

4 Volatilidade Estocástica com Reversão a Média

4.1 Equação de Ito-Langevin

Neste capítulo, vamos considerar Equações de Langevin simples para caracterizar o processo estocástico da volatilidade, analisando modelos sugeridos na literatura, para buscar aquele que melhor explique o comportamento da série temporal de volatilidade do IBOVESPA.

Uma das principais características observadas na dinâmica de grandezas financeiras tais como a volatilidade, o volume de negociação e a taxa de juros, é a tendência de relaxar para um valor de referência. Esta propriedade pode ser observada no comportamento da série da volatilidade do IBOVESPA, mostrada na Figura 3.4.1, no qual após períodos de “euforia” do mercado, a volatilidade retorna a patamares característicos do regime normal do mercado.

Isto sugere que a atuação coletiva dos agentes do mercado crie um comportamento auto-regulatório de controle das flutuações de preços com características de reversão, que consiste da resposta global e coerente do mercado aos desvios em relação a um nível de consenso ou de equilíbrio. Esta “força do mercado” tem assim a função de restaurar o sistema ao ambiente normal de negociação, no caso de ocorrerem desvios deste regime, sendo representada por um termo determinístico na equação que descreve a evolução temporal da volatilidade. No entanto, esta força não é necessariamente linear, principalmente quando grandes desvios estão presentes.

Outra característica do comportamento cooperativo dos agentes do mercado é o processamento das novas informações (em geral externas), que são

moduladas (amplificadas ou atenuadas), de acordo com o estado atual do mercado. Por sua vez, essas informações, por chegarem ao mercado de forma imprevisível, variando em escala de tempo ultra-curta devido à rapidez da rede informacional, podem ser modeladas por ruídos estocásticos.

Os modelos que apresentam essas características são chamados de *modelos de reversão à média*. Vamos analisar inicialmente uma equação estocástica de Ito-Langevin generalizada, na qual essas duas propriedades estão presentes, sendo modeladas por força de reversão à média não-linear e por ruído multiplicativo não-linear:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{r-1}dt + \xi x^s dW \quad \text{eq.(4.1.1)}$$

onde:

x – variável estocástica

$dW \approx N(0,2dt)$ - processo de Wiener não-padronizado

θ - valor de referência ou de equilíbrio

γ - taxa de relaxação ao valor θ

ξ - escala da amplitude do ruído

r – parâmetro de não-harmonicidade da força de reversão.

s - parâmetro de amplificação/atenuação de ruído multiplicativo

O primeiro termo do lado direito da eq.(4.1.1) modela o processo de reversão à média: se a volatilidade está alta demais, ou seja, muito acima do parâmetro θ , esse termo mostra que a tendência da dinâmica do mercado é gerar variações negativas, trazendo a volatilidade para valores menores. O equivalente acontece para valores de volatilidade menores que θ , onde esse termo gera aumento de volatilidade.

Diferentes valores de r representam diferentes possíveis mecanismos de relaxação, determinados por vários fatores, como por exemplo, aversão ao risco, que é particular de cada mercado. A força restauradora corresponde a um potencial confinante, com mínimo em θ para qualquer r .

O segundo termo do lado direito da eq.(4.1.1) modela as fontes incoerentes do mercado, representadas por um ruído multiplicativo. Diferentes valores de s representam diferentes graus de comportamento cooperativo multiplicativo, gerados pelas diversas conectividades informacionais dos agentes.

Esta classe de modelos provê um espectro rico de distribuições de probabilidade assintóticas, dependendo dos parâmetros r e s [18] e inclui vários modelos conhecidos da literatura econômica [19] para descrever as variáveis financeiras que apresentam o comportamento de reversão à média, tais como volatilidade, volume e taxa de juros.

Vamos considerar valores particulares de (r,s) associados a vários modelos da literatura para a volatilidade estocástica ν . Como veremos a seguir, todos admitem uma função densidade de probabilidade estacionária $P^*(\nu)$. Nosso critério foi o de buscar aqueles que melhor descrevessem os valores extremos da distribuição empírica, ou seja, a cauda da distribuição, uma vez que esta região está associada aos maiores riscos do mercado. Para cumprir esse objetivo, fizemos também ajustes da distribuição empírica em escala logarítmica, pois nesse caso, o peso estatístico dos eventos raros torna-se mais relevante. A Figura 4.1.1 ilustra este fato para a distribuição de valores empíricos da volatilidade diária normalizada do IBOVESPA ($x = \nu / \langle \nu \rangle$).

