra de Lie simples determinada por: $[X,Y] = 2Z$, $[Y,Z] = 2X$, $[Z,X] = 2Y$ onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e } Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a álgebra de Lie do grupo $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, pois, é a álgebra de Lie de $SL_2\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Frobenius o campo de planos gerado pelos campos X e Y é não-integrável. Segue que $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ é uma estrutura de contato. Isso a distingue de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$.

Em consequência do que vimos na secção 3 do capítulo 3, temos $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{H}^2$ por retas. Contudo, muitplicando a métrica de $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ por e^t na direção da fibras obtemos uma nova estrutura Riemanniana para $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$. Nesse caso, a projeção das fibras não é uma submersão Riemanniana. Vamos abaixo esclarecer o que dizemos nesse paragrafo e definir essa nosso candidata à geometria.

Fibrado Simples: Primeiramente, vamos fixar um único ponto em cada fibra. Podemos fazer isso tomando

$$\mathbb{M}_0 := \{(z, 0) \in \mathbb{R}^3;\ z = x + iy \in \mathbb{H}^2\}.$$

Em seguida, fixamos uma direção para as fibras e multiplicamos a métrica por e^t nessa direção, onde t é a distância do ponto $p = (z, t)$ ao ponto $p_0 := (z, 0)$ em M_0. Essa variedade Riemanniana que construímos acima é chamada *fibrado simples* denotamos por $SL_{\mathcal{F}}$ que esboçamos abaixo.

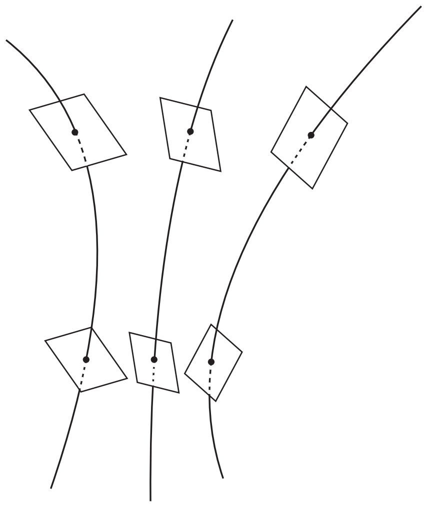

Figura 3

4.6
$\mathbb{N}$il

O grupo *nilpotente*, $\mathbb{N}$il, é o grupo de Lie simplesmente conexo determinado pela álgebra de Lie $\mathfrak{nil}$ gerada por

$$[X, Y] = Z, [Z, X] = 0, [Z, Y] = 0.$$

O grupo nilpotente também conhecido como grupo de *Heisenberg*. O grupo niltpotente é um subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$ como vemos abaixo. Seja

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e } Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uma base para álgebra de Lie;

$$\mathfrak{nil} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

do grupo de Lie

$$\mathbb{N}\mathrm{il} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

De modo semelhante a $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, temos que $\mathbb{N}$il fibra sobre $\mathbb{E}^2$ com fibra $\mathbb{E}^1$. E podemos construir o *Fibrado nipotente* de modo inteiramente análogo.

4.7
$\mathbb{S}$ol

O grupo de Lie simplesmete conexo $\mathbb{S}$ol é determinado pela álgebra de Lie $\mathfrak{sol}$, $[X,Y] = 0, [Z,X] = X, [Z,Y] = -Y$. Mais explicitamente,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e } Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com $\mathfrak{sol} = \mathfrak{D} \ltimes \mathbb{R}^2$ onde $\mathfrak{D} := \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R} \right\}$. E assim $\mathbb{S}\mathrm{ol} = D \ltimes \mathbb{R}^2$ onde

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podemos identificar $\mathbb{S}$ol com o grupo formado pelas matrizes da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ t, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

O grupo $\mathbb{S}$ol age sobre si mesmo com uma multiplicação à esquerda. Essa ação é claramente transitiva e livre. Assim, a ação tem grupo de isotropia trivial. Como não admite uma métrica invariante à esquerda com grupo de isotropia não trivial por [HaLe], temos eu $\mathbb{S}$ol é uma geometria.