

5

Classificação das Geometrias Tridimensionais

5.1

H_x isomorfo a $SO(3)$

Neste último capítulo apresentamos a classificação das geometrias tridimensionais sem supor a existência de um quociente compacto. Como mencionamos no capítulo 1, a condição de ter um quociente compacto é imposta na definição original das “geometrias de Thurston”. Em nosso caso, as geometrias podem ou não ter um quociente compacto. Todavia, vamos extrair a classificação original conhecida com Teorema de Thurston no decorrer deste capítulo. Apresentamos a demonstração dividida em proposições seguindo uma linha de desenvolvimento construtiva. Vamos frizar os pontos onde o quociente compacto é necessário e onde não obtemos novas geometrias ou não obtemos uma resposta.

Relembre que dada uma geometria (G, \mathbb{X}) , denotamos por $H := G_\bullet$ a componente conexa da identidade. Temos que H age transitivamente sobre \mathbb{X} e o grupo de isotropia de $x \in \mathbb{X}$ é $H_x = (G_x)_\bullet$ onde $(G_x)_\bullet$ é a componente conexa da identidade do grupo de isotropia G_x , como vimos no Teorema 1.27. E ainda, H_x é isomorfo a um subgrupo de Lie conexo e fechado de $SO(n)$ onde $n = \dim \mathbb{X}$ pela Observação 1.35. Vamos discutir o caso em que $\dim(\mathbb{X}) = 3$ iniciando pelo seguinte lema:

Proposição 5.1 *Seja (G, \mathbb{X}) uma geometria tridimensional. Então,*

1. H_x é isomorfo a $SO(3)$, se $\dim(H_x) = 3$;
2. H_x é isomorfo a $SO(2)$, se $\dim(H_x) = 1$;
3. H_x é isomorfo a $SO(1) = \{e\}$, se $\dim(H_x) = 0$.

Prova: Sabemos que a álgebra de Lie de $SO(3)$, $\mathfrak{so}(3)$, é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ que consiste das matrizes antisimétricas. Note que $\mathfrak{so}(3)$ é gerado pelas matrizes

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, se $\dim(H_x) = 3$, então sua álgebra de Lie é gerada por $\{X, Y, Z\}$ com $[X, Y] = Z$, $[Z, X] = Y$ e $[Z, Y] = -X$, ou seja, $\mathfrak{so}(3)$. Se $\dim(H_x) = 1$, então, após uma conjugação, sua álgebra de Lie é gerada por $\{X\}$ que é $\mathfrak{so}(2)$. Aqui identificamos cada matriz $A \in SO(2)$ com

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $SO(3)$.

Se $\dim(H_x) = 0$, então a conexidade garante que $H_x = \{e\} = SO(1)$.

Por fim, vejamos que não é possível $\dim(H_x) = 2$. Eis que isso implica na existência de uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{so}(3)$ de dimensão dois. Sejam A e B geradores dessa subálgebra. Ambos devem ser matrizes antisimétricas e $[A, B] = AB - BA$ deve ser uma combinação linear de A e B . Entretanto, $[A, B] = AB - BA$ for uma combinação linear de A e B se, e somente se, estes são proporcionais. Para tanto, basta observar que $[A, B] = A \times B$ identificando o vetor (x, y, z) com a matriz antisimétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfim, isso conclui nossa prova. \square

Teorema 5.2 *Seja (G, \mathbb{X}) como no item 1 da Proposição 5.1. Temos que (G, \mathbb{X}) é equivalente à $(\text{Isom}(\mathbb{E}^3), \mathbb{E}^3)$, $(\text{Isom}(\mathbb{S}^3), \mathbb{S}^3)$ ou $(\text{Isom}(\mathbb{H}^3), \mathbb{H}^3)$.*

Prova: A prova segue do Teorema 2.13. \square

5.2

H_x isomorfo a $SO(2)$

Vamos estudar o caso $H_x = SO(2)$. Começamos pelo lema:

Lema 5.3 *Seja (G, \mathbb{X}) como no item 2 da Proposição 5.1. Então existe um campo unitário $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{X})$ sobre \mathbb{X} que é H -invariante, i.e.,*

$$d_x g \cdot V_x = V_{g \cdot x}$$

para todo $x \in \mathbb{X}$ e todo $g \in H$.

Prova: Considere $H := G_\bullet$ a componente conexa da identidade de G , e seja H_x o seu grupo de isotropia. Sabemos que H também age transitivamente sobre \mathbb{X} e que o grupo de isotropia é $(G_x)_\bullet$, a componente conexa da identidade de G_x (Teorema 1.27). Por hipótese $H_x \simeq SO(2) < SO(3)$. Assim, fixado $g \neq e$ em H_x , identificamos a diferencial de g em x

$$d_x g : T_x \mathbb{X} \rightarrow T_x \mathbb{X}$$

com uma rotação em torno de uma reta passando pela origem em \mathbb{R}^3 , que é um elemento de $SO(3)$. Assim $d_x g$ tem um autovalor 1 e, conseqüentemente, um autovetor unitário que denotamos por V_x cujo o autoespaço denotamos por L_x . Isso significa que

$$d_x g \cdot V_x = V_x \text{ e } L_x = \{tV_x \in T_x \mathbb{X}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Eis que $SO(2)$ é um grupo de Lie de dimensão igual a 1, e portanto, é abeliano. Deste modo, dado um h em H_x vale $g \circ h = h \circ g$. Todavia, $g(h(x)) = x$ e, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} d_x g \cdot (d_x h \cdot V_x) &= d(g \circ h) \cdot V_x \\ &= d(h \circ g) \cdot V_x \\ &= d_x h \cdot (d_x g \cdot V_x) \\ &= d_x h \cdot V_x. \end{aligned}$$

Isso diz que $d_x h \cdot V_x$ é um autovetor de $d_x g$ associado ao autovalor 1 e $\|d_x h \cdot V_x\| = 1$, pois h é uma isometria. Temos duas alternativas $d_x h \cdot V_x = V_x$ ou $d_x h \cdot V_x = -V_x$. Afirmamos que a segunda alternativa não é possível. De fato, como H_x é conexo (por caminhos), isso nos permite tomar um caminho α