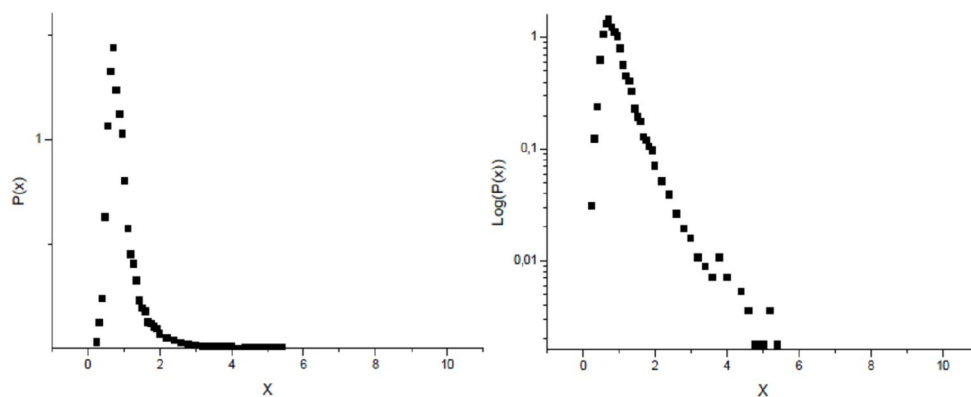


Figura 4.1.1 Gráfico da distribuição de valores empíricos da volatilidade diária normalizada ($x = v / \langle v \rangle$) do IBOVESPA, em escala linear e logarítmica respectivamente

Assim, minimizando-se os desvios entre a distribuição-modelo e a distribuição empírica, ambas em escala logarítmica, estamos forçando a que os parâmetros de ajuste privilegiem as caudas longas em relação ao centro da distribuição.

Como veremos, em todos os modelos analisados, um parâmetro relevante da distribuição $P^*(x)$ é dado por:

$$\alpha = \gamma / \xi^2, \quad \text{eq.(4.1.2)}$$

envolvendo a razão entre as constantes de força estocástica e de reversão.

Portanto, nos ajustes da distribuição empírica, teremos a princípio, apenas dois parâmetros independentes: α e θ .

4.2

Modelo de Ornstein-Uhlenbeck (O-U aritmético)

(ou Modelo de Vasicek quando a variável estocástica é a taxa de juros)

Este é o modelo mais simples de reversão à média. Para este caso, identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv v; \quad r = I; \quad s = 0; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi dW$$

A distribuição estacionária deste modelo é $P^*(x)$, onde $P^*(x)$ é uma distribuição Gaussiana:

$$G(x) = A \exp[-\gamma / 2\xi^2 (x - \theta)^2] \quad \text{eq.(4.2.1)}$$

com:

θ – valor médio de longo prazo da distribuição

$\alpha^{-1} \equiv \xi^2 / \gamma$ – variância de longo prazo da distribuição

$$A \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \text{ - constante de normalização} \quad \text{eq.(4.2.2)}$$

Pela análise descritiva da distribuição de volatilidade feita no capítulo anterior, observa-se que a distribuição empírica não obedece a um comportamento Gaussiano como sugere esse modelo. Buscaremos a seguir melhores formulações

4.3

Modelo O-U exponencial (expOU)

(ou Modelo de Vasicek quando a variável estocástica é a taxa de juros)

Identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv \ln v; \quad r = 1; \quad s = 0; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi dW$$

e, por transformação de variáveis da solução anterior eq.(4.2.1):

$$P^*(x)dx = P^*(v)dv \quad \Rightarrow \quad P^*(v) = P^*(x)dx/dv = P^*(\ln(v))1/v$$

$P^*(v)$ é uma distribuição Lognormal:

$$P^*(v) = (A/v) \exp[-\gamma/2\xi^2(\ln v - \theta)^2] \quad \text{eq.(4.3.1)}$$

onde a constante de normalização A é dada pela eq.(4.2.2).

Na Tabela 4.3.1 apresentamos os parâmetros ótimos do modelo O-U exponencial aplicado à volatilidade diária do IBOVESPA e mostramos na Figura 4.3.1 o gráfico do ajuste da distribuição Lognormal. Este primeiro ajuste foi feito na escala linear, como tem sido feito usualmente na literatura, com o objetivo de ilustrarmos as falhas geradas nos respectivos ajustes nas caudas das distribuições.

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
θ	-0,189	. +/- 0,007
α	7,383	. +/- 0,021

Tabela 4.3.1 Parâmetros de ajuste em escala linear da distribuição Lognormal à distribuição empírica

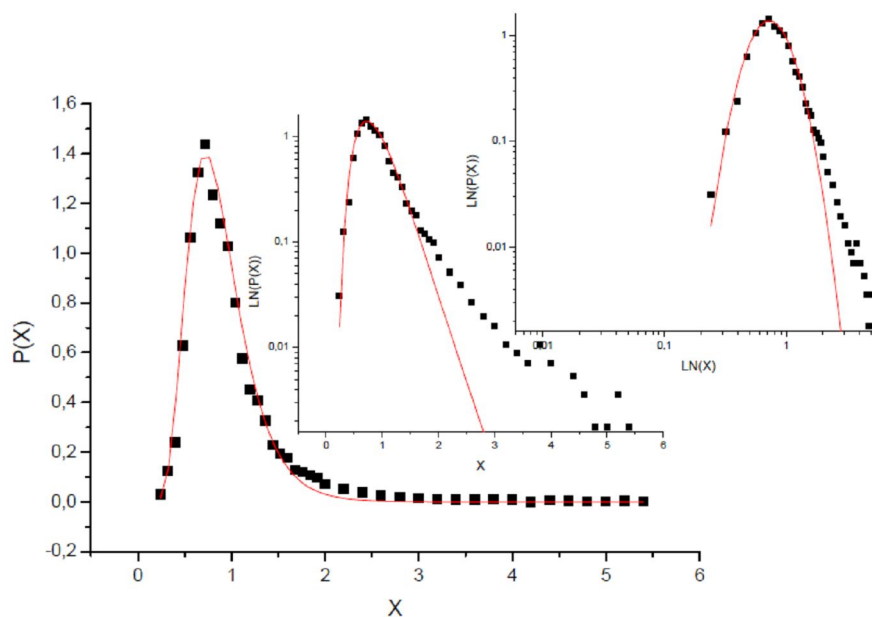


Figura 4.3.1 Gráfico do ajuste, em escala linear, da distribuição Lognormal dada pela eq.(4.3.1) à distribuição empírica da volatilidade ($x \equiv v$)

Ao se analisar o gráfico linear do ajuste, este parece estar excelente, porém, com o objetivo de verificar com maior clareza a qualidade dos ajustes do modelo nas caudas, também apresentamos na Figura 4.3.1 os gráficos do ajuste em escala semi-log e log-log (mostrados no canto direito superior do gráfico). Observa-se que os valores empíricos intermediários e extremos não são descritos de forma adequada pela distribuição Lognormal, apesar dela ser muito utilizada no mercado.

Na tentativa de um melhor resultado, procedemos ao ajuste da distribuição empírica em escala logarítmica. A seguir, apresentamos os parâmetros ótimos obtidos na Tabela 4.3.2.

Modelo	Lognormal	Intervalo de confiança
θ	-0,031	. +/- 0,041
α	3,443	. +/- 0,241

Tabela 4.3.2 Parâmetros de ajuste em escala logarítmica da distribuição Lognormal à distribuição empírica.

Apesar de encontrarmos novos parâmetros ótimos, o parâmetro θ é estatisticamente insignificante, pois possui grande incerteza relativa.

4.4 Modelos com distribuição estacionária com decaimento exponencial

4.4.1 Modelo O-U geométrico

Identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv v; \quad r=2; \quad s=1; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x-\theta)xdt + \xi xdW$$

A solução estacionária $P^*(x)$ é uma distribuição Gama:

$$P^*(x) = A \exp[-\alpha x] x^\beta \quad \text{eq.(4.4.1)}$$

$$\text{onde } A = \frac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}, \quad \alpha \equiv \frac{\gamma}{\xi^2}, \quad \beta = \beta_{OU} = \alpha\theta - 2 \quad \text{eq.(4.4.2)}$$

e onde $\Gamma(x)$ é a Função Gama definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{eq.(4.4.3)}$$

4.4.2

Processo de Feller

(Processo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) quando a variável estocástica é a taxa de juros)

Identificando na eq.(4.11):

$$x \equiv v; \quad r = 1; \quad s = 1/2; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi\sqrt{x}dW$$

A solução estacionária $P^*(x)$ é também uma distribuição Gama dada em eq.(4.4.1):

$$\text{onde } A = \frac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}, \quad \alpha \equiv \frac{\gamma}{\xi^2} \quad \text{e} \quad \beta = \beta_F \equiv \alpha\theta - 1 \quad \text{eq.(4.4.4)}$$

Nota-se que tanto o modelo OU-geométrico quanto o processo de Feller tem o mesmo tipo de distribuição estacionária quando escritas com o parâmetro β . Para descobrir o valor do parâmetro θ respectivo de cada modelo é necessário apenas fazer a mudança de parâmetros de acordo com a definição de β_{OU} e β_F .

A seguir apresentamos na Tabela 4.4.1 os parâmetros ótimos α e β de ambos os modelos.

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
α	8,965	. +/- 0,371
β	6,733	. +/- 0,030

Tabela.4.4.1 Parâmetros do ajuste da distribuição Gama dos modelos OU-geométrico e Feller

A Figura 4.4.1 apresenta o gráfico de ajuste do modelo OU geométrico ou Feller aplicado à volatilidade diária do IBOVESPA.

É importante salientar que nestes modelos, o ajuste da distribuição empírica foi realizado na escala linear, porque o ajuste em escala logarítmica mostrou-se totalmente ineficaz. Portanto, ambos os modelos mostraram-se inadequados para representar o processo estocástico da volatilidade do IBOVESPA.

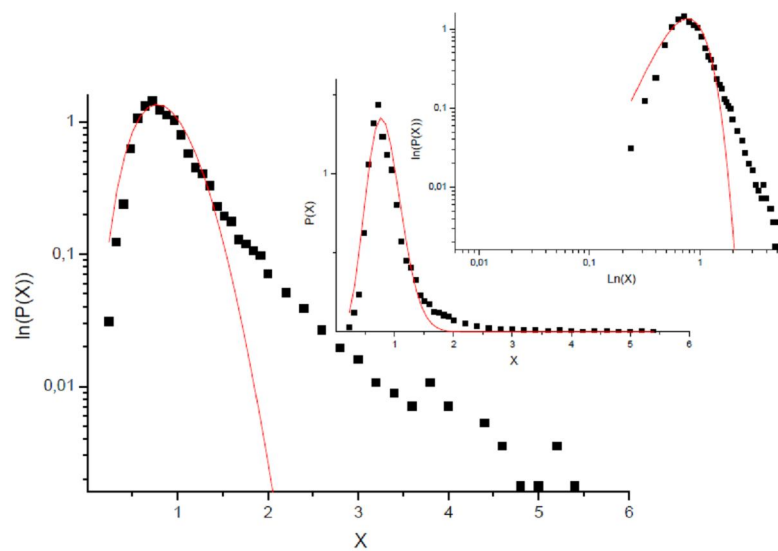


Figura.4.4.1 Gráfico do ajuste da distribuição Gama dada pela eq.(4.4.1) à distribuição empírica da volatilidade ($x \equiv v$)

4.4.3 Modelo de Heston [20]

Identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv v^2; \quad r = 1; \quad s = 1/2; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi\sqrt{x}dW$$

Por transformação de variáveis $P^*(v) = P^*(x)dx/dv = P^*(v^2)2v$ da solução anterior (modelo de Feller) dada pela eq.(4.4.1) com $\beta = \beta_F$ dada pela eq.(4.4.4):

$$P^*(v) = 2A \exp[-\alpha v^2] v^{2\alpha\theta-1}, \quad \text{eq.(4.4.5)}$$

que é uma distribuição Gama Generalizada com :

$$A = \frac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}. \quad \text{eq.(4.4.6)}$$

Comparando-se com a expressão geral da distribuição Gama Generalizada: $f(x) = \frac{\rho}{\Gamma(k)\omega} \left(\frac{x}{\omega}\right)^{k\rho-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\omega}\right)^\rho\right]$, esta solução corresponde a $\rho = 2$, $k = \alpha\theta$, $w^2 = 1/\alpha$.

Apresentamos na Tabela 4.4.2 os parâmetros ótimos encontrados para o modelo de Heston:

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
α	2,760	. +/- 0,186
β	2,161	. +/- 0,124

Tabela.4.4.2 Parâmetros de ajuste da distribuição Gama Generalizada do modelo de Heston

A Figura 4.4.2 apresenta o gráfico do ajuste do modelo de Heston aplicado à volatilidade diária do IBOVESPA.

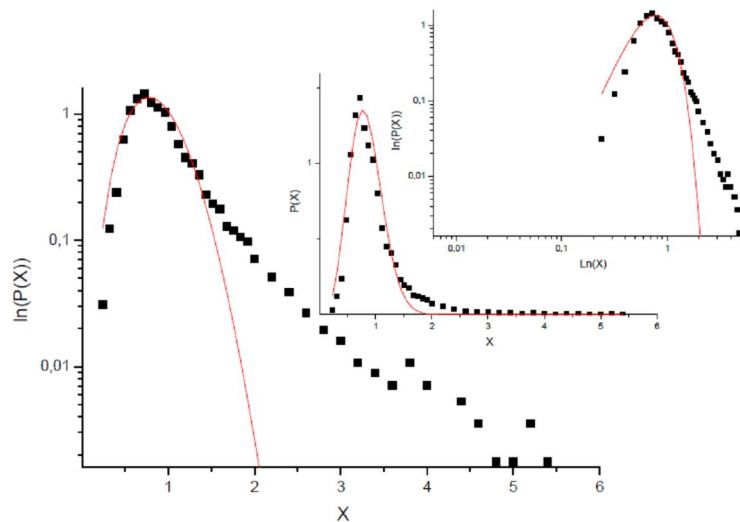


Figura 4.4.2 Gráfico do ajuste da distribuição Gama Generalizada dada pela eq.(4.4.5) aos dados empíricos de volatilidade diária ($x \equiv v$)

Nesse caso, o ajuste também foi realizado sobre a distribuição empírica, escala linear porque o ajuste em escala logarítmica também mostrou-se totalmente ineficaz. Esta característica ocorreu com todos os modelos que apresentavam distribuição estacionária com decaimento exponencial. Como se pode notar nos gráficos apresentados até aqui em escala log-log, a cauda da distribuição empírica apresenta comportamento linear, indicativo de uma lei de potência.

4.5 Modelos com distribuição estacionária com decaimento em lei de potência

No caso desses modelos, o ajuste da distribuição estacionária em escala logarítmica foi eficaz, reproduzindo melhor a estatística dos valores extremos da distribuição empírica em relação ao ajuste em escala linear.

