



José Lisboa Gondin Júnior

**Classificação de algumas geometrias sem
quociente compacto**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paul Schweitzer, S.J.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2010



José Lisboa Gondin Júnior

**Classificação de algumas geometrias sem
quociente compacto**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Schweitzer, S.J.

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Leonardo Navarro de Carvalho

UFF

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Puc-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Puc-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de Fevereiro de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Lisboa Gondin Júnior

Mestrado: Matemática Pura — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC–Rio (2008–2010).

Graduação: Licenciatura em Matemática — Universidade Estadual de Montes Claros – Unimontes (2001–2005).

Ficha Catalográfica

Gondin, José L., Júnior

Classificação de algumas geometrias sem quociente compacto / José Lisboa Gondin Júnior; orientador: Paul Schweitzer, S.J.. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2010.

v., 74 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Geometrias Homogêneas. 3. Grupos de Lie. 4. Geometrias de Thurston. 5. Geometrias em dimensão 3. 6. Quocientes Compactos. I. Schweitzer, Paul. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Às minhas queridas; Eulália, Olga, Dazinha e Nalva.

Agradecimentos

Em uma ordem cronológica inversa e me desculpando por esquecer-me de alguns aqui.

Agradeço ao, agora amigo, Paul pela compreensão, paciência e confiança.

Aos professores Rafael e Nicolau que sempre me foram muito solícitos e por aceitarem participar da banca de defesa e do mesmo modo agradeço ao Leo.

Aos nobres e também fiéis companheiros, e próximos, Marcelo, Tatiana. À Tatiana pelos desenhos, o Marcelo pelas correções e ambos pela gelada.

Aos amigos, agora distantes, pelo incentivo e carinho Abigail, Carlos e Sofia.

Ao André pelo vinho ao Marcelão pela família.

Na PUC-Rio muitos foram amigos. Agradeço à todos na pessoa do Rodrigo.

No anonimato, agradeço ao meus amigos em Brasília lembrado dos colegas Serginho e Ricardo- gaúcho.

Ainda anônimos, agradeço a todos do CT (centro de tecnologia da ilha do fundão) que me deram comida e abrigo.

Ainda pela comida e abrigo, agradeço à minhas tias Olga, Dazinha e Nalva.

À minha querida Eulália e à José por me apresentarem esse mundo e por me uma boa educação, que possivelmente esqueci.

Aos irmãos que, todavia, não sei se ainda se lembram de mim: Norma, Jair, Jaime e Jairo.

Aos meus a afilhados e sobrinho por todo carinho e amor.

À fé de todos e de minha *vó Dita*.

Resumo

Gondin, José L., Júnior; Schweitzer, Paul. **Classificação de algumas geometrias sem quociente compacto**. Rio de Janeiro, 2010. 74p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O resultado muito famoso devido a Thurston é a classificação das geometrias modelo tridimensionais com quociente compacto que são conhecidas como geometrias de Thurston e que nos propomos a apresentar nesse nosso trabalho. Fazemos uma apresentação breve das geometrias n-dimensionais isotrópicas e geometrias bidimensionais com suas respectivas classificações. Contudo, nossa contribuição original é apresentação da classificação das geometrias tridimensionais sem quociente compacto.

Palavras-chave

Geometrias Homogêneas. Grupos de Lie. Geometrias de Thurston. Geometrias em dimensão 3. Quocientes Compactos.

Abstract

Gondin, José L., Júnior; Schweitzer, Paul. **Classification of a few geometries without compact quotients**. Rio de Janeiro, 2010. 74p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A famous result due to Thurston is the classification of the 3-dimensional model geometries with compact quotients, known as Thurston geometries, which we present in this thesis. We give a brief presentation of the n -dimensional isotropic geometries and the 2-dimensional geometries with their respective classifications. Nonetheless, our original contribution is the presentation and classification of 3-dimensional geometries without compact quotients.

Keywords

Homogeneous geometries. Lie Groups. Thurston Geometries. Geometries in three dimensions. Compact quotients.

Sumário

1	Preliminares	9
1.1	Variedade Riemanniana	9
1.2	Grupos de Lie	19
1.3	Ações de Grupo	23
1.4	O que é uma Geometria Modelo?	28
2	Geometrias de Curvatura seccional Constante	31
2.1	Introdução	31
2.2	Espaço Euclidiano, \mathbb{E}^n .	31
2.3	Esfera unitária, \mathbb{S}^n	36
2.4	Espaço hiperbólico, \mathbb{H}^n	38
2.5	Classificação das Geometrias Isotrópicas	41
3	Geometrias bidimensionais	43
3.1	\mathbb{E}^2	43
3.2	\mathbb{S}^2	44
3.3	\mathbb{H}^2	45
3.4	Classificação de Geometrias bidimensionais	46
4	Geometrias tridimensionais	48
4.1	\mathbb{E}^3	48
4.2	\mathbb{S}^3	50
4.3	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$	51
4.4	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$	51
4.5	$\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$	52
4.6	Nil	54
4.7	Sol	55
5	Classificação das Geometrias Tridimensionais	56
5.1	H_x isomorfo a $SO(3)$	56
5.2	H_x isomorfo a $SO(2)$	57
5.3	H_x isomorfo a $SO(1)$	69
	Referências Bibliográficas	72