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] \times H_x &\longrightarrow H_x \\ (t, y) &\longmapsto \alpha(t, y) \end{aligned}$$

sobre H_x que leve g a h . Note que para cada $t \in [0, 1]$ temos que $\alpha^t := \alpha(t, \cdot) \in H_x$. Em particular, $\alpha(0, \cdot) = g$, $\alpha(1, \cdot) = h$ e $\alpha^t(x) = x$ para todo $t \in [0, 1]$. Segue que $d_x \alpha^0 \cdot V_x = d_x g \cdot V_x = V_x$ o que, pela continuidade, implica que $d_x \alpha^t \cdot V_x = V_x$ para cada $t \in [0, 1]$. E assim,

$$d_x h \cdot V_x = V_x$$

para todo h em H_x .

Enfim, mostremos que o campo

$$\begin{aligned} V : \mathbb{X} &\longrightarrow T\mathbb{X} \\ x &\longmapsto V_x \end{aligned}$$

é H -invariante. Sejam g em H , x em \mathbb{X} e $y = g(x)$. Afirmamos que $H_{(gx)} = H_y = gH_xg^{-1}$. De fato, se $h \in H_y$, veja que $g^{-1}hg$ pertence a H e $g^{-1}hg(x) = x$. Logo $f := g^{-1}hg$ pertence a H_x , o que implica que $h = gfg^{-1}$ pertence a gH_xg^{-1} . Portanto, $H_y \subseteq gH_xg^{-1}$. De modo análogo veja que $H_y \supseteq gH_xg^{-1}$. Isso prova nossa afirmação.

E agora, dado um $f \in H_y$, existe um $h \in H_x$ tal que $f = ghg^{-1}$. Sabemos que $d_xh \cdot V_x = V_x$ e $h(x) = x$. Daí

$$\begin{aligned} d_{g(x)}f \cdot (d_xg \cdot V_x) &= d_x(fg) \cdot V_x \\ &= d_x(gh) \cdot V_x \\ &= (d_{h(x)}g) \cdot (d_xh \cdot V_x) \\ &= d_xg \cdot V_x, \end{aligned}$$

donde $d_xg \cdot V_x$ é um autovetor de $d_{g(x)}f$ associado ao autovalor 1. Como f pertence a $H_{g(x)}$ segue que $d_xg \cdot V_x = V_{g(x)}$. Completamos a prova do lema. \square

O campo unitário V sobre \mathbb{X} que vimos acima determina um fluxo φ

$$\begin{cases} \varphi_0(x) &:= x; \\ \dot{\varphi}_t(x) &:= V_{\varphi_t(x)}. \end{cases} \quad (5-1)$$

para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{X}$.

Esse fluxo determina uma folheação \mathfrak{S} unidimensional (codimensão 2) de \mathbb{X} . Cada folha dada por $\mathfrak{S}_x := \{\varphi_t(x); t \in \mathbb{R}\}$ é uma variedade unidimensional conexa, e portanto, é difeomorfa a \mathbb{E} ou \mathbb{S}^1 . A saber, a aplicação $t \mapsto \varphi_t(x)$ é uma *curva integral* para V_x passando por x . Uma outra propriedade útil desse fluxo segue abaixo.

Lema 5.4 *A ação de H sobre \mathbb{X} comuta com o fluxo (5-1). Mais explicitamente,*

$$\varphi_t(gx) = g\varphi_t(x)$$

para todo t em \mathbb{R} , todo g em H e todo x em \mathbb{X} .

Prova: Basta mostrarmos que dados $x \in \mathbb{X}$ e $g \in H$ a aplicação $t \mapsto g\varphi_t(x)$ é uma curva integral para V_{gx} passando por x . De fato, aplicando a regra da

cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(g\varphi_t(x)) \right|_{t=0} &= d_{(\varphi_0(x))}g \cdot \left(\left. \frac{d}{dt}\varphi_t(x) \right|_{t=0} \right) \\ &= d_x g \cdot \dot{\varphi}_0(x) \\ &= d_x g \cdot V_x \\ &= V_{gx}. \end{aligned}$$

E para $t = s$, vemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(g\varphi_t(x)) \right|_{t=s} &= \left. \frac{d}{dt}(g\varphi_t(\varphi_s(x))) \right|_{t=0} \\ &= V_{g\varphi_s(x)}. \end{aligned}$$

Note que a última igualdade é garantida pela H -invariância do fluxo. Pela unicidade da curva integral, segue o lema. \square

Segue do lema acima que o fluxo preserva as folhas. Vejamos, dados $x, y \in \mathbb{X}$ sobre uma mesma folha, digamos $y \in \mathfrak{F}_x$, temos $y = \varphi_t(x)$ para algum t em \mathbb{R} , e conseqüentemente, $H_x = H_y$. Em resumo, para cada $x \in \mathbb{X}$ temos

$$H_x = H_{\varphi_t(x)} \quad (5-2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, dado $g \in H_x$ tem-se $gx = x$, por definição. E, pelo lema acima, $g\varphi_t(x) = \varphi_t(gx) = \varphi_t(x)$ o que implica $g \in H_{\varphi_t(x)}$. Portanto, $H_x \subseteq H_{\varphi_t(x)}$ e trocando x por $\varphi_t(x)$ obtemos $H_x \supseteq H_{\varphi_t(x)}$ e enfim, $H_x = H_{\varphi_t(x)}$.

Vimos que o campo unitário V determina um campo de retas $L : x \mapsto L_x$ onde

$$L_x := \{\lambda V_x; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

é o subespaço unidimensional de $T_x\mathbb{X}$ que é o espaço tangente de \mathfrak{F}_x em x . Considere o complemento ortogonal de L_x em $T_x\mathbb{X}$ que é dado por

$$P_x := \{u \in T_x\mathbb{X}; \langle u, V_x \rangle_x = 0\}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ denota a métrica riemanniana em x . Obtemos assim um campo de planos $P : x \mapsto P_x$. Evidentemente, temos uma soma direta $P_x \oplus L_x = T_x\mathbb{X}$ para cada x em \mathbb{X} . E ainda podemos induzir um produto interno e uma norma em cada L_x e P_x . Vamos usar a mesma notação, $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, para ambos. Observe,

que fixados $t \in \mathbb{R}$ e x em \mathbb{X} temos

$$\begin{aligned} \langle d_x \varphi_t \cdot v, d_x \varphi_t \cdot v \rangle &= \langle d_x \varphi_t \cdot (\lambda V_x), d_x \varphi_t \cdot (\lambda V_x) \rangle \\ &= \langle \lambda d_x \varphi_t \cdot V_x, \lambda d_x \varphi_t \cdot V_x \rangle \\ &= \langle \lambda V_x, \lambda V_x \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

para todo $v = \lambda V_x \in L_x$. Isso significa que o fluxo age por isometrias sobre as folhas \mathfrak{S}_x , ou seja, sobre o campo de retas L . Entretanto, o fluxo não necessariamente age por isometrias sobre o campo de planos P . Ainda assim, o campo de planos é H -invariante e é preservado pelo fluxo como veremos nos lemas abaixo.

Lema 5.5 *O campo de planos P é H -invariante, i.e.,*

$$d_x g \cdot (P_x) = P_{gx}$$

para todo g em H e todo x em \mathbb{X} .

Prova: De fato, dados g em H , $x \in \mathbb{X}$ e v em $T_{gx}\mathbb{X}$, temos que $v = d_x g \cdot u \in d_x g \cdot (P_x)$. Por definição, u pertence a P_x se, e somente se,

$$\begin{aligned} \langle u, V_x \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle d_x g \cdot u, d_x g \cdot V_x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle d_x g \cdot u, V_{gx} \rangle = 0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $d_x g \cdot u$ pertence a P_{gx} . Portanto $d_x g \cdot (P_x) = P_{gx}$. \square

No lema abaixo, e no decorrer do texto, denotamos as restrições de φ_t e $d_x \varphi_t$ a uma subvariedade ou subespaço por φ_t e $d_x \varphi_t$ deixando que o leitor entenda no contexto qual é o domínio da aplicação em questão.

Lema 5.6 *Sejam o fluxo φ_t , L e P como vimos acima. Então o fluxo preserva*

- i) *o campo de retas L , i.e., $d_x \varphi_t \cdot v \in L_{\varphi_t(x)}$ para todo v em L_x ,*
- ii) *o campo de planos P , i.e., $d_x \varphi_t \cdot u \in P_{\varphi_t(x)}$ para todo u em P_x ,*
- iii) *e a fluxo preserva a ortogonalidade entre L e P , i.e., e $u \perp V_x$ implica $d_x \varphi_t \cdot u \perp d_x \varphi_t \cdot V_x$.*

Prova: Primeiramente, observe que o fluxo preserva o campo de retas L . É evidente, pois o fluxo é uma curva integral desse campo. A saber

$$\begin{aligned} d_x\varphi_t \cdot V_x &= d_x\varphi_t \cdot \left(\frac{d}{ds}\varphi_s(x) \Big|_{s=0} \right) = \frac{d}{ds}(\varphi_t \circ \varphi_s(x)) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}(\varphi_s \circ \varphi_t(x)) \Big|_{s=0} = \dot{\varphi}_0(\varphi_t(x)) \\ &= V_{\varphi_t(x)}, \end{aligned}$$

que implica $d_x\varphi_t \cdot V_x = V_{\varphi_t(x)} \in L_{\varphi_t(x)}$.

Tome g em $H_{\varphi_t(x)}$ tal que $d_y g$ seja uma rotação de ângulo π entorno de $V_y = V_{\varphi_t(x)}$. Por 5-2 temos que g pertence a H_x , uma rotação de ângulo π entorno de V_x , logo $d_x g \cdot u = -u$. Eis que o fluxo comuta com a ação e assim

$$\begin{aligned} d_y\varphi_t^{-1} \cdot (d_y g \cdot d_x\varphi_t \cdot u) &= d_x(\varphi_t^{-1} g \varphi_t) \cdot u \\ &= d_x g \cdot u \\ &= -u \end{aligned}$$

e isso implica que

$$\begin{aligned} d_y g \cdot (d_x\varphi_t \cdot u) &= d_x\varphi_t \cdot (-u) \\ &= -d_x\varphi_t \cdot u. \end{aligned}$$

Deste modo, devemos ter $d_x\varphi_t \cdot u \perp V_{\varphi_t(x)}$, $v = d_x\varphi_t \cdot u$.

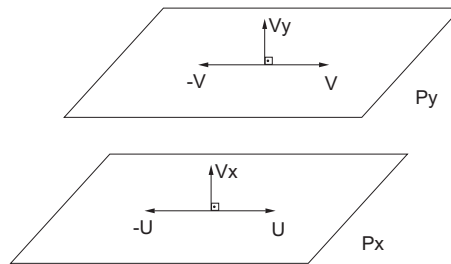


Figura 1

Lembre que dado x em \mathbb{X} vale $T_x\mathbb{X} = L_x \oplus P_x$ o que significa que cada $u \in T_x\mathbb{X}$ pode ser escrito de forma única, $u = u_L + u_P$, onde $u_L \in L_x$ e $u_P \in P_x$ tal que $u_L \perp u_P$. Seja $t \in \mathbb{R}$, $u \in P_x$ quaisquer. Podemos escrever

$$d_x\varphi_t \cdot u = v_L + v_P \text{ com } v_L \in L_{\varphi_t(x)} \text{ e } v_P \in P_{\varphi_t(x)}$$

