3
Técnicas de Otimização de Carteiras

Nesse capítulo apresentamos o modelo de Markowitz para seleção de carteiras e algumas outras alternativas propostas na literatura.

3.1
Modelo de Média-Variância

Em seu trabalho pioneiro (Markowitz, 1959), Markowitz desenvolveu um modelo que permite fazer a seleção de carteiras considerando o conflito entre retorno e risco. Este modelo é denominado de Média-Variância porque ele utiliza o retorno esperado (médio) como medida de desempenho da carteira e a variância como medida de risco.

Em uma carteira, o retorno esperado e a variância não precisam necessariamente ser calculados através da série de retornos da carteira. Estes podem ser calculados através dos ativos que compõem a carteira. Para o cálculo do retorno esperado ($\overline{R}_c$) de uma carteira (c), composta dos ativos $1, \ldots, N$, é possível utilizar a média ponderada dos retornos esperados ($\overline{R}_i$) dos ativos multiplicado pela porcentagem em carteira X_i.

$$\overline{R}_c = E(R_c) = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i$$

Para calcular a variância da carteira (σ_c^2) utilizamos a covariância das séries de retornos (σ_{jk}) entre todos os pares de ativos de compõe a carteira.

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} (X_j X_k \sigma_{jk})$$

A covariância entre dois ativos pode ser estimada utilizando o histórico de retornos dos ativos durante T períodos, sendo $\overline{R}_j$ e $\overline{R}_k$, respectivamente, a média de retorno para os ativos j e k.

$$\sigma_{jk} = \sum_{i=1}^{T} \frac{(R_{ji} - \overline{R}_j)(R_{ki} - \overline{R}_k)}{T}$$

3.1.1
Fronteira Eficiente

A fronteira eficiente é o conjunto de carteiras nas quais para um determinado risco tem-se o maior retorno possível ou para um determinado nível de retorno tem-se o menor risco possível. A preferência de maior retorno para o mesmo nível de risco é uma propriedade das funções utilidade e a escolha de menos risco para o mesmo retorno é uma característica de um investidor avesso ao risco. No exemplo de fronteira eficiente da Figura 3.1 fica evidente o conflito entre risco e retorno esperado. Uma carteira que faça parte da fronteira eficiente é denominada carteira eficiente.

