

## 4 Técnicas para Otimização de Carteiras com Custos Transacionais

Os métodos tradicionais de otimização de carteiras não consideram os custos transacionais de uma compra ou venda de ativos. Nos modelos que serão apresentados os custos são atribuídos individualmente para cada ativo. A utilização de altos custos tanto na compra quanto na venda para todos os ativos estimula a manter a carteira selecionada no período anterior. Nessa dissertação consideraram-se como custos transacionais a corretagem paga para a corretora e os emolumentos pagos a bolsa de valores.

Quando não são considerados os custos de cada operação são obtidos resultados irrealistas. Caso a carteira fosse comprada no mercado de ações os resultados poderiam ser bem diferente dos simulados sem os custos transacionais. Dependendo da frequência das transações e dos custos envolvidos, estimativas de retornos positivas poderiam na prática tornarem-se negativas e o risco também poderia ser afetado. O problema no qual são considerados os custos transacionais durante o processo de otimização é denominado como *POSTRAC* (*Portfolio Optimization System with TRANSACTION Costs*).

Dentre os modelos de otimização de carteira com custos transacionais foram selecionados dois que serão explicitados: o modelo proposto por Atsushi Yoshimoto (Yoshimoto, 1995) e o modelo proposto por John E. Mitchell (Mitchell & Braun, 2002).

### 4.1 Modelo de Yoshimoto

No artigo de Yoshimoto é proposta uma implementação de um modelo de programação não linear para o problema *POSTRAC*. Quando estamos lidando com custos transacionais é preciso saber a antiga porcentagem  $\bar{x}_i$  e a proporção em carteira que a cada momento é acrescentada  $u_i$  e é retirada de um ativo  $v_i$ . Sendo

assim, é possível determinar a nova porcentagem em carteira  $x_i$  de um ativo  $i$ :

$$\begin{aligned}x_i &= \bar{x}_i - v_i + u_i \\v &\geq 0 \\u &\geq 0\end{aligned}$$

No problema proposto, o custo transacional  $k_i$  é assumido como uma função linear da diferença entre a proporção do ativo em carteira e a nova proporção. Para calcular o custo transacional utiliza-se a seguinte fórmula:

$$k_i = c_i |x_i - \bar{x}_i|$$

Na qual  $c_i$  é uma constante e determina o custo, em porcentagem, do ativo  $i$  em carteira.

Para que fosse possível resolver o problema através de um método de programação não linear a fórmula do custo transacional foi alterada para  $k_i = c_i(d_i^+ + d_i^-)$ ,  $\forall i$ .

$$\begin{aligned}x_i - \bar{x}_i &= d_i^+ - d_i^-, \forall i \\d_i^+ d_i^- &= 0, \forall i \\d_i^+, d_i^- &\geq 0, \forall i\end{aligned}$$

Caso a diferença  $x_i - \bar{x}_i$  seja positiva o valor de  $d_i^-$  será zero e  $d_i^+$  será igual à diferença, o inverso ocorre caso a diferença seja negativa. Assim, tem-se a seguinte formulação do problema não linear:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } & \mu^T x - \mathbf{1}^T k - \lambda x^T Q x \\ \text{Sujeito a } & k_i = c_i(d_i^+ + d_i^-), \forall i \\ & x_i - \bar{x}_i = d_i^+ - d_i^-, \forall i \\ & d_i^+ d_i^- = 0, \forall i \\ & d_i^+, d_i^- \geq 0, \forall i \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

No qual  $x$  é um vetor indicando o percentual em carteira dado a cada ativo,  $\mu$  é um vetor contendo os retornos esperados dos ativos e  $Q$  é a matriz de covariância. O parâmetro  $\lambda$  é utilizado para calibrar a aversão ao risco do investidor. O valor  $\mathbf{1}$

no modelo representa um vetor preenchido somente com números um.

Para que fosse possível verificar a diferença entre a utilização dos custos transacionais dentro e fora do processo de otimização, Yoshimoto realizou diversas comparações entre o modelo não linear, o modelo quadrático tradicional e modelo quadrático tradicional com débito dos custos transacionais. Nos experimentos descritos no artigo, o modelo não linear teve retorno estatisticamente superior ao modelo tradicional menos os custos transacionais e este por sua vez teve um retorno bem inferior ao modelo quadrático tradicional.

## 4.2 Modelo de Mitchell

Mitchell abordou o problema de forma diferente usando um método de programação quadrática fracionária ou *Fractional Quadratic Program (FQP)*. O modelo tem como objetivo minimizar o risco e os custos transacionais.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \frac{x^T Q x}{2(y + \mathbf{1}^T x)^2} \\ & \text{Sujeito a } py + \mu^T x \geq E_0 \\ & \quad x_i - u_i + v_i = \bar{x}_i, \forall i \\ & \quad y + \mathbf{1}^T x + c_B^T u + c_S^T v = 1 \\ & \quad ay + Ax \leq 0 \\ & \quad u, v, x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Nesse modelo  $y$  é a porcentagem da carteira investida em um ativo livre de risco. Os vetores  $c_B$  e  $c_S$  representam os custos transacionais para compra e venda de cada ativo e  $E_0$  é o retorno que se espera obter da carteira.

No método de Mitchell foi considerado que compra ou venda do ativo livre de risco não acarreta em custo transacional. Caso isso não fosse verdade bastava considerar o ativo livre de risco como qualquer outro ativo.

A porcentagem investida no ativo  $i$  no instante  $t$  será  $x_i = \bar{x}_i + u_i + v_i$  e a porcentagem total investida nos ativos é  $y + \mathbf{1}^T x$  e é igual a  $1 - c_B^T u - c_S^T v$ . O termo  $y + \mathbf{1}^T x$  é o denominador da fração utilizada na função objetivo de minimização, portanto o modelo maximiza o montante total investido  $y + \mathbf{1}^T x$ . Como existe a seguinte restrição  $y + \mathbf{1}^T x + c_B^T u + c_S^T v = 1$ , reescrevendo  $y + \mathbf{1}^T x = 1 - (c_B^T u + c_S^T v)$ , então a maximização do montante investido acarreta na minimização dos custos transacionais.

A restrição  $ay + Ax \leq 0$  na realidade representa  $m$  restrições e é utilizada para controlar o limite de exposição de cada ativo. O vetor  $a$  tem  $m$  valores e  $A$

é uma matriz com  $m \times n$  valores. Assim é possível dar um limite máximo para a porcentagem em carteira de cada ativo.

A função objetivo quadrática fracionária pode ser transformada em uma função quadrática substituindo o denominador pelo quadrado de uma variável equivalente,

$$t = \frac{1}{y + \mathbf{1}^T x}$$

e assim definir  $\hat{u} = tu, \hat{v} = tv, \hat{x} = tx, \hat{y} = ty$ .

Com essas modificações o modelo de programação quadrática fracionária (FQP) transforma-se no seguinte modelo de programação quadrática (QP):

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \frac{1}{2} \hat{x} Q \hat{x} \\ &\text{Sujeito a } p \hat{y} + \mu^T \hat{x} - E_0 t \geq 0 \\ &\quad \hat{x}_i - \hat{u}_i + \hat{v}_i - \bar{x}_i t = 0, \forall i \\ &\quad \hat{y} + \mathbf{1}^T \hat{x} + c_B^T \hat{u} + c_S^T \hat{v} - t = 0 \\ &\quad \hat{y} + \mathbf{1}^T \hat{x} = 1 \\ &\quad a \hat{y} + A \hat{x} \leq 0 \\ &\quad \hat{u}, \hat{v}, \hat{x}, \hat{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Com resultado do modelo quadrático  $(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{u}^*, \hat{v}^*, t^*)$  é possível obter as respectivas variáveis do modelo fracionário  $(x^*, y^*, u^*, v^*, t^*)$ ,  $y^* = \frac{1}{t^*} \hat{y}^*$ ,  $x^* = \frac{1}{t^*} \hat{x}^*$ ,  $u^* = \frac{1}{t^*} \hat{u}^*$  e  $v^* = \frac{1}{t^*} \hat{v}^*$ .

No modelo descrito acima não é excluída a possibilidade da compra e venda simultânea do mesmo ativo para alcançar um risco mais baixo. Mas dada uma solução ótima do modelo acima é possível achar outra solução ótima que não esteja fazendo operações de compra e venda para o mesmo ativo utilizando o modelo descrito abaixo.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } t \\ &\text{Sujeito a } a \hat{u} - \hat{v} + \bar{x} t = \hat{x}^* \\ &\quad -c_B^T \hat{u} - c_S^T \hat{v} + t = \hat{y}^* + \mathbf{1}^T \hat{x}^* \\ &\quad \hat{u}, \hat{v} \geq 0 \end{aligned}$$

A solução desse processo de otimização terá  $\hat{u}^T \hat{v} = 0$ , ou seja, a compra e venda de um ativo serão complementares. A solução não complementar, ou seja, a venda e compra simultânea de um mesmo ativo é indesejada, essa solução também reduz o risco por causa da restrição  $\hat{y} + \mathbf{1}^T \hat{x} + c_B^T \hat{u} + c_S^T \hat{v} - t = 0$ . Ao final do processo de otimização temos uma carteira “ótima”, considerando os custos transacionais, cuja

complementaridade da venda e compra é assegurada.

### **4.3 Modelo para Maximização de Retorno**

Para utilizar o processo de maximização de retorno com custos transacionais a partir do modelo do Mitchell usou-se uma busca binária modificada. Procedimento que a partir do modelo de minimização do risco com custo transacional constrói um modelo de maximização de retorno com restrição de risco.

A abordagem, resumidamente, tenta se aproximar o possível do risco desejado variando o retorno alvo. O retorno alvo é utilizado para determinar o limite superior e inferior para o risco. São empregadas sucessivas diminuições no limite superior e aumentos no limite inferior tentando-se chegar dentro de uma faixa mais próxima do risco alvo.

---

**Algoritmo 3** Busca binária modificada

---

**Requer:** Integer  $maxIte$  and  $riskExp$ .

```

1:  $proPar \leftarrow 0$ 
2:  $proMax \leftarrow -1$ 
3:  $proMin \leftarrow 0.001$ 
4:  $limit \leftarrow 0.0000250$ 
5: Para  $i = 1$  to 10 faça
6:      $i \leftarrow i + 1$ 
7:      $risk \leftarrow SolveMinRisk(proPar)$ 
8:      $expctPro \leftarrow CalculateExpProfit()$ 
9:     Se  $riskExp - risk < limit \times -1$  então
10:         Se  $proMax = -1$  or  $expectPro < proMax$  então
11:              $proMax \leftarrow expectPro$ 
12:         Fim Se
13:          $proPar \leftarrow (proMin + proMax)/2$ 
14:     Senão
15:         Se  $riskExp - risk > limit$  então
16:              $validSol \leftarrow SaveSolution()$ 
17:             Se  $expectPro > proMin$  então
18:                  $retMin \leftarrow expectPro$ 
19:                 Se  $retMax = -1$  então
20:                      $proPar \leftarrow retMin * 3$ 
21:                 Senão
22:                      $proPar \leftarrow (proMin + proMax)/2$ 
23:                 Fim Se
24:             Fim Se
25:         Senão
26:             Retorne the valid solution
27:         Fim Se
28:     Fim Se
29: Fim Para

```

---

#### 4.4 Modelo Aproximado de Maximização de Retorno

Na literatura comenta-se em alguns trabalhos (Mitchell & Braun, 2002) (Yoshimoto, 1995) uma sugestão de modelagem com os custos transacionais na qual o retorno do ativo é subtraído dos custos. Nessa modelagem o pagamento dos custos é feito após o período de investimento sobre o montante inicial, então o montante

gasto com os custos transacionais rende durante esse período, o que não aconteceria em uma carteira real. Em teoria essa diferença seria pequena, porém não se sabe qual seria a influência que essa distorção teria na performance do modelo.

Durante o processo de otimização os custos transacionais foram considerados como sendo pagos depois do período de investimento, mas o cálculo da performance do modelo é feito como se os custos fossem pagos no momento da compra do ativo. Então apesar de haver uma distorção para o modelo, os resultados do modelo vão ser calculados corretamente.

No modelo é preciso adicionar a restrição  $x_i - v_i + u_i = \bar{x}_i$  e adicionar o custo transacional na função objetivo com peso negativo.

$$\text{Maximizar } \mu x - c_B^T u - c_S^T v$$

$$\text{Sujeito } ax^T Qx \leq v_c$$

$$x_i - b_i + s_i = x'_i, \forall i$$

$$\mathbf{1}^T x = 1$$

Nesse modelo a complementaridade da compra e venda simultânea de um ativo é garantida. Caso houvesse compra e venda simultânea de um ativo, essa não poderia ser uma solução ótima, pois seria possível obter um retorno melhor sem interferir nas restrições. Porém nesse caso a não complementaridade não afetaria o risco, porque o custo transacional não influencia a porcentagem em carteira do ativo.