4.5.1 Modelo Harmônico com ruído multiplicativo Linear

Identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv v; \quad r = I; \quad s = I; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi x dW$$

$P^*(x)$ é uma distribuição Gama Inversa:

$$P^*(x) = A \exp[-\beta/x] x^{-(\alpha+2)} \quad \text{eq.(4.5.1)}$$

$$\text{onde } A = \frac{(\beta)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \text{com } \beta = \beta_{HL} = \alpha\theta \quad \text{eq.(4.5.2)}$$

A seguir, apresentamos na Tabela 4.5.1 os parâmetros ótimos do modelo Harmônico-Linear aplicado à volatilidade diária do IBOVESPA.

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
α	3,434	. +/- 0,118
β	1,027	. +/- 0,016

Tabela. 4.5.1 Parâmetros de ajuste da distribuição Gama Inversa do modelo Harmônico-Linear

Apresentamos na Figura 4.5.1 o gráfico do ajuste ótimo da distribuição empírica com a distribuição Gama Inversa dada pela eq.(4.5.1).

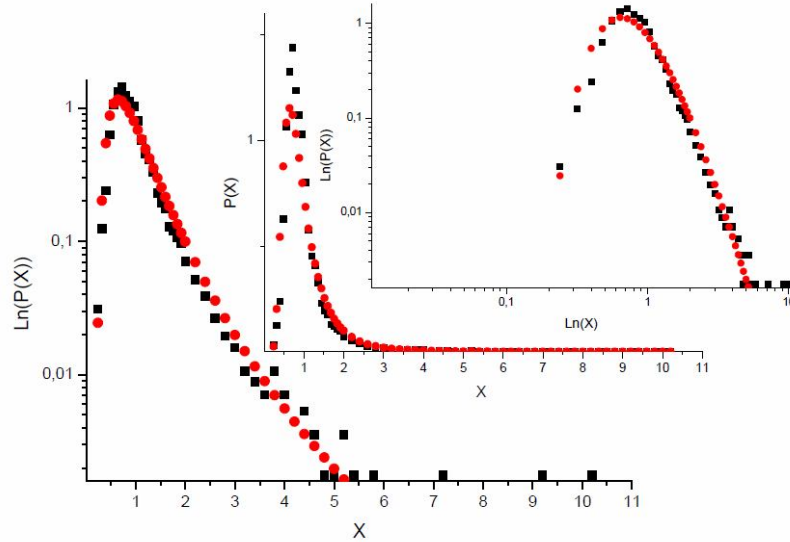


Figura.4.5.1 Gráfico do ajuste da distribuição Gama Inversa dada pela eq.(4.5.1) à distribuição empírica da volatilidade ($x \equiv v$)

4.5.2 Modelo de Hull and White [21]

Identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv v^2; \quad r = 1; \quad s = 1; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi x dW$$

Por transformação de variáveis $P^*(v) = P^*(x)dx/dv = P^*(v^2)2v$, usando solução anterior (modelo Harmônico-Linear) dada pela eq.(4.5.1) com $\beta = \beta_{HL}$ dada pela eq.(4.5.2):

$$P^*(v) = 2A \exp[-\beta/v^2] v^{-(2\alpha+3)} \quad \text{eq.(4.5.3)}$$

$$\text{com } A = \frac{(\beta)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad \text{eq.(4.5.4)}$$

A solução estacionária $P^*(v)$ é uma distribuição Gama Inversa Generalizada.

A seguir apresentamos na Tabela 4.5.2 os parâmetros ótimos obtidos para o modelo de Hull and White aplicado à volatilidade diária do IBOVESPA e na Figura 4.5.2 , o gráfico do ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada.

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
α	0,942	. +/- 0,013
β	1,242	. +/- 0,010

Tabela.4.5.2 Parâmetros obtidos com o ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada do modelo de Hull and White

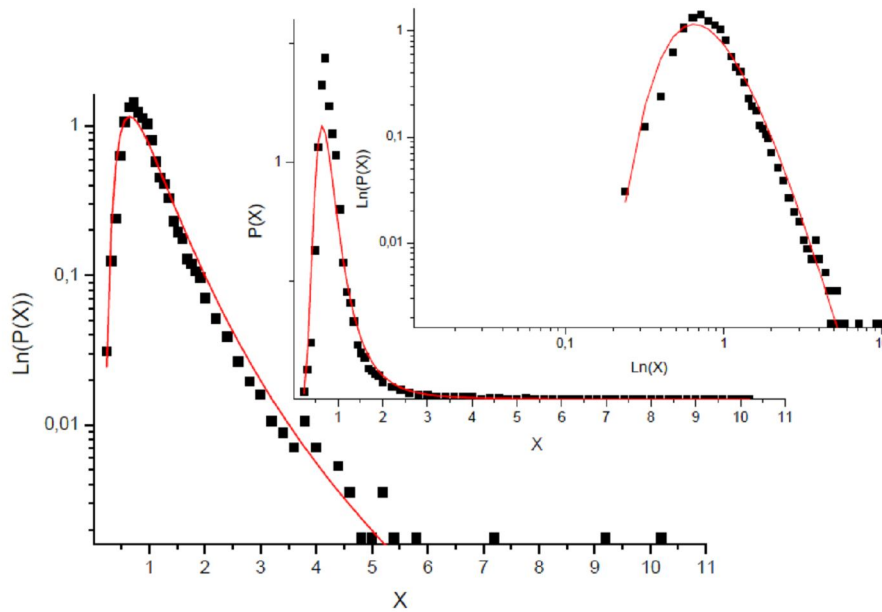


Figura 4.5.2 Gráfico do ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada dada pela eq.(4.5.3) à distribuição empírica da volatilidade ($x \equiv v$)

4.5.3 Modelo Econométrico

Identificando na eq.(4.1.1):

$$x \equiv v^2; \quad r = 2; \quad s = 3/2 \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)xdt + \xi x^{3/2}dW$$

$P^*(x)$ é também uma distribuição Gama Inversa:

$$P^*(x) = A \exp[-\beta/x] x^{-(\alpha+3)} \quad \text{eq.(4.5.5),}$$

com $A = \frac{(\beta)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}$ e $\beta = \beta_{HL}$ dada pela eq.(4.5.7).

Por transformação de variáveis, usando solução anterior eq.(4.5.5):

$$P^*(v) = 2A \exp[-\beta/v^2] v^{-(2\alpha+5)} \quad \text{eq.(4.5.7)}$$

$P^*(v)$ é também uma distribuição Gama Inversa Generalizada

A seguir, apresentamos na Tabela 4.5.3 os parâmetros ótimos do modelo Econométrico aplicado a volatilidade diária do IBOVESPA e na Figura 4.5.3, o gráfico do ajuste da distribuição empírica com a distribuição Gama Inversa Generalizada dada pela eq.(4.5.7).

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
α	-0,67	. +/- 0,04
β	0,56	. +/- 0,02

Tabela.4.5.3 Parâmetros do ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada do modelo Econométrico.

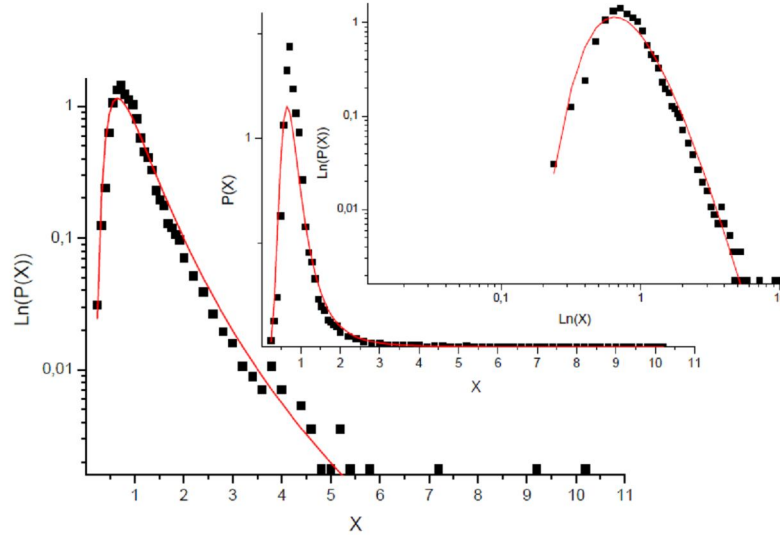


Figura.4.5.3 Gráfico do ajuste da distribuição Gama Inversa Generalizada dada pela eq.(4.5.7) à distribuição de volatilidade ($x \equiv v$)

O valor negativo do parâmetro α (com β positivo) implica em valor negativo do parâmetro θ , o que não faz sentido, uma vez que a variável estocástica é positiva. A restrição do ajuste para valores α , β e θ positivos, produziu grandes incertezas relativas. Concluimos então que o modelo Econométrico não produz resultados estatisticamente significantes.

4.6 Modelos com ruído Aditivo e Multiplicativo (A-M)

Vimos nos últimos modelos analisados que, embora a distribuição empírica tenha sido bem ajustada na cauda, a estatística dos valores baixos de volatilidade é superavaliada. Passamos então a considerar uma classe mais geral de modelos, recentemente proposto [18] para descrever o processo estocástico da volatilidade com reversão à média. Esta classe de modelos possui um termo de

ruído aditivo, além do termo de ruído multiplicativo representando o processamento endógeno das informações pelo mercado, presente nos modelos anteriores. A presença desse ruído extra representa a incorporação livre da informação sem qualquer filtro de modulação pelo mercado, atuando diretamente e aditivamente nas flutuações de preços. Incluindo-se as flutuações de origem puramente exógenas na eq.(4.1.1), obtém-se a seguinte equação de Itô-Langevin:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{r-1}dt + \xi x^s dW + \zeta dZ \quad \text{eq.(4.6.1)}$$

com W e Z sendo dois processos de Wiener independentes: $dW, dZ \approx N(0, 2dt)$

Modelos estocásticos com ruído aditivo-multiplicativo provêm um espectro mais rico de distribuições de probabilidade assintóticas, dependendo dos parâmetros r e s . Vamos considerar aqui um caso particular ($r = 0; s = 1/2$) no qual a distribuição estacionária tem cauda em lei de potência, de acordo com os melhores ajustes feitos anteriormente, mas que, por outro lado, para valores baixos de volatilidade, tenha um comportamento diferente do produzido pelos modelos anteriores.

4.6.1

Modelo A-M ($x \equiv v$)

Identificando na eq.(4.6.1)

$$x \equiv v; \quad r = 0; \quad s = 1/2; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x - \theta)x^{-1}dt + \xi \sqrt{x}dW + \zeta dZ$$

$$P^*(x) = A \frac{x^{\eta\theta}}{[1 + \lambda^2 x]^{\eta\theta + \alpha + 1}} \quad \text{eq.(4.6.2)}$$

$$\text{com: } \gamma / \xi^2 \equiv \alpha, \quad \gamma / \zeta^2 \equiv \eta \quad \text{e} \quad \lambda^2 \equiv \eta / \alpha \equiv (\xi / \zeta)^2 \quad \text{eq.(4.6.3)}$$

A distribuição $P^*(x)$ tem decaimento em lei de potência dupla, tanto para $x \rightarrow 0$ quanto para $x \rightarrow \infty$. Esta distribuição também é conhecida como distribuição q-Gama, pois generaliza a expressão da distribuição Gama para $q \neq 1$:

$$\Gamma_q(x) = A^* \frac{(x/x_0)^\nu}{[1 + (q-1)(x/x_0)]^{1/(q-1)}} \quad \text{eq.(4.6.4)}$$

Correspondência entre os parâmetros:

$$\begin{aligned} \nu &= \eta\theta & 1/(q-1) &\equiv 1 + \eta\theta + \alpha \\ (q-1)/x_0 &\equiv \lambda^2 & \rightarrow x_0 &\equiv (q-1)\alpha/\eta \end{aligned} \quad \text{eq.(4.6.5)}$$

Logo, nos parâmetros correspondentes, tem-se que:

$$A^* = \frac{1}{x_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \nu - 1\right)\Gamma(\nu + 1)} (q-1)^{\nu+1} \quad \text{eq.(4.6.6)}$$

O ajuste da distribuição empírica da volatilidade diária do IBOVESPA com esse modelo não se apresentou eficaz nem na escala linear nem na logarítmica.

4.6.2

Modelo A-M ($x \equiv v^2$):

Identificando na eq.(4.6.1):

$$x \equiv v^2; \quad r = 0; \quad s = 1/2; \quad \Rightarrow \quad dx = -\gamma(x-\theta)x^{-1}dt + \xi\sqrt{x}dW + \zeta dZ$$

Por transformação de variáveis $P^*(v) = P^*(x)dx/dv = P^*(v^2)2v$, usando solução anterior eq.(4.6.4) e identificando $v_0^2 \equiv x_0$:

$$P^*(v) = A^{**} \frac{\left(\frac{v}{v_0}\right)^{2v+1}}{[1+(q-1)(v/v_0)^2]^{\frac{1}{q-1}}} \quad \text{eq.(4.6.7)}$$

com :

$$A^{**} = \frac{2}{v_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - v - 1\right)\Gamma(v+1)} (q-1)^{v+1} \quad \text{eq.(4.6.8)}$$

Apresentamos na Tabela 4.6.1 os parâmetros ótimos do modelo A-M (com $r = 0$; $s = 1/2$), obtidos do ajuste da distribuição q-Gama transformada, dada pela eq.(4.6.5), aplicada à volatilidade diária do IBOVESPA.

Parâmetro	Valor	Intervalo de confiança
q	1.122	. +/- 0,010
v	5,484	. +/- 0,660
v ₀	0,141	. +/- 0,016

Tabela.4.6.1 Parâmetros de ajuste da distribuição q-Gama transformada do modelo com ruído aditivo-multiplicativo

Na Figura 4.6.1 apresentamos o ajuste da distribuição empírica com a distribuição q-Gama transformada:

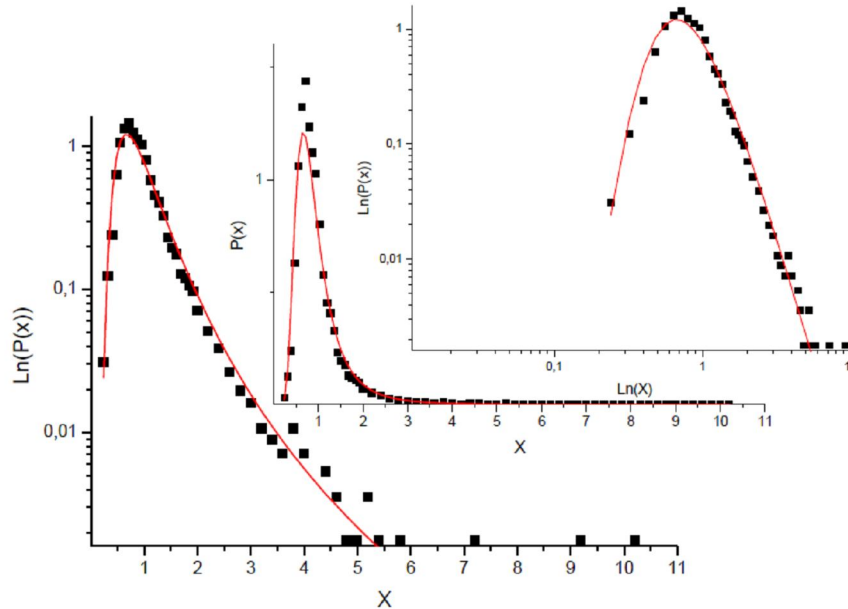


Figura.4.6.1 Gráfico do ajuste da distribuição q-Gama transformada, dada pela eq.(4.6.7) à distribuição empírica da volatilidade ($x \equiv v$)

Como uma verificação extra da acuracidade desta modelagem, procedemos a comparação direta da distribuição empírica da volatilidade quadrática ($x \equiv v^2$) com a distribuição q-Gama dada pela eq.(4.6.4). Os resultados estão mostrados na Figura 4.6.2. Os parâmetros utilizados, por consistência com os parâmetros ótimos da Tabela 4.6.1, estão mostrados na Tabela 4.6.2:

Parâmetro	Valor
q	1.122
ν	5,484
x_0	0.019

Tabela.4.6.2 Parâmetros da distribuição q-Gama utilizados na comparação com a distribuição empírica da volatilidade quadrática

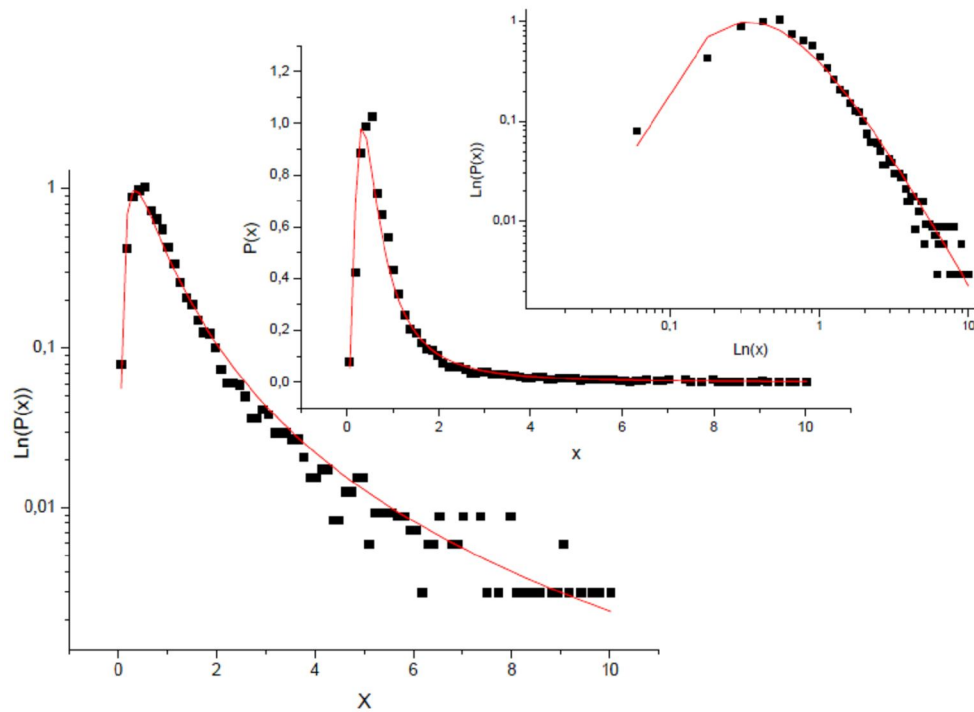


Figura.4.6.2 Gráfico da distribuição q-Gama dada pela eq.(4.6.4) superposto à distribuição empírica da volatilidade quadrática diária do IBOVESPA ($x \equiv v^2$)

Verifica-se uma boa concordância da previsão do modelo com ruído aditivo e multiplicativo, dado pela equação diferencial estocástica eq.(4.6.1) (com $x \equiv v^2$; $r = 0$; $s = 1/2$), especialmente se considerarmos valores intermediários e altos de volatilidade empírica. Consideramos que este modelo foi a melhor representação encontrada entre os modelos analisados.