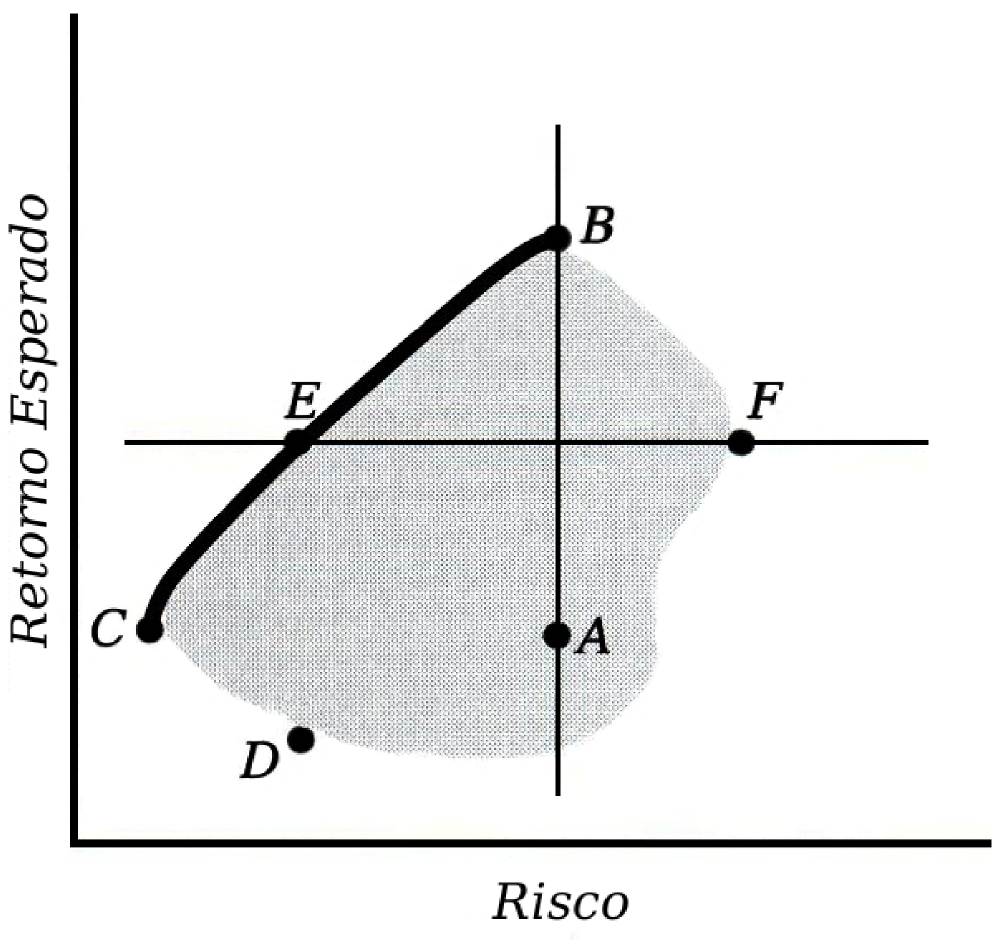

Figura 3.1: Fronteira eficiente

Na Figura 3.1 a fronteira eficiente é representada pela linha preta de C a B e a nuvem cinza da figura representa as possíveis carteiras. Os pontos B, C e E são carteiras eficientes, já os pontos A, D e F não são. O ponto A, por exemplo, poderia ser substituído por C, se fosse desejado menos risco, ou pelo ponto B, caso deseja-se mais retorno.

3.1.2
Correlação entre Ativos

A correlação entre dois ativos captura a relação entre o comportamento dos ativos. A medida amplamente utilizada para se calcular a correlação entre dois ativos é a covariância. A covariância é uma medida que determina como os retornos de dois ativos variam em conjunto. Entretanto para um melhor entendimento do comportamento da correlação entre dois ativos, vamos utilizar também, o coeficiente de correlação p_{ik} entre o ativo i e o ativo k. O coeficiente de correlação, cujo valor varia entre -1 e $+1$, é uma normalização da covariância, sendo que p_{ik} é igual a $\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k}$.

Quando dois ativos têm coeficiente de correlação positivo, a tendência é que quando um ativo subir o outro ativo deve subir e a variação entre eles deve ser proporcional ao valor do coeficiente. Assim como, quando dois ativos têm coeficiente de correlação negativo entre eles e um deles sofre uma queda, o outro tende a subir. Se fosse possível obter um coeficiente de correlação 100% negativo entre dois ativos, seria possível utilizá-los para criar uma carteira livre de risco, simplesmente colocando 50% em cada ativo. Entretanto esse cenário não ocorre na prática.

O risco da carteira pode ser estimado utilizando a matriz de covariância. A matriz de covariância contém a covariância entre todos os ativos de uma carteira. Essa matriz tem dimensão NxN, sendo N o número de ativos da carteira. Um exemplo de uma matriz de covariância entre os ativos BBAS3, VALE5, PETR3, USIM5 e PETR4 no período entre 02/01/2002 e 01/03/2002 é exibido na Tabela 3.1.

	BBAS3	VALE5	PETR3	USIM5	PETR4
BBAS3	0.0004557	0.0001603	-0.0000185	0.0000600	-0.0000382
VALE5	0.0001603	0.0004835	0.0001870	-0.0000549	0.0001765
PETR3	-0.0000185	0.0001870	0.0002654	0.0000168	0.0002346
USIM5	0.0000600	-0.0000549	0.0000168	0.0004898	0.0000099
PETR4	-0.0000382	0.0001765	0.0002346	0.0000099	0.0002323

Tabela 3.1: Correlação entre ativos.

