

**Thuener Armando da Silva**

**Estudo Experimental de Técnicas para  
Otimização de Carteiras**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Eduardo Sany Laber

Rio de Janeiro  
Junho de 2010

**Thuener Armando da Silva**

**Estudo Experimental de Técnicas para  
Otimização de Carteiras**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Eduardo Sany Laber**

Orientador

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Marcus Vinicius Soledade Poggi de Aragão**

Departamento de Informática – PUC-Rio

**Prof. Caio Ibsen Rodrigues de Almeida**

Escola de Pós-Graduação em Economia – FGV

**Prof. Raúl Pierre Rentería**

Departamento de Informática – PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —  
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 4 de Junho de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Thuener Armando da Silva**

Graduou-se em Bacharel em Informática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2007 . Durante sua graduação, desenvolveu um projeto que utilizou técnicas de aprendizado de máquina para análise de sentimento. Durante o Mestrado foi bolsista CNPq mantendo um excelente desempenho acadêmico e desenvolveu um trabalho aplicado à seleção de carteiras. Atualmente faz parte da equipe de pesquisa do laboratório de Algoritmos e Tecnologia da Decisão desenvolvendo soluções para o mercado financeiro.

#### Ficha Catalográfica

Silva, Thuener Armando

Estudo Experimental de Técnicas para Otimização de Carteiras / Thuener Armando da Silva; orientador: Eduardo Sany Laber. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Informática, 2010.

v., 126 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Informática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Informática – Tese. 2. Seleção de carteiras. 3. Otimização de carteiras. 4. Análise de investimentos. 5. Modelo de Markowitz. I. Laber, Eduardo Sany. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. III. Título.

CDD: 004

À minha noiva.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha família, especialmente aos meus pais, Fernando e Kátia, minha irmã e meu cunhado, Tianny e Daniel, por minha criação e educação.

A Luana Lachtermacher, minha noiva, pelo seu apoio incondicional, paciência e compreensão durante todos esses anos que estamos juntos. Também por sua ajuda na revisão dessa dissertação, que não seria possível sem ela.

Ao meu orientador Prof. Eduardo Laber por me guiar durante essa jornada incrível.

Aos Profs. Marcus Poggi de Aragão e Ruy Luiz Milidiú pela ajuda na minha formação durante o mestrado.

Ao Prof. Raúl Rentería e meus amigos Iam Jabour e Felipe Nogueira pelo apoio e companheirismo desde a graduação.

Aos amigos Bruno Saldanha, Diêgo Bispo, Leandro Alvim e Paulo Gomide pelos debates e esclarecimentos, que me sanaram diversas dúvidas sobre o mercado financeiro.

Ao meu amigo Rafael Martinelli pela ajuda na revisão dessa dissertação.

Aos meus amigos Eduardo Cardoso, Daniel Fleischman, Thiago Araújo, Carlos Crestana, Daniel Marques, Ricardo Costa, Manoel Teixeira, Baldoíno Fonseca e Patrick Happ que me ajudaram durante o mestrado, sem eles essa jornada seria muito cansativa.

Aos professores e funcionários da PUC-Rio e o Departamento de Informática por fazerem parte dessa incrível instituição que auxiliou muito no meu crescimento profissional e pessoal.

A PUC-Rio, CAPES e CNPq pela ajuda financeira durante o mestrado.

## Resumo

Silva, Thuener Armando; Laber, Eduardo Sany. **Estudo Experimental de Técnicas para Otimização de Carteiras**. Rio de Janeiro, 2010. 126p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Markowitz em 1959 estruturou as bases da teoria moderna de seleção de carteiras através da análise do risco e do retorno de ativos. Mesmo após cinco décadas sua teoria ainda é amplamente utilizada como base para construção de carteiras de investimentos. Nessa dissertação investigamos variações do modelo de Markowitz para seleção de carteiras tanto de um ponto de vista teórico quanto prático. Analisamos o impacto dos diferentes métodos de estimativa de risco e retorno, custos transacionais, risco alvo e frequência da revisão de carteira. Para que fosse possível testar e analisar as estratégias estudadas, implementamos um simulador versátil e robusto além de criar uma base de dados com dados diários de 41 ativos da bolsa de valores brasileira, CDI e IBOVESPA.

## Palavras-chave

Seleção de carteiras; Otimização de carteiras; Análise de investimentos; Modelo de Markowitz;

## Abstract

Silva, Thuener Armando; Laber, Eduardo Sany(Advisor). **Experimental Study of Techniques for Portfolio Optimization** . Rio de Janeiro, 2010. 126p. MSc Dissertation — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Markowitz in 1959 structured the foundations of the modern portfolio theory through the analysis of risk and return of assets. Now, after five decades his theory is still widely used as a basis for building portfolios. In this thesis we investigate variations of the Markowitz model for portfolio selection from both a theoretical and practical point of view. We analyzed the impact of different methods for the prediction of risk and return, transaction costs, target risk and frequency of revision of the portfolio. In order to test and analyze the strategies studied we implemented a robust and versatile simulator and created a database with daily data of 41 assets from the Brazilian stock exchange, CDI and IBOVESPA.

## Keywords

Portfolio Selection; Portfolio Optimization; Investments Analysis; Markowitz Model;

## Sumário

1	Introdução	<b>19</b>
1.1	Motivação e Objetivos	20
1.2	Descrição do Problema	20
1.3	Resultados Obtidos e Contribuições	21
1.4	Organização da Dissertação	22
2	Conceitos Básicos	<b>23</b>
2.1	Função Utilidade	23
2.2	Ativo Livre de Risco	24
2.3	Índice de Mercado	25
3	Técnicas de Otimização de Carteiras	<b>26</b>
3.1	Modelo de Média-Variância	26
3.2	Outros Métodos para Estimar Risco	30
3.3	Métodos para Estimar Retorno	35
3.4	Outros Modelos	37
4	Técnicas para Otimização de Carteiras com Custos Transacionais	<b>39</b>
4.1	Modelo de Yoshimoto	39
4.2	Modelo de Mitchell	41
4.3	Modelo para Maximização de Retorno	43
4.4	Modelo Aproximado de Maximização de Retorno	44
5	Ambiente Experimental	<b>46</b>
5.1	Ambiente Computacional	46
5.2	Construção da Base de Dados	46
5.3	Ferramenta de Teste	48
5.4	Implementação dos Algoritmos	51
6	Análise dos Experimentos	<b>53</b>
6.1	Metodologia	54
6.2	Experimento Tradicional de Maximização de Retorno	55
6.3	Adição do CDI	56
6.4	Comparação dos Modelos com Custos Transacionais	57
6.5	Impacto dos Custos Transacionais	60
6.6	Controle de Risco	63
6.7	Sensibilidade a Métodos de Estimativa de Retorno	65
6.8	Sensibilidade a Métodos de Estimativa de Risco	66
6.9	Revisão da Carteira	67
6.10	Avaliação dos Modelos	69
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	<b>72</b>
	Referências Bibliográficas	<b>74</b>



A	Informações Sobre os Ativos	77
B	Resumo dos Dados dos Experimentos	<b>81</b>
B.1	Período A	81
B.2	Período B	90
B.3	Período C	100
C	Características dos Modelos	<b>110</b>
C.1	Características por Risco Alvo	110

## Lista de figuras

3.1	Fronteira eficiente	27
3.2	Regressão linear para estimar betas	32
3.3	Técnica de Blume	33
5.1	Processo de simulação da ferramenta de teste	50
6.1	Gráfico do IBOVESPA com os períodos <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> .	54

## Lista de tabelas

1.1	Exemplo de uma composição de carteira	21
2.1	Resumo da segunda propriedade das funções utilidade	24
3.1	Correlação entre ativos.	28
6.1	Maximização de retorno tradicional para o período A	56
6.2	Maximização de retorno com adição do CDI para o período A	57
6.3	Busca binária no modelo de Mitchell para o período A	58
6.4	Busca binária no modelo de Mitchell para o período B	58
6.5	Busca binária no modelo de Mitchell para o período C	59
6.6	Modelo aproximado com alto custo transacional para o período A	59
6.7	Modelo aproximado e alto custo transacional para o período B	60
6.8	Modelo aproximado e alto custo transacional para o período C	60
6.9	Modelo com a retirada dos custos transacionais	61
6.10	Média de retorno e risco para os experimentos que consideram (TC) e não consideram (MTC) custos transacionais na otimização para o período A.	62
6.11	Média de retorno e risco para os experimentos que consideraram (TC) e não consideram (MTC) custos transacionais na otimização para o período B.	62
6.12	Média de retorno e risco para os experimentos que consideram (TC) e não consideram (MTC) custos transacionais na otimização para o período C.	63
6.13	Médias das porcentagens de erro dos testes em relação ao risco alvo	64
6.14	Maiores porcentagens de erro dos testes em relação ao risco alvo	64
6.15	Médias das porcentagens de erro dos testes em relação ao risco alvo por dia de revisão de carteira	64
6.16	Maiores porcentagens de erro dos testes em relação ao risco alvo por dia de revisão de carteira	65
6.17	Maximização do retorno com modelo aproximado e alto custo transacional para o período B utilizando mínimos quadrados	66
6.18	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período A	66
6.19	Média dos retornos e risco médio dos experimentos classificados pelo risco alvo	67
6.20	Números de inversões para os experimentos com baixo custo transacional	68
6.21	Números de inversões para os experimentos com alto custo transacional	68
6.22	Período A com alto custo transacional	69

6.23	Período A com baixo custo transacional	70
6.24	Período B com alto custo transacional	70
6.25	Período B com baixo custo transacional	70
6.26	Período C com alto transacional	71
6.27	Período C com baixo custo transacional	71
A.1	Informações sobre os ativos utilizados nos experimentos (Parte 1)	77
A.2	Informações sobre os ativos utilizados nos experimentos (Parte 2)	78
A.3	Desvio padrão dos ativos por período (Parte 1)	79
A.4	Desvio padrão dos ativos por período (Parte 2)	80
B.1	Maximização do retorno com modelo aproximado e baixo custo transacional para o período A	81
B.2	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período A	82
B.3	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período A	82
B.4	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período A	83
B.5	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período A	83
B.6	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Vasicek para estimar covariância para o período A	84
B.7	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Blume para estimar covariância para o período A	84
B.8	Maximização do retorno com modelo aproximado e alto custo transacional para o período A	85
B.9	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período A	85
B.10	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período A	86
B.11	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período A	86
B.12	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período A	87

B.13 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Vasicek para estimar covariância para o período A	87
B.14 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Blume para estimar covariância para o período A	88
B.15 Maximização do retorno descontando o alto custo transacional depois da otimização para o período A	88
B.16 Maximização do retorno com modelo aproximado, descontando o alto custo transacional depois da otimização e média aritmética para estimar os retornos para o período A	89
B.17 Maximização do retorno com modelo aproximado, descontando o alto custo transacional depois da otimização e média geométrica para estimar os retornos para o período A	89
B.18 Maximização do retorno com modelo aproximado, descontando o alto custo transacional depois da otimização e utilizando PLS para estimar os retornos para o período A	90
B.19 Maximização do retorno com modelo aproximado, descontando o alto custo transacional depois da otimização e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período A	90
B.20 Maximização do retorno com modelo aproximado e baixo custo transacional para o período B	91
B.21 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período B	91
B.22 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período B	92
B.23 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período B	92
B.24 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período B	93
B.25 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Vasicek para estimar covariância para o período B	93
B.26 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Blume para estimar covariância para o período B	94
B.27 Maximização do retorno com modelo aproximado e alto custo transacional para o período B	94
B.28 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período B	95

B.29 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período B	95
B.30 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período A	96
B.31 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período B	96
B.32 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Vasicek para estimar covariância para o período B	97
B.33 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Blume para estimar covariância para o período B	97
B.34 Maximização do retorno descontando o alto custo transacional depois da otimização para o período B	98
B.35 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e média aritmética para estimar os retornos para o período B	98
B.36 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e média geométrica para estimar os retornos para o período B	99
B.37 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e utilizando PLS para estimar os retornos para o período B	99
B.38 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período B	100
B.39 Maximização do retorno com modelo aproximado e baixo custo transacional para o período C	100
B.40 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período C	101
B.41 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período C	101
B.42 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período C	102
B.43 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período C	102

B.44 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Vasicek para estimar covariância para o período C	103
B.45 Maximização do retorno com modelo aproximado e alto custo transacional para o período C	103
B.46 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período C	104
B.47 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período C	104
B.48 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando PLS para estimar os retornos para o período C	105
B.49 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período C	105
B.50 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Vasicek para estimar covariância para o período C	106
B.51 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e utilizando <i>Single-Index</i> ajustado pela técnica de Blume para estimar covariância para o período C	106
B.52 Maximização do retorno descontando o alto custo transacional depois da otimização para o período C	107
B.53 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e média aritmética para estimar os retornos para o período C	107
B.54 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e média geométrica para estimar os retornos para o período C	108
B.55 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e utilizando PLS para estimar os retornos para o período C	108
B.56 Maximização do retorno com modelo aproximado,descontando o alto custo transacional depois da otimização e utilizando <i>Single-Index</i> para estimar covariância para o período C	109
C.1 Maximização do retorno descontando o alto custo transacional depois da otimização para o período A	110
C.2 Maximização do retorno com alto custo transacional para o período A	110

C.3	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período A	111
C.4	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período A	111
C.5	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e PLS para estimar os retornos para o período A	111
C.6	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> para estimar o risco para o período A	112
C.7	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Vasicek para estimar o risco para o período A	112
C.8	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Blume para estimar o risco para o período A	112
C.9	Maximização do retorno descontando o baixo custo transacional depois da otimização para o período A	113
C.10	Maximização do retorno com baixo custo transacional para o período A	113
C.11	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período A	113
C.12	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período A	114
C.13	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e PLS para estimar os retornos para o período A	114
C.14	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> para estimar o risco para o período A	114
C.15	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Vasicek para estimar o risco para o período A	115
C.16	Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Blume para estimar o risco para o período A	115
C.17	Maximização do retorno descontando o alto custo transacional depois da otimização para o período B	115
C.18	Maximização do retorno com alto custo transacional para o período B	116
C.19	Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período B	116



C.20 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período B	116
C.21 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e PLS para estimar os retornos para o período B	117
C.22 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> para estimar o risco para o período B	117
C.23 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Vasicek para estimar o risco para o período B	117
C.24 maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Blume para estimar o risco para o período B	118
C.25 Maximização do retorno descontando o baixo custo transacional depois da otimização para o período B	118
C.26 Maximização do retorno com baixo custo transacional para o período B	118
C.27 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período B	119
C.28 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período B	119
C.29 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e PLS para estimar os retornos para o período B	119
C.30 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> para estimar o risco para o período B	120
C.31 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Vasicek para estimar o risco para o período B	120
C.32 maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Blume para estimar o risco para o período B	120
C.33 Maximização do retorno descontando o alto custo transacional depois da otimização para o período C	121
C.34 Maximização do retorno com alto custo transacional para o período C	121
C.35 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período C	121
C.36 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período C	122
C.37 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e PLS para estimar os retornos para o período C	122

C.38 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> para estimar o risco para o período C	122
C.39 Maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Vasicek para estimar o risco para o período C	123
C.40 maximização do retorno com modelo aproximado, alto custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Blume para estimar o risco para o período C	123
C.41 Maximização do retorno descontando o baixo custo transacional depois da otimização para o período C	123
C.42 Maximização do retorno com baixo custo transacional para o período C	124
C.43 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média aritmética para estimar os retornos para o período C	124
C.44 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e média geométrica para estimar os retornos para o período C	124
C.45 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e PLS para estimar os retornos para o período C	125
C.46 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> para estimar o risco para o período C	125
C.47 Maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Vasicek para estimar o risco para o período C	125
C.48 maximização do retorno com modelo aproximado, baixo custo transacional e <i>Single-Index</i> ajustado por Blume para estimar o risco para o período C	126