Pelo primeiro paragrafo,

$$u = d_x\varphi_t^{-1} \cdot (v_L + v_P) = d_x\varphi_t^{-1} \cdot v_L + d_x\varphi_t^{-1} \cdot v_P$$

onde $d_x\varphi_t^{-1}v_L \in L_x$. Eis que u pertence P_x implica que $d_x\varphi_t^{-1}v_L = 0$. Portanto, $d_x\varphi_t \cdot u = v_P \in P_{\varphi(x)}$. \square

Vimos que o fluxo leva L_x em $L_{\varphi(x)}$ isometricamente e leva P_x em $P_{\varphi(x)}$, porém, não necessariamente de forma isométrica. Caso fosse verdade o campo V seria um *campo de Killing* sobre \mathbb{X} , isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$ o difeomorfismo φ_t seria uma isometria de \mathbb{X} . Todavia, a curvatura seccional é constante ao longo do campo de planos. Perceba que, P é um campo H -invariante e \mathbb{X} uma variedade homogênea. Para cada $x, y \in \mathbb{X}$ e $t \in \mathbb{R}$ temos uma isometria $g \in H$ tal que $gx = y$ e $d_xg(P_x) = P_{gx} = P_y$. Considere, $K(\sigma, x)$ a curvatura seccional de \mathbb{X} em x . Temos $K(P_x, x) = K(d_xg(P_x), gx) = K(P_y, y)$, em outras palavras, a curvatura seccional é constante ao longo do campo de planos.

O fato do fluxo levar L_x em $L_{\varphi(x)}$ isometricamente e levar P_x em $P_{\varphi(x)}$, possivelmente não isometricamente significa que a métrica riemanniana de \mathbb{X} é preservada sobre o campo V , ou seja, na direção transversal ao fluxo (às folhas). Contudo, pode “expandir” ou “contrair” uniformemente na direção do fluxo modificando o volume e preservando a ortogonalidade entre o campo de retas e o campo de planos. Tentaremos esclarecer isso um pouco mais.

Definimos uma função positiva $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto C(t) := C_t$ pondo

$$C_t := \frac{\|d_x\varphi_t \cdot v\|}{\|v\|}$$

onde x em \mathbb{X} e v não nulo em P_x são fixados.

Lemma 5.1 *A função $t \mapsto C_t$, vista acima, está bem definida, isto é, C_t independe do ponto $x \in \mathbb{X}$ e do vetor $v \in P_x$. Além disso, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $C_t = e^{ct}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova: Mostremos que C_t independe das escolhas de x e v . De fato, dados u e v não nulos sobre P_x , temos $\|v\| = \|\lambda u\|$ onde $\lambda := \frac{\|v\|}{\|u\|} > 0$. Sabe-se que o grupo de isotropia H_x age como rotações em $T_x\mathbb{X}$ que fixam um eixo L_x . Podemos tomar um $g \in H_x$ tal que $d_xg \cdot v = \lambda u$. Assim $\|w\| = \|d_xg \cdot w\|$ para

todo $w \in T_x\mathbb{X}$ e

$$\begin{aligned}
 \frac{\|d_x\varphi_t \cdot u\|}{\|u\|} &= \frac{\|d_x\varphi_t \cdot (\lambda u)\|}{\|\lambda u\|} \\
 &= \frac{\|d_x(\varphi_t \circ g) \cdot v\|}{\|v\|} \\
 &= \frac{\|d_x(g \circ \varphi_t) \cdot v\|}{\|v\|} \\
 &= \frac{\|d_xg \cdot (d_x\varphi_t \cdot v)\|}{\|v\|} \\
 &= \frac{\|d_x\varphi_t \cdot v\|}{\|v\|}.
 \end{aligned}$$

Isso mostra que C_t independe da escolha de v .

Além disso, C_t também independe da escolha de x . Perceba que, pela homogeneidade, dados x e y em \mathbb{X} podemos tomar uma isometria $g \in H$ tal que $g(x) = y$. Tome $v = d_xg \cdot u$ onde $u \in T_x\mathbb{X}$ e $v \in T_y\mathbb{X}$ temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\|d_y\varphi_t \cdot v\|}{\|v\|} &= \frac{\|d_y\varphi_t \cdot (d_xg \cdot u)\|}{\|d_xg \cdot u\|} \\
 &= \frac{\|d_x(\varphi_t \circ g) \cdot u\|}{\|u\|} \\
 &= \frac{\|d_x(g \circ \varphi_t) \cdot u\|}{\|u\|} \\
 &= \frac{\|d_xg \cdot (d_x\varphi_t \cdot u)\|}{\|u\|} \\
 &= \frac{\|d_x\varphi_t \cdot u\|}{\|u\|}.
 \end{aligned}$$

Em suma, temos que $\|d_x\varphi_t \cdot v\| = C_t\|v\|$ para todo t em \mathbb{R} e $v \in T_x\mathbb{X}$ não nulo e $x \in \mathbb{X}$.

E ainda

$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_{s+t} = C_s C_t \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5-3)$$

Não é difícil ver que $C_0 = 1$. E dados $x \in \mathbb{X}$, $v \in T_x\mathbb{X}$ e $t, s \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
 C_{s+t} &= \frac{\|d_x\varphi_{s+t}\cdot v\|}{\|v\|} \\
 &= \frac{\|d_x(\varphi_s \circ \varphi_t)\cdot v\|}{\|v\|} \\
 &= \|d_x\varphi_s \cdot (d_x\varphi_t \cdot v)\| \frac{1}{\|v\|} \\
 &= \|d_x\varphi_s \cdot (d_x\varphi_t \cdot v)\| \frac{C_t}{\|d_x\varphi_t \cdot v\|} \\
 &= \frac{\|d_x\varphi_s \cdot (d_x\varphi_t \cdot v)\|}{\|d_x\varphi_t \cdot v\|} C_t \\
 &= C_s C_t.
 \end{aligned}$$

Temos $C_t = a^t$ para algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e todo $t \in \mathbb{R}$, ou ainda, $C_t = e^{ct}$ onde $a = e^c$. Em particular, se $a = 1$ ($c = 0$), então essa é aplicação constante.

□

Lema 5.7 *Se (G, \mathbb{X}) modela uma variedade compacta, então $c = 0$ e em particular o fluxo age por isometrias sobre \mathbb{X} .*

Prova: De fato, seja \mathbb{M} uma variedade modela por (G, \mathbb{X}) . Temos (visto Teorema 1.30 do cap 1) que $\mathbb{M} = \mathbb{X}/\Gamma$ onde Γ é um subgrupo de G agindo livremente e propriamente descontinuamente sobre \mathbb{X} . Supomos Γ contido em H . Como \mathbb{M} é compacta tem volume finito. Descendo o fluxo φ sobre \mathbb{M} com a aplicação de projeção o fluxo deve preservar o volume de \mathbb{M} . Consequentemente, o fluxo deve agir por isometrias. Ou seja $\langle d_x\varphi_t u, d_x\varphi_t v \rangle_x = \langle u, v \rangle_{\varphi_t(x)}$ para todo $x \in \mathbb{X}$ todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $u, v \in T_x\mathbb{X}$. Seque que $C_t = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e portando, $c = 0$. □

Retomemos nossa discursão sobre a folheação \mathfrak{F} . Já mencionamos que todas as folhas são difeomorfa a \mathbb{S}^1 ou a \mathbb{E}^1 . Além disso, para cada duas folhas dadas, existe uma isometria de \mathbb{X} que leva uma em outra. Por conseguinte, todas são isométricas ou a \mathbb{S}^1 ou a \mathbb{E}^1 . Em verdade, como H age transitivamente sobre \mathbb{X} , para quaisquer x e y em \mathbb{X} podemos tomar uma $g \in H$ tal que $gx = y$. Afirmamos que g é uma isometria de \mathfrak{F}_x em \mathfrak{F}_y . Em verdade, como g já é uma isometria também uma isometria com a métrica induzida nas folhas. Assim, basta mostrarmos que g leva \mathfrak{F}_x em \mathfrak{F}_y . Vejamos, z pertence a \mathfrak{F}_y se, e somente se, $z = \varphi_t(y) = \varphi_t(gx)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Como o fluxo comuta com a ação tem-se $z = g\varphi_t(x)$ que pertence a $g(\mathfrak{F}_x)$.

Agora, definimos uma relação de equivalência identificando os pontos de uma mesma folha. Em outras palavras, dados x e $y \in \mathbb{X}$

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathfrak{S}_x \Leftrightarrow y = \varphi_t(x) \text{ para algum } t \in \mathbb{R}.$$

Definimos o espaço quociente $\mathbb{Y} := \mathbb{X}/\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_x; x \in \mathbb{X}\}$. A aplicação de projeção

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{Y} \\ x &\mapsto \text{pr}_1(x) := \mathfrak{S}_x \end{aligned}$$

é uma aplicação aberta com a topologia induzida em \mathbb{Y} . Ou seja, para cada aberto \mathcal{V} o saturado de \mathcal{V} por \mathfrak{S} , $\text{sat}(\mathcal{V}) := \text{pr}_1^{-1}(\text{pr}_1(\mathcal{V})) = \bigcup_{x \in \mathcal{V}} \mathfrak{S}_x$, é um aberto de \mathbb{X} . (Veja [CaNe] página 47). O espaço quociente \mathbb{Y} é também chamado *espaço folha*.

Lema 5.8 *O espaço folha \mathbb{Y} é uma variedade isométrica à \mathbb{E}^2 ou \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 e $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \text{pr}_1, F)$ é um fibrado principal onde $F = \mathbb{S}^1$ ou \mathbb{R} .*

Prova: Seja x_0 em \mathbb{X} . Podemos tomar uma vizinhança \mathcal{U} de x_0 e um $\delta > 0$ tal que para cada $x \in \mathcal{U}$ a aplicação $\exp_x : B_\delta(0) \rightarrow \mathcal{B}_\delta(x)$ é um difeomorfismo de $B_\delta(0)$ em $\mathcal{B}_\delta(x) \supset \mathcal{U}$. A existência dessa vizinhança segue do Teorema 3.7 em [Ca] página 80. Considere uma vizinhança da origem $U_{x_0} \subset T_{x_0}\mathbb{X}$ uma vizinhança da origem tal que $\mathcal{B}_\delta(x_0) : U_{x_0} \rightarrow \mathcal{U}$ seja um difeomorfismo. Definimos $S_{x_0} := \exp_{x_0}(D)$ onde D é um disco centrado na origem suficientemente pequeno contido em $P_{x_0} \cap U_{x_0}$. Afirmamos que cada \mathfrak{S}_x intercepta S_{x_0} em no máximo um ponto. De fato, considere x, y em $S_{x_0} \cap \mathfrak{S}_x$ temos $y = \varphi_t(x)$. Supondo $x \neq y$ escolhemos $g \neq e$ em H_x de modo que $gy \neq y$. Tal g existe em razão de g ser similar a uma rotação em torno de x . Todavia, $g \in G_x = G_{\varphi_t(x)} = G_y$ que significa que $gy = y$, uma contradição que prova nossa afirmação.

Segue que para cada $x \in \mathbb{X}$ temos um aberto $\text{sat}(S_x)$ de \mathbb{X} tal que $\text{sat}(S_x)$ é homeomorfo a $S_x \times F$ onde $F = \mathbb{S}^1$ ou \mathbb{R}^1 . Para $W_x := \text{pr}_1(S_x)$ podemos definir uma aplicação contínua

$$f_x : W_x := \text{pr}_1(S_x) \rightarrow \mathbb{Y}$$

tal que $\text{pr}_1 \circ f_x(W_x) = W_x$ e W_x é um aberto de \mathbb{Y} . Isso garante que \mathbb{Y} é uma variedade de dimensão dois.

E nesse caso, pr_1 é uma aplicação suave com posto 2 que induz um difeomorfismo S_x em W_x que leva P_x isomorficamente em $T_x W_x = T_{\text{pr}_1(x)} \mathbb{Y}$, por conseguinte, induz uma métrica riemanniana em \mathbb{Y} . Como \mathbb{X} é simplesmente

conexa e as fibras são conexas segue que \mathbb{Y} é simplesmente conexa. Enfim, \mathbb{Y} é uma variedade bidimensional homogênea simplesmente conexa. Temos, pelo Teorema (3.2) do capítulo 3, que \mathbb{Y} é isométrica a \mathbb{E}^2 , \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 .

Seguindo a mesma notação usada acima, veja que

$$f(W_x) = S_x \subseteq \text{sat}(S_x) = \text{pr}_1^{-1}(W_x).$$

Isso nos permite identificar cada $z \in \text{pr}_1^{-1}(W_x)$ com um único $\varphi_{\lambda t}(f(y))$ para algum $t \in \mathbb{R}$ e algum $y \in W_x$ onde λ é igual ao comprimento da folha $L_{f(y)}$ caso $F = \mathbb{S}^1$, e igual à 1 caso $F = \mathbb{R}$. Definimos um difeomorfismo de $\phi : \text{pr}_1^{-1}(W_x) \rightarrow W_x \times F$ pondo $\phi(\varphi_{\lambda t}(f(y))) := (y, t)$. Isso significa que $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \text{pr}_1, F)$ satisfaz a condição de *trivialização local* e, nessas condições, $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \text{pr}_1, F)$ é um fibrado onde \mathbb{X} é o espaço total, \mathbb{Y} o espaço base e pr_1 é aplicação de projeção das fibras F . A aplicação f com S_x é chamada *seção do fibrado*. Em todo caso, F é um grupo de Lie, seja $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{S}^1$ e define uma ação de F sobre \mathbb{X}

$$\begin{aligned} \eta : F \times \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{X}. \\ (t, x) &\mapsto \eta(t, x) := \varphi_{\lambda t}(x) \end{aligned}$$

onde λ é como definido anteriormente e \mathbb{S}^1 é visto como o intervalo $[0, 1]$ identificando 0 e 1. Claramente, a ação é transitiva e livre sobre cada folha. Em suma, $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \text{pr}_1, F)$ é um *fibrado principal*. \square

Nesse momento vamos analisar nossa situação. Supomos que a 3-geometria (G, \mathbb{X}) tem a componente conexa do estabilizador de pontos H_x isomorfa ao grupo de Lie $SO(2)$. Assim, obtemos um fluxo φ e um campo de planos P com

$$\langle d_x \varphi_t(x) \cdot u, d_x \varphi_t(x) \cdot v \rangle_x = C_t^2 \langle u, v \rangle_{\varphi_t(x)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo u e v em P_x . Quando $c \neq 0$ convencionamos $c = 1$.

Devemos avaliar os casos

* $c = 0$ ou $c = 1$.

* $P : x \mapsto P_x$ é um campo de planos integrável ou não integrável.

	$c = 0$	$c = 1$
P integrável	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$	$\mathbb{E}_{\mathcal{F}}, \mathbb{H}_{\mathcal{F}}$
P não integrável	$\text{Nil}, \widetilde{SL_2\mathbb{R}}$	$\text{Nil}_{\mathcal{F}}, SL_{\mathcal{F}}$

Teorema 5.9 *Se (G, \mathbb{X}) tem um quociente compacto, então $c = 0$ e,*

- a) supondo P integrável, (G, \mathbb{X}) é equivalente a $(\text{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}), \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E})$ ou $(\text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}), \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E})$;
- b) supondo P não integrável, temos (G, \mathbb{X}) é equivalente a $(\text{Isom}(\text{Nil}), \text{Nil})$ ou $(\text{Isom}(\widetilde{SL_2\mathbb{R}}), \widetilde{SL_2\mathbb{R}})$.

Prova: Supondo $c = 0$ e P integrável, fixamos um ponto x_0 em \mathbb{X} . Como o campo é integrável temos uma variedade integral \mathbb{M}_0 que passa por x_0 e para cada $y \in \mathbb{M}_0$ temos que $T_y\mathbb{M}_0 = P_y$. Como vimos na demonstração do lema 5.8, a seção S_{x_0} está contida em \mathbb{M}_0 que será uma seção do fibrado, nesse caso global, e portando, difeomorfa a \mathbb{Y} . Segue que $\mathbb{M}_0 = \mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou \mathbb{H}^2 . Para cada, t temos uma variedade $\mathbb{M}_t := \varphi_t(\mathbb{M}_0)$ que é isométrica a \mathbb{M}_0 , pois, no caso $C_t \equiv 1$, φ_t é uma isometria. Nesse caso, a menos de alguns ajustes da métrica na direção do fluxo, temos $\mathbb{X} = \mathbb{M}_0 \times F$ onde $M_0 = \mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou \mathbb{H}^2 e $F = \mathbb{E}^1$ ou \mathbb{S}^1 . Contudo, como \mathbb{X} é simplesmente conexo o caso $F = \mathbb{S}^1$ está excluído. Pela maximalidade do grupo de isometrias o caso $M_0 = \mathbb{E}^2$ também está excluído, e temos finalmente $\mathbb{X} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ e $\mathbb{X} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$. Isso completa a prova do item a).

Suponhamos que $c = 0$ e que P é não integrável. A saber, P é uma *estrutura de contato*. Se $\mathbb{Y} = \mathbb{E}^2$, então a fibra F não pode ser \mathbb{S}^1 , pois \mathbb{E} contrátil e assim o grupo fundamental de \mathbb{X} seria isomorfo ao grupo fundamental de \mathbb{S}^1 , um absurdo já que \mathbb{X} é simplesmente conexo. Portando, $F = \mathbb{R}^1$, digamos \mathbb{E}^1 . Temos como a geometria Nil.

Se $\mathbb{Y} = \mathbb{H}^2$, então a fibra deve ser $F = \mathbb{E}^1$ e temos a geometria $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, usando o mesmo argumento do paragrafo acima. Se $\mathbb{Y} = \mathbb{S}^2$, então a fibra não pode ser \mathbb{R}^1 em vista que obteríamos \mathbb{X} como uma recobrimento do fibrado tangente unitario. E se $F = \mathbb{S}^1$ teríamos $(\text{Isom}(\mathbb{X}))$ como uma subgeometria de $(O(4), \mathbb{S}^3)$. E assim, o caso $\mathbb{Y} = \mathbb{H}^2$ está excluído. \square

Como vimos anteriormente, se (G, \mathbb{X}) tem um quociente compacto então $c = 0$. E por isso, supondo $c = 1$, temos $C_t = e^{ct}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e então (G, \mathbb{X}) não tem um quociente compacto. E claro, (G, \mathbb{X}) não pode ser nenhuma das geometrias já listadas.

Lemma 5.2 Se $c = 1$, então $F = \mathbb{E}^1$ e, $\mathbb{Y} = \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{Y} = \mathbb{H}^2$.

Prova: A folha não pode ser \mathbb{S}^1 , pois isso significa que o fluxo é periódico e assim uma seção transversal ao fluxo teria seu volume multiplicado por $C_\tau > 1$ onde τ é o periodo. Assim fica excluido os caso $F = \mathbb{S}^1$. Logo $F = \mathbb{E}^1$

A base não pode ser \mathbb{S}^2 . De fato, como \mathbb{S}^2 é compacta, tem volume finito igual o volume de \mathbb{M}_0 . Entretanto, $\mathbb{M}_t = \varphi_t(\mathbb{M}_0)$ e

$$\langle d_{x_0}\varphi \cdot, d_{x_0}\varphi \cdot \rangle_{\varphi_t(x_0)} e^{-2ct} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{x_0}$$

para cada $x_0 \in \mathbb{M}_0$ e cada $t \in \mathbb{R}$. Isso implica que o volume de \mathbb{M}_t diminui na direção do fluxo obrigando as \mathbb{M}_t 's a se contraírem sobre um ponto que é algo que não pode acontecer. Logo $\mathbb{Y} = \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{Y} = \mathbb{H}^2$. \square

Supondo $c = 1$ e o campo de planos P integrável, temos uma folheação de \mathbb{X} por variedades \mathbb{M}_t isométricas a \mathbb{Y} , semelhante à primeira parte da demonstração do teorema 5.10 que vimos acima. Assim, a menos de uma multiplicação na métrica, todas as \mathbb{M}_t 's, são isométricas a $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2$ ou \mathbb{H}^2 . O caso $\mathbb{Y} = \mathbb{S}^2$ já está excluído, como observamos acima. Temos que \mathbb{X} é folheada pelas subvariedades \mathbb{M}_t 's. Quando $\mathbb{Y} = \mathbb{E}^2$ temos que \mathbb{X} é o folheado euclidiano, $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}$. Quando $\mathbb{Y} = \mathbb{H}^2$ temos que \mathbb{X} é o folheado hiperbólico, $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}^2$. folheado por planos $\mathbb{M}_t := \{t\} \times \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^1$.

Supondo que $c = 1$ e que o campo de planos P seja não integrável, já sabemos que a fibra não pode ser \mathbb{S}^1 . Assim \mathbb{X} fibra sobre \mathbb{Y} por retas e \mathbb{X} é uma estrutura de contato. Como já vimos, $\mathbb{Y} = \mathbb{E}^2$ ou \mathbb{H}^2 . Considerando $c = 1$ obtemos o fibrado nilpotente quando $\mathbb{Y} = \mathbb{E}^2$ e o fibrado simples quando $\mathbb{Y} = \mathbb{H}^2$. Com isso provamos o teorema abaixo:

Teorema 5.10 *Se $c = 0$, (G, \mathbb{X}) não admite um quociente compacto, e então*

- a) *supondo P integrável, (G, \mathbb{X}) é equivalente a $(\text{Isom}(\mathbb{E}_{\mathcal{F}}), \mathbb{E}_{\mathcal{F}})$ ou $(\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathcal{F}}), \mathbb{H}_{\mathcal{F}})$;*
- b) *supondo P não integrável, temos (G, \mathbb{X}) é equivalente a $\text{Nil}_{\mathcal{F}}$ ou $SL_{\mathcal{F}}$.*

5.3

H_x **isomorfo a $SO(1)$**

Agora vamos finalmente estudar o caso em que H_x é trivial. Iniciamos observando que $\mathbb{X} = H/H_x = H/\{e\} = H$ e assim, \mathbb{X} é um grupo de Lie isomorfo a H , i.e, um grupo de Lie tridimensional simplesmente conexo. Em razão disso, nosso trabalho agora consiste em classificar os grupos tridimensionais que formem uma geometria. Entretanto, sabemos que há uma correspondência entre grupos de Lie simplesmente conexos e álgebras de Lie. Em [Yo] e em [HaLe] é apresentada a classificação completas das álgebras de Lie tridimensionais e dos grupos de Lie simplesmente conexos correspondente. A classificação das álgebras de Lie tridimensionais aparece no artigo de Milnor [Mi3] acompanhado de varios outros resultado. Todavia em [HaLe] temos uma apresentação

mais detalhadas dos grupos de Lie solúveis não unimodulares e a descrição das métricas invariantes a esquerda.

Unimodulares:

- i) Álgebra abeliana; $[X, Y] = 0, [Z, X] = 0, [Z, Y] = 0$. Grupo de Lie correspondente \mathbb{R}^3 .
- ii) Simples; $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$. Grupo de Lie correspondente $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$.
- iii) Simples; \mathfrak{so} , $[X, Y] = 0, [Z, X] = X, [Z, Y] = -Y$. Grupo de Lie correspondente; $SU(2) = \mathbb{S}^3$.
- iv) Nilpotente; \mathfrak{nil} , $[X, Y] = Z, [Z, X] = 0, [Z, Y] = 0$. Grupo de Lie correspondente; Nil.
- v) Solúvel; $\mathfrak{e}(2) = \mathfrak{so}(2) \times \mathbb{R}^2$, $[X, Y] = 0, [Z, X] = -Y, [Z, Y] = X$. Grupo de Lie correspondente é o recobrimento universal da componente conexa do grupo euclidiano, $(\tilde{E}(2))_\bullet$.
- vi) Solúvel; \mathfrak{sol} , $[X, Y] = 0, [Z, X] = X, [Z, Y] = -Y$. Grupo de Lie correspondente Sol.

Não unimodulares:

- vii) Solúvel não unimodular; $\mathfrak{g}_I := \mathbb{R}_{\sigma_I} \times \mathbb{R}^2$ onde $\sigma_I(t) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
Grupo de Lie correspondente; $\text{Sol}_I := \mathbb{R}_{\xi_I} \times \mathbb{R}^2$ onde $\xi_I(t) := \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.
- viii) Solúvel não unimodular; $\mathfrak{g}_c := \mathbb{R}_{\sigma_c} \times \mathbb{R}^2$ onde

$$\sigma_c(t) := \begin{pmatrix} 0 & -ct \\ t & 2t \end{pmatrix}.$$

Grupo de Lie correspondente; $\text{Sol}_c := \mathbb{R}_{\xi_c} \times \mathbb{R}^2$ onde

$$\xi_c(t) := e^t \frac{e^{zt} + e^{-zt}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^t \frac{e^{zt} - e^{-zt}}{2z} \begin{pmatrix} -1 & -c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

caso $z = \sqrt{1-c} \neq 0$ e caso contrário

$$\xi_1(t) := e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.11 *Seja (G, \mathbb{X}) como no item 1 da proposição 5.1. Se (G, \mathbb{X}) tem um quociente compacto, então \mathbb{X} é um grupo de Lie unimodular e (G, \mathbb{X}) é equivalente a $(\text{Isom}(\text{Sol}), \text{Sol})$.*

Prova: Vimos que $\mathbb{X} = H/\{e\} = H$ e assim, \mathbb{X} é um grupo de Lie isomorfo a H . Por hipótese (G, \mathbb{X}) tem um quociente compacto. Isso significa que temos um subgrupo Γ tal que $\mathbb{M} = \mathbb{X}/\Gamma = H/\Gamma$, digamos $\Gamma < H$. Como H/Γ é compacto segue da Proposição 2.4.2 pg 106 [AM] que H é unimodular. Em verdade, a medida de Haar (invariante a esquerda) μ de H induz uma medida $\hat{\mu}$ em $\mathbb{M} = H/\Gamma$ pela aplicação de recobrimento $p : H \rightarrow H/\Gamma$, que em virtude da compacidade de H/Γ é finita. Logo a ação a direita de H sobre H/Γ preserva a medida total, conseqüentemente, a medida μ é invariante a direita. Portanto H é unimodular.

De acordo com o que comentamos acima, as únicas opções para H são: \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 , $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, Nil , $\tilde{E}(2)$ e Sol . Os casos $\mathbb{X}=\mathbb{R}^3$ ou \mathbb{S}^3 ou $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ ou Nil estão descartados pelos teoremas 5.2 e 5.10, pois, em todos esses casos o grupo de isotropia tem dimensão 1 ao passo que aqui o grupo de isotropia tem dimensão zero impossibilitando que o grupo de isometria seja maximal. E o caso $\mathbb{X} = (\tilde{E}(2))_{\bullet} = SO(2) \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ teríamos que $\tilde{E}(2)$ seria um subgrupo próprio de $E(3)$. Identificando $\mathbb{X} = (\tilde{E}(2))_{\bullet}$ e \mathbb{E}^3 , temos que (\mathbb{X}, G) é uma subgeometria de $(\mathbb{E}^3, \tilde{E}(3))$ e não pode ser uma geometria. E por fim, temos (G, \mathbb{X}) equivale a $(\text{Sol}, \text{Isom}(\text{Sol}))$, visto que os seus grupos de isotropia são triviais. \square

Os teoremas 5.2, 5.10 e 5.11 juntos formam a classificação das geometrias tridimensionais com quociente compacto. Esta é a famosa classificação das geometrias de Thurston.

A pergunta seguinte é “o que temos quando (G, \mathbb{X}) não tem um quociente compacto?” Certamente $H = G_{\bullet}$ não é unimodular, pois todos os grupos de Lie unimodulares simplesmente conexos tridimensionais tem quociente compacto. Os únicos grupos de Lie tridimensionais não unimodulares são os grupos solúveis correspondentes as álgebras de Lie **vii)** e a família **viii)**.

No caso **vii)**, identificamos Sol_I com \mathbb{R}^3 e notando que Sol_I é um subgrupo próprio do grupo de isometrias de $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}^2$. Logo $(\text{Sol}_I, \text{Sol}_I)$ forma uma subgeometria de $(\mathbb{E}_{\mathcal{F}}^2, \text{Isom}(\mathbb{E}_{\mathcal{F}}^2))$.

Sabemos que a ação de um grupo de Lie G , sobre ele mesmo é transitiva e livre, assim, a ação tem grupo de isotropia trivial. Para que (G, G_{\bullet}) , G simplesmente conexo, seja uma geometria devemos mostrar que não existe uma métrica invariante à esquerda que não tenha grupo de isotropia trivial. No caso

vii) segue de [HaLe] que nem toda métrica invariante a esquerda tem um grupo de isotropia trivial.

Podemos enfim apresenta o teorema que resume os principais resultado desse trabalho.

Teorema 5.12 *Seja (G, \mathbb{X}) uma geometria tridimensional e H_x a componente conexa da identidade do seu grupo de isotropia.*

- a) *Se $\dim(H_x) = 3$, então \mathbb{X} é \mathbb{E}^3 , \mathbb{H}^3 ou \mathbb{S}^3 .*
- b) *Se $\dim(H_x) = 1$, então \mathbb{X} é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}^2$, $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}^2$, Nil , $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, $\text{Nil}_{\mathcal{F}}$ ou $SL_{\mathcal{F}}$.*
- c) *Se $\dim(H_x) = 1$, então \mathbb{X} é Sol .*