3.1.3
Formulação do Modelo

Baseado na idéia de fronteira eficiente pode-se propor um modelo para seleção de carteiras eficientes. Uma fronteira eficiente abrange diversas carteiras, entretanto deseja-se determinar somente uma carteira. Então é necessário um parâmetro que sirva para mapear o desejo do investidor quanto ao risco ou retorno.

A implementação pode ser feita de diversas formas, as mais comuns são: maximizar o retorno esperado sujeito ao limite máximo de risco, minimizar o risco sujeito a um limite mínimo de retorno e maximizar o retorno menos o risco multiplicado por uma variável que determine a aversão ao risco do investidor. Nesse trabalho utilizaremos apenas as duas primeiras formulações. Não será considerada a venda a descoberto e nem o aluguel ou empréstimo de ativos sem risco. Em ambos modelos a matriz de covariância é a medida utilizada para calcular o risco da carteira. Formalmente, as duas formulações são descritas a seguir:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } & \sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \\
\text{Sujeito a } & \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i \geq r_c \\
& \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0 \forall i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } & \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i \\
\text{Sujeito a } & \sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \leq v_c \\
& \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0 \forall i
\end{aligned}
$$

N é o número de ativos que poderão fazer parte da carteira, x_i é a porcentagem da carteira que será concedida ao ativo i, σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j, σ_i^2 é a variância do ativo i, μ_i é o retorno esperado do ativo i, r_c e v_c são respectivamente o retorno mínimo e o risco máximo desejados para a carteira.

Para ter um maior controle de exposição, ou seja, para evitar que um ativo componha grande parte da carteira, pode-se determinar um limite de exposição para os ativos. Por exemplo, limitar um ativo a constituir menos de 10% da carteira.

É interessante notar que a carteira com a maior utilidade esperada para um investidor com função utilidade quadrática pode ser alcançada através dos modelos descritos. Em outras palavras, o modelo de Markowitz permite encontrar a melhor carteira possível para um investidor com uma função utilidade quadrática.

3.1.4 Discussão sobre o Modelo

O tamanho da matriz de covariância faz com que o modelo tenha entrada da ordem de $\theta(N^2)$. Mas essa complexidade pode ser diminuída utilizando técnicas como *Single-Index*, *Multiple Index* e *Capital Asset Price Model*(*CAPM*) (Elton *et al.*, 2006).

Outra desvantagem mencionada na literatura é que o modelo de Markowitz contempla somente um período. Poderia ser melhor considerar múltiplos períodos, tendo em vista que o retorno obtido no período n depende das escolhas nos $n-1$ períodos anteriores.

No modelo de média-variância é necessário estimar os retornos esperados de cada ativo. A correlação entre os retornos dos ativos e a variância dos ativos são usualmente estimados de acordo com suas séries históricas. Tem-se verificado que pequenas variações nas séries históricas podem gerar carteiras completamente diferentes. Essas características mostram que o modelo de média-variância é instável (Tutuncu & Koenig, 2002) (Black & Litterman, 1991) (Erdogan *et al.*, 2004).

É mencionado também na literatura que a variância pode não ser a medida mais adequada para medir o risco, porque ela penaliza igualmente variações positivas e negativas. Markowitz em sua tese (Markowitz, 1959) reconheceu que o uso da semi-variância poderia ser uma medida mais adequada do que a variância.

3.2 Outros Métodos para Estimar Risco

Calcular a matriz de covariância é custoso e existem outras alternativas para estimar o risco da carteira e que inclusive obtiveram melhores resultados em pesquisas empíricas (Elton *et al.*, 1978). Nas próximas seções serão apresentadas alternativas ao modelo explicitado anteriormente.

3.2.1 *Single-Index*

Observou-se que quando o mercado sofre uma oscilação positiva, espera-se que a grande maioria dos ativos tenha um acréscimo no seu valor e o mesmo ocorre para o caso de uma oscilação negativa. Essa característica sugere que os retornos dos ativos estão correlacionados, princípio que originou a idéia de correlacionar os ativos com um determinado índice de mercado da seguinte forma:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m$$

Sendo R_i o retorno do ativo i, R_m o retorno do índice de mercado, β_i o acréscimo esperado no R_i dada à mudança ocorrida no R_m. O a_i é uma parte do valor do ativo que é independente das oscilações do mercado. A variável a_i pode ser dividida em duas variáveis: α_i e e_i. O valor esperado para a_i é representado por α_i e e_i é um elemento aleatório de a_i.

No modelo *Single-Index*, ou Índice Único, cada ativo é relacionado com o índice de mercado e esse relacionamento é definido através das variáveis beta e alfa. Através dessas variáveis também é possível estimar a covariância entre ativos. Nesse caso é necessário armazenar apenas N variáveis, então a entrada é da ordem de $\theta(N)$ ao invés de $\theta(N^2)$.

Utilizando esse modelo temos as seguintes fórmulas:

- $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$
- $\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m$
- $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2$
- $\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$

Para construir um modelo de *Single-Index* é necessário estimar os betas para cada ativo e uma vez encontrados os betas, basta utilizar a fórmula $\alpha_i = \overline{R}_i - \beta_i \overline{R}_m$ para calcular os alfas.

3.2.2
Estimando os Betas

Para poder estimar os betas e alfas são utilizados dados históricos dos ativos e do índice de mercado. Existem diversos métodos que podem ser utilizados para estimar os betas dos ativos, o método mais comum é a regressão linear. O método pode ser visualizado na Figura 3.2 que contém um gráfico no qual o eixo y é o retorno do ativo R_{it} e o eixo x é o retorno do índice R_{mt}, em um determinado instante no tempo t. O ângulo da reta que minimizar a soma dos quadrados da sua variação em relação aos dados será a melhor estimativa de beta para o período.

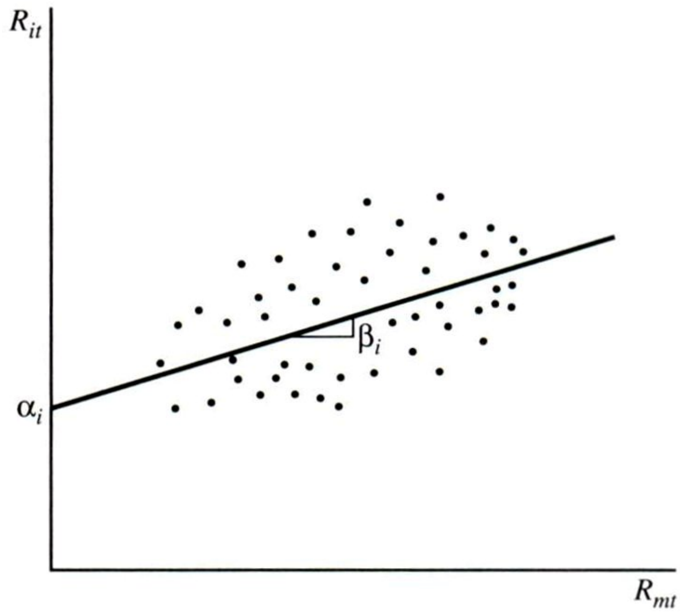

Figura 3.2: Regressão linear para estimar betas

A fórmula para o cálculo do beta:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

3.2.3
Ajustando os Betas

Apesar de obter a melhor estimativa para o período no qual foi construída, a técnica de regressão pode não ser uma boa estimativa para os próximos períodos. Esse evento é relatado nos artigos de Blume (Blume, 1975) e Levy (Levy, 1971). O principal problema é a tendência de coeficientes betas relativamente altos ou baixos em superestimar ou subestimar betas correspondentes para o próximo período. Portanto, a precisão da predição tende a piorar quando o beta se distancia significativamente da média (Klemkosky & Martin, 1975). Existem alguns ajustes que podem ser feitos para aprimorar os betas obtidos pela regressão linear.

Técnica de Blume

Com o intuito de melhorar os valores dos betas computados, Blume desenvolveu um método que corrige os betas passados ajustando diretamente em direção a um e assumiu que o ajuste calculado para um período é uma boa estimativa para o ajuste do próximo período. Utiliza-se uma regressão linear para os betas de todos os ativos em dois períodos adjacentes B_{i1} e B_{i2} como base para ajustar suas previsões de beta para o período subseqüente. Não pode haver sobreposição entre os períodos. Deste modo é possível determinar os fatores a e b.

$$B_{i2} = a + bB_{i1}$$

Através da função acima se pode utilizar betas de um período para estimar os betas do período subseqüente. A Figura 3.3 exibe graficamente a técnica.

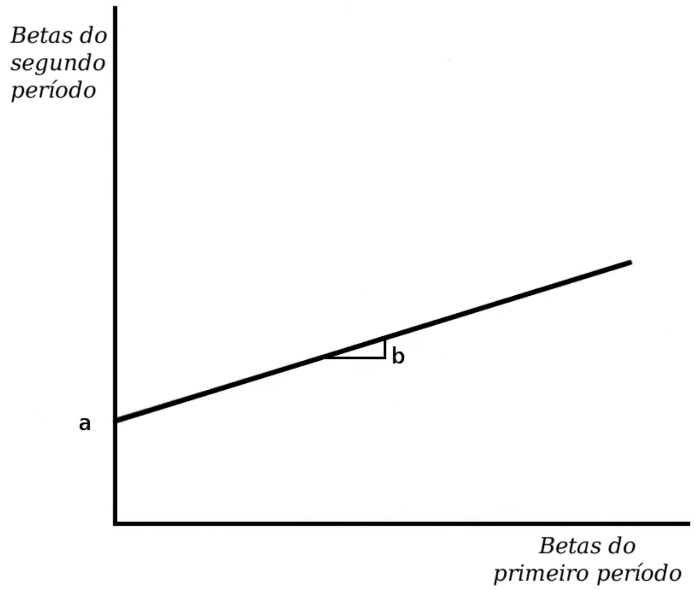

Figura 3.3: Técnica de Blume

Técnica de Vasicek

A proximidade da média torna o beta mais efetivo, entretanto um ajuste de mesma grandeza para qualquer beta poderia não ser eficaz. Seria melhor ajustar considerando o erro de amostragem. Utilizando as seguintes variáveis: $\overline{\beta}_1$ o beta médio das amostras de ações do período passado, $\sigma_{\overline{\beta}_1}$ é a variância dessa distribuição e β_{i1} é o beta do ativo i no período passado, Vasicek (Vasicek, 1973) desenvolveu a seguinte regra de ajuste:

$$\beta_{i2} = \frac{\sigma^2_{\beta_{i1}}}{\sigma^2_{\overline{\beta}_1} + \sigma^2_{\beta_{i1}}}\overline{\beta}_1 + \frac{\sigma^2_{\overline{\beta}_1}}{\sigma^2_{\overline{\beta}_1} + \sigma^2_{\beta_{i1}}}\beta_{i1}$$

É um método Bayesiano que pondera as observações com os maiores erros-padrão na direção da média mais do que os valores com menores erros-padrão.

3.2.4 *Multi-Index*

Modelos com Múltiplos Índices, assim como os modelos com apenas um índice, tentam explicar variações em grupo de investimentos através de variações nos índices. A técnica busca um conjunto de fatores econômicos ou de setores que expliquem a variação dos preços das ações, além daquela explicada pelo próprio mercado.

É um caso mais abrangente do *Single-Index* no qual são usados vários índices e cada índice é correlacionado com cada ativo, ou seja, com M índices temos $M.N$ variáveis. Tais variáveis serão utilizadas para predição das covariâncias entre os ativos, assim como nos modelos com apenas um índice.

De uma forma geral o retorno do ativo i pode ser relacionado com as variáveis que afetam seu retorno:

$$R_i = a_i^* + \sum_{j=1}^{M} b_{ij}^* I_j^* + c_i$$

Cujo I_j^* é o valor do índice j e b_{ij}^* indica a mudança que irá ocorrer no ativo i para uma unidade do índice j. O b_{ij}^* tem o mesmo significado que o β_i no caso do *single-index*. Assim como no modelo *single-index* a parte do retorno que não depende dos índices é dividida em duas partes: a_i^* e c_i. Então a_i^* é o valor esperado e c_i é uma componente aleatória da parte do retorno que é independente dos índices. O valor esperado de c_i é zero e sua variância é representada por $\sigma_{c_i}^2$.

O modelo terá propriedades matemáticas convenientes, caso os índices não sejam correlacionados, simplificando o cálculo do risco e a otimização de carteiras. O que não acarreta nenhum problema, porque sempre é possível transformar um conjunto de índices correlacionados em não correlacionados (Elton *et al.*, 2006). Reformulando a forma de cálculo do retorno do ativo i:

$$R_i = a_i + \sum_{j=1}^{M} b_{ij} I_j + c_i$$

Com essa modificação pode-se calcular o retorno esperado $\overline{R}_i$ e variância σ_i^2

do ativo i assim como a covariância σ_{ij} entre os ativos i e j :

$$\overline{R}_i = a_i + \sum_{j=1}^{M} b_{ij}\overline{I}_j$$
$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{M} b_{ik}^2\sigma_{I_k}^2 + \sigma_{c_i}^2$$
$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{M} b_{ik}b_{jk}\sigma_{I_k}^2$$

Sendo $\overline{I}_j$ e $\sigma_{I_k}^2$, respectivamente, o valor esperado do índice j e a variância de I_k.

3.3 Métodos para Estimar Retorno

Existem diversos métodos que podem ser utilizados para estimar os retornos dos ativos. Foram estudados alguns métodos tradicionais para testar os modelos de seleção de carteiras.

3.3.1 Mínimos Quadrados Lineares

Mínimos quadrados lineares é um método de predição muito utilizado em econometria. Consiste em uma regressão linear que deve encontrar a função linear $f(x) = y = a + bx$ que minimize os quadrados dos resíduos, ou seja, minimizar o quadrado da diferença entre os resultados dos exemplos e os valores obtidos pela função. Tomam-se os quadrados das distâncias para evitar que diferenças positivas sejam canceladas pelas negativas.

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2.$$

É necessário determinar os valores de a e b da função $f(x) = a + bx$.

3.3.2 Mínimos Quadrados Parciais

O método de mínimos quadrados parciais proposto por S. Wold (Wold *et al.*, 1983a) (Wold *et al.*, 1983b) consiste em uma regressão em fatores, cujo objetivo é a predição de um conjunto de variáveis de saída Y baseando-se na observação de um conjunto de variáveis de entrada X (Rentería & Milidiú, 2003).

Essa técnica pode ser implementada através do algoritmo simplificado *PLS1*, no qual se deseja predizer apenas uma variável. X é uma matriz cujas linhas são as amostras e Y contêm os resultados esperados das predições para cada amostra. O método para regressão é descrito abaixo:

Algoritmo 1 Algoritmo para regressão PLS1

$X_1 \leftarrow X$
$Y_1 \leftarrow Y$
Para $i = 1$ to k **faça**
  $w_i \leftarrow X_i^T Y$
  $w_i \leftarrow w_i / Y^T X X Y^T$ // Normalização do w_i
  $t_i \leftarrow X_i^{w_i}$
  // Cálculo dos coeficientes
  $b_i \leftarrow Y_i^T t_i / t_i^T t_i$
  $p_i \leftarrow X_i^T t_i / t_i^T t_i$
  // Cálculo residual
  $X_{i+1} \leftarrow X_i - t_i p_i^T$
  $Y_{i+1} \leftarrow Y_i - b_i t_i$
Fim Para

No método de predição os atributos a serem utilizados estão na matriz X' e matriz com os valores preditos é Y'.

Algoritmo 2 Algoritmo para predição PLS1

$X'_1 \leftarrow X'$
$Y' \leftarrow 0$
Para $i = 1$ to h **faça**
  $t'_i \leftarrow X'_i w_i$
  $Y' \leftarrow Y' + t'_i b_i$
  // Cálculo residual
  $X'_{i+1} \leftarrow X'_i - t'_i p_i^T$
Fim Para

3.3.3 Média Geométrica

O produtório dos retornos de um ativo é utilizado para calcular qual seria o ganho de um ativo em um determinado período. Então é intuitivo utilizar à média geométricas desses valores como estimativa do retorno do ativo para o próximo período. O cálculo é feito através do produto dos retornos passados r_t pela raiz enésima da quantidade de eventos n.

$$\sqrt[n]{\prod^{n} r_t}$$

3.3.4
Média Aritmética

Apesar da média aritmética não ser muito utilizada como estimativa de retorno, é relevante verificar quais são os resultados obtidos quando ela é utilizada. A média aritmética é o somatório dos retornos passados dividido pela quantidade de eventos.

$$\frac{\sum^{n} r_t}{n}$$

3.4
Outros Modelos

Depois de termos apresentado alguns dos principais modelos utilizados para seleção de carteira, discutiremos brevemente nesta seção algumas outras propostas existentes na literatura.

3.4.1
Maximização da Média Geométrica

Um critério bom para selecionar carteiras seria escolher a que obtivesse o maior retorno esperado no final do período (Latané, 1959). Nesse artigo Latané mostrou que seria equivalente a encontrar a carteira com a maior média geométrica de retorno. Algumas características desse método:

1. Tem a maior probabilidade de alcançar, ou exceder, determinado nível de retorno no menor tempo possível (Breiman, 1960).

2. Tem a maior probabilidade de exceder determinado nível de retorno dado qualquer período de tempo (Breiman, 1960).

3.4.2
Segurança Primeiro

Conjunto de métodos que são mais avessos ao risco. Esse tipo de estratégia tenta controlar ao máximo o risco de obter retornos indesejáveis. A seguir são apresentados métodos que compartilham desse objetivo.

Modelo de Roy

A primeira estratégia desse tipo a ser apresentada foi a de Roy (Roy, 1952), que identifica a melhor carteira como sendo aquela que tem a menor probabilidade de obter um retorno igual ou abaixo de uma determinada faixa ou limite inferior.

$$\text{Minimizar } Prob(\overline{R}_c \leq R_l)$$

que é equivalente a

$$\text{Minimizar } (R_l - \overline{R}_c)/\sigma_c$$

R_l é o limite inferior de retorno, $\overline{R}_c$ é o retorno da carteira.

Modelo de Kataoka

Existe outra estratégia encontrada na literatura, proposta por Kataoka (Kataoka, 1963), que tem o intuito de maximizar o limite inferior, sujeito a restrição de que a probabilidade do retorno ser menor ou igual ao limite inferior deve ser menor ou igual a um parâmetro α.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } R_l \\ &\quad \text{Sujeito a } Prob(\overline{R}_c \leq R_l) \leq \alpha \end{aligned}$$

Modelo de Telser

Telser (Telser, 1955) propôs um critério similar ao de Kataoka, que maximiza o retorno esperado sujeito a uma restrição de que a probabilidade de obter um retorno menor ou igual a um limite R_l não seja maior que um determinado valor α.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } \overline{R}_c \\ &\quad \text{Sujeito a } Prob(\overline{R}_c \leq R_l) \leq \alpha \end{aligned}$$