3.
Apreçamento CDS

O cálculo do *spread* de um CDS pode ser feito igualando-se os fluxos de caixa em ambas as situações do CDS, com os pagamentos dos prêmios até o evento de inadimplência e após o evento com a liquidação do contrato. A soma dos valores presentes dos prêmios é igualada aos valores presentes da perda ocorrida pelo evento de inadimplência, onde o apreçamento do CDS refere-se ao cálculo do *spread*.

Uma dos requisitos no apreçamento de um CDS é a adoção de um modelo de risco de crédito para que se possa estimar a probabilidade de inadimplência, sendo que esse modelo financeiro deve ser consistente e livre de arbitragens. Dentre diversas metodologias propostas na literatura para a modelagem de risco de crédito, tais como modelos estruturais, de forma reduzida, de migração de crédito, de intensidade, risco-neutro e híbridos (Bieleck, 2002), este trabalho utilizará as abordagens estrutural e de risco-neutro.

3.1
Risco-Neutro

A probabilidade de inadimplência a risco-neutro é a probabilidade de ocorrência de inadimplência numa situação hipotética em que os investidores são indiferentes ao risco. Nesse cenário hipotético os ativos podem ser precificados descontando os fluxos de caixa esperados a uma taxa de retorno livre de risco (Loffler, 2007). Entretanto o preço do ativo na situação de risco-neutro pode ser usado para determinar o preço no mundo real, onde os investidores são avessos ao risco. As pessoas do mundo real desejam ser recompensadas por assumir um risco, enquanto no mundo do risco-neutro essa questão se traduz em probabilidades de inadimplência maiores, ou seja, as probabilidades de inadimplência no mundo risco-neutro são em geral maiores que a do mundo real. O método mais direto de se obter as probabilidades de inadimplência a risco-neutro é a partir dos preços de mercado de títulos corporativos ou outro instrumento com risco de inadimplência (Loffler, 2007).

A metodologia para a obtenção das probabilidades de inadimplência a risco-neutro a partir de títulos corporativos foi proposta por (Hull & White, 2001) e será usada neste trabalho. O preço de um título sem risco *TSR* com vencimento em *T*, conforme mostra a equação 3.1, pode ser obtido pela soma de seus fluxos de caixa descontados a uma taxa livre de risco *r*.

$$TSR_o = \sum_{t=1}^{T} \frac{FC_t}{(1+r_t)^t} \qquad (3.1)$$

Conforme mostra a equação 3.2, os fluxos de caixa do título *TSR* são formados pelo pagamento de cupons e do principal no vencimento do título *T*. Se o título *TSR* não pagasse cupons seu preço ficaria conforme a equação 3.3, ainda descontado a taxa livre de risco.

$$TSR_o = \sum_{t=1}^{T} \frac{Cupom_t}{(1+r_t)^t} + \frac{\Pr incipal}{(1+r_T)^T} \qquad (3.2)$$

$$TSR_o = \frac{\Pr incipal}{(1+r_T)^T} \qquad (3.3)$$

Imaginemos um título com risco *TCR* sem os pagamentos de cupom e em termos de probabilidade de inadimplência a risco-neutro PD^o e da sua taxa de recuperação *R*. Duas situações são possíveis: o título honra seus compromissos e paga o principal no vencimento ou o título não honra seus compromissos e o dono do título recebe a taxa de recuperação do título sobre o principal. A equação 3.4 modela a situação do título *TCR*.

$$TCR_o = \sum_{t} \frac{\Pr incipal\left(1 - PD_t^0\right) + \Pr incipal.R.PD_t^0}{(1+r_t)^t} \qquad (3.4)$$

Reorganizando a equação 3.4 e inserindo a equação 3.3, resulta na equação 3.5, onde se pode observar que a diferença entre o preço de um título sem risco e outro com risco, assumindo que ambos têm o mesmo fluxo de caixa prometido, é igual à perda esperada pela inadimplência do título descontada pela taxa livre de risco. A perda esperada é *Principal* (1 – *R*) podendo ocorrer a uma probabilidade PD^o.

$$TSR_o - TCR_o = \sum_t \frac{(1-R)\Pr incipal.PD_t^0}{(1+r_t)^t} \qquad (3.5)$$

O relacionamento encontrado na equação 3.5 pode ser estendido a títulos pagando cupons, entretanto foram abstraídos da modelagem alguns fatores como liquidez, impostos e taxas que podem acarretar diferenças nos preços de títulos com risco e sem risco.

Da equação 3.5 podemos extrair a probabilidade de inadimplência a risco-neutro a partir do preço dos títulos corporativos. Na aplicação da equação 3.5 podemos observar que:

- A data da inadimplência t pode ocorrer em qualquer momento da vida do título;
- O preço do título *TCR* é o preço de um título corporativo observado no mercado;
- O preço do título sem risco *TSR* pode-se ser encontrado através da equação 3.2;
- As probabilidades de inadimplência a risco-neutro PD^o são vistas como de hoje e é a incógnita que devemos encontrar na modelagem, a estrutura de como as probabilidades evoluem com o tempo deve ser definida, podendo ser constantes ou não;
- O valor de *Principal* é o preço do título livre de risco esperado na data de inadimplência;

- A taxa de recuperação *R* é o percentual que os donos dos títulos recebem em caso de inadimplência, pode-se ser estimada por valores históricos ou por modelos de predição multivariados;
- As taxas livres de risco podem ser derivadas de títulos do governo ou de taxas de SWAP negociadas no mercado.

Com as probabilidades de inadimplência a risco-neutro calculadas, calcula-se o valor do *spread* do CDS. Para o cálculo do *spread* igualam-se os fluxos de pagamentos do comprador e do vendedor de proteção no contrato de CDS. O comprador de proteção paga um percentual *s*, que é o *spread* do contrato, sobre o valor principal do contrato do CDS. Esse *spread s* é pago a uma frequência *f* determinada em contrato. Nessa modelagem assume-se que as data de ocorrência de inadimplência são as mesmas datas de pagamentos do *spread* do CDS, com isso não existe nenhum resíduo a pagar pelo comprador de proteção no caso da ocorrência de inadimplência.

A equação 3.6 apresenta a modelagem do lado do comprador de proteção no CDS, onde os valores presentes dos pagamentos são calculados e ponderados com a probabilidade a risco-neutro PD^0 calculada pela equação 3.5, em que $1-\sum_{1}^{t-1} PD_t^0$ significa a probabilidade de sobrevivência até o início do próximo período *t* de pagamento do *spread*.

$$PagamentoComprador = \sum_t \frac{\Pr incipal \times s}{f} \times \frac{1-\sum_{1}^{t-1} PD_t^0}{(1+r_t)^t} \qquad (3.6)$$

Pelo outro lado do contrato do CDS, calcula-se o pagamento do vendedor de proteção para o caso de ocorrência de inadimplência com a taxa de recuperação *R* do título atrelado ao contrato do CDS. A equação 3.7 apresenta a modelagem do lado do vendedor de proteção do CDS, onde os valores presentes dos pagamentos são calculados e ponderados com a probabilidade a risco-neutro de inadimplência PD^0. O pagamento é um percentual sobre o principal mais um juro residual *A*, expresso como percentual do principal.

$$PagamentoVendedor = \sum_t \Pr incipal \times (1 - R - A \times R)\frac{PD_t^0}{(1 + r_t)^t} \qquad (3.7)$$

Para calcular o *spread* do CDS igualam-se os fluxos de pagamentos do comprador e do vendedor resultando na equação 3.8, com isso procura-se evitar a arbitragem sem que uma ponta ganhe mais que a outra.

$$s = \frac{\sum_t (1 - R - A \times R)\frac{PD_t^0}{(1 + r_t)^t}}{\sum_t \frac{1}{f} \times \frac{1 - \sum_1^{t-1} PD_t^0}{(1 + r_t)^t}} \qquad (3.8)$$

3.2
Abordagem estrutural

Os modelos estruturais são dirigidos a obrigações específicas de uma empresa, em que os eventos de inadimplência são disparados ao atingir uma determinada barreira no valor relativo da empresa. Consequentemente a premissa no modelo estrutural é a modelagem da evolução do valor da empresa e sua estrutura de capital. A maioria dos modelos estruturais está preocupada com um único tipo de evento de crédito, que é a inadimplência da empresa. A inadimplência ocorre quando o valor da empresa alcança certo limite.

Em 1974, Merton propôs um modelo em que o capital da empresa é uma opção nos ativos da mesma, e usando a teoria de opções pode-se estimar a probabilidade de inadimplência de uma empresa. Nesse modelo, também chamado modelo de Merton, a inadimplência da empresa ocorre se os seus ativos ficam abaixo de um valor crítico associado ao passivo da empresa. Logo a probabilidade de inadimplência é a probabilidade dos ativos ficarem abaixo do valor do passivo num determinado momento. A modelagem de Merton foi feita assumindo que o passivo da empresa consiste de um título sem cupom de valor principal *D* e vencimento no tempo *T*.

Assumindo que:

- *Vo* é o valor dos ativos da empresa hoje;
- *Vt* é o valor dos ativos da empresa no tempo *T*;
- *Eo* é o valor do capital próprio da empresa hoje;
- *Et* é o valor do capital próprio da empresa no tempo *T*;
- *D* é o valor do passivo da empresa no tempo *T*;
- σ_V é a volatilidade dos ativos da empresa, assumida constante no tempo;
- σ_E é a volatilidade instantânea do capital próprio da empresa.

Se no tempo *T* o valor de *Vt* for menor que o de *D*, pode-se dizer em teoria que a empresa não teria condições de honrar suas obrigações e o valor de *Et* seria zero. Se o valor da empresa *Vt* for maior que o valor de *D* a empresa honraria sua obrigações e o valor de *Et* seria de *Vt* menos *D*. Com essa modelagem teríamos que o valor da empresa seria na forma da equação 3.9 no vencimento *T*.

$$E_t = \max(Vt - D, 0) \qquad (3.9)$$

A equação 3.9 mostra o pagamento de uma opção européia de compra no valor dos ativos da empresa, com um preço de exercício de *D*, que é o pagamento dos donos da empresa. O pagamento dos portadores dos títulos da empresa seria formado por uma carteira composta de um título sem risco e sem pagamento de cupom e com valor principal *D*, mais uma opção européia de venda na posição vendida no valor dos ativos da empresa e de preço de exercício *D*. O pagamento dos donos da empresa e dos portadores de títulos é mostrado na figura 3 em função do valor dos ativos da empresa.

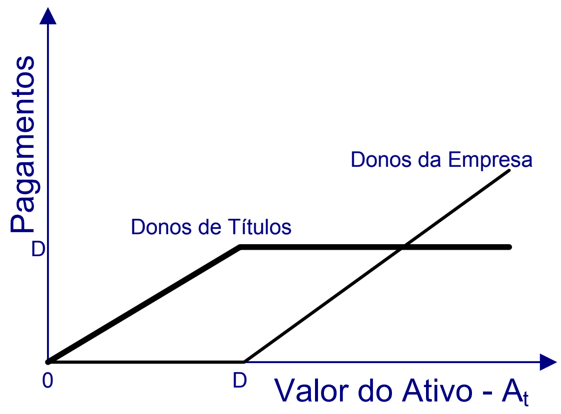

Figura 3 – Pagamentos em função do valor dos ativos da empresa

O valor da empresa pode ser encontrado utilizando-se a equação de opções de *Black-Scholes*, mostrado na equação 3.10, e a probabilidade de inadimplência é dada pela equação 3.11.

$$Eo = V_o N(d1) - De^{-rt} N(d2) \quad (3.10)$$

$$\Pr ob = N(-d2) \qquad (3.11)$$

Para calcular o valor da empresa na equação 3.10 necessita-se dos valores de *Vo* e σ_V, entretanto seus valores não são observáveis, mas se a empresa possui ações negociadas no mercado, pode-se estimar o valor da empresa e sua volatilidade. Usando a equação 3.12, temos uma relação entre *Vo* e *Eo*.

$$\sigma_E E_o = N(d1)\sigma_V V_o \quad (3.12)$$

As equações 3.10 e 3.12 fornecem um par de equações que devem ser resolvidas simultaneamente para resolver os valores de *Vo* e σ_V.

Pelo lado dos donos de título o componente sem risco é o valor presente da dívida da empresa descontada a uma taxa livre de risco e o componente com risco é o valor presente da dívida descontada a taxa de rendimento prometida. A equação 3.13 mostra a relação entre esses componentes e o valor da opção de venda. Por meio das equações de 3.10, 3.11 e 3.12 pode-se encontrar o valor da probabilidade de inadimplência.

Dívida descontada a taxa com risco = Dívida descontada a taxa sem risco – valor da opção de venda (3.13)

Com a probabilidade calculada pela equação 3.11 pode-se utilizar a equação 3.14 para calcular o *spread* do contrato do CDS.

$$s = \frac{\sum_t (1-R)\frac{PD_t}{(1+r_t)^t}}{\sum_t \frac{1}{(1+r_t)^t}} \qquad (3.14)$$