6
Apreçamento de ESOs com preço de exercício estocástico

Os modelos de apreçamento vistos até agora consideram um preço de exercício fixo ao longo da maturidade da opção. Há, no entanto, um número crescente de empresas outorgando opções indexadas a algum índice de inflação ou de mercado. Este capítulo irá apresentar os principais modelos para apreçamento de tais opções. A seção 6.1 apresenta uma discussão envolvendo os métodos de avaliação de desempenho baseados em retorno absoluto e relativo, a seção 6.2 e 6.2.1 apresentam as ESOs indexadas e a seção 6.2.2 apresenta a metodologia de Margrabe (1978) para apreçamento de opções com dois processos estocásticos. Na seção 0 é discutido o modelo de Johnson e Tian (2000) para apreçamento de opções indexadas européias. As opções americanas são tratadas na seção 0, onde será apresentada uma versão adaptada do modelo de Azevedo e Barbachan (2004). Por fim, em 0 é apresentado o modelo que incorpora duas importantes particularidades de ESOs às opções indexadas: o abandono e a política de exercício antecipado. Este modelo é a principal contribuição desta dissertação.

6.1
Retorno absoluto versus relativo

O retorno absoluto de um ativo só leva em consideração o desempenho do ativo, sem levar em consideração quaisquer outras informações:

Retorno absoluto i = retorno do ativo i

Quando a avaliação está baseada em retorno relativo, o desempenho apresentado pelo um determinado ativo é comparado com o retorno de outros ativos de referência (por exemplo, o retorno de um ativo substituto) de modo que o importante é a diferença entre os retornos. Ou seja:

Retorno relativo i = retorno do ativo i – retorno ativo j

Avaliar o desempenho (e, por conseguinte remunerar) com base em retornos absolutos tem sido uma prática amplamente criticada na academia pelo fato deste método não maximizar os incentivos dos funcionários, em particular os altos executivos. No caso dos planos de ESOs, ao manter o preço de exercício fixo, a empresa está remunerando o indivíduo pelo retorno absoluto do preço das ações. Johnson (1999) levantou o seguinte questionamento: será que o retorno absoluto de uma ação é o melhor indicador que reflete a criação de valor para o acionista? Ou será que o desempenho de um ativo deve ser avaliado relativamente ao mercado ou ao grupo de empresas de seu setor? Para o autor, o foco no retorno absoluto cria uma distorção nos incentivos, pois um aumento repentino de curto prazo no preço das ações pode ser o suficiente para que a ESO torne-se exercível. Com isso, o objetivo principal de alinhar o interesse de administradores e acionistas no longo prazo fracassaria.

Para Johnson e Tian (2000), as ESOs outorgadas com preço de exercício fixo violam uma premissa básica da teoria tradicional de contratos. Na resolução do problema entre principal e agente, o agente não pode ser exposto a riscos fora de seu controle para que os incentivos tenham os efeitos desejados.

O risco de um ativo i, representado por sua variância é:

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2 \cdot \sigma_m^2}_{Sistemático} + \underbrace{\sigma_e^2}_{Diversificável} \quad ... (8)$$

Onde:

β_i = covariância do retorno ativo i com o retorno do mercado, dividido pela variância do retorno do mercado;

σ_m^2 = variância do retorno do mercado;

σ_e^2 = variância dos resíduos.

O risco pode ser dividido em (i) risco sistemático, associado às flutuações do mercado e da economia e em (ii) risco diversificável, associado aos fatores internos da firma, que pode ser eliminado através da diversificação da carteira. Ou seja, um investidor é remunerado apenas pelo risco sistemático.

Foi visto anteriormente que os funcionários e executivos são inerentemente não diversificados, tendo grande parte de seu capital financeiro e humano aplicados na empresa. É justamente isso que promove os incentivos para que estes tomem medidas que maximizem o valor da firma Ou seja, é o risco idiossincrático o responsável pelos incentivos. Os pacotes de remuneração nos moldes atuais (com preço de exercício fixo) expõem o executivo a ambos os riscos, remunerando-o pelo retorno absoluto. A conseqüência deste fenômeno ao longo do *boom* da década de 90, segundo Johnson (1999), foram empresas que apresentaram desempenho abaixo do mercado e ao mesmo tempo seus executivos exerceram suas opções e obtiveram ganhos milionários. Ou seja, o foco em retorno absoluto faz com que no mercado em alta, administradores medíocres sejam generosamente remunerados. O efeito perverso também ocorre quando o mercado está em baixa, onde os administradores competentes cujas empresas tiveram desempenho relativamente melhor que o mercado ou o setor, vêem suas ESOs tornarem-se *out of the money*.

Tendo em vista o exposto, há que se perceber a importância do retorno relativo. Quase a totalidade das metodologias de avaliação de desempenho no mercado financeiro está baseada na avaliação relativa. Fundos de investimento ou ações, por exemplo, são considerados recomendáveis pelos analistas na medida em que seu desempenho supera o dos concorrentes. Falta, portanto, que o mercado de trabalho reconheça este modo de avaliação e incorpore este conceito aos pacotes de remuneração.

6.2
Opções Indexadas

A seção anterior apresentou o conceito de avaliação relativa de desempenho. Será apresentado agora um tipo de opção que pode pôr em prática a avaliação relativa, reforçando os incentivos e premiando de forma mais justa a meritocracia nas organizações. Trata-se da opção de compra indexada. Suas principais características contratuais são similares às das opções existentes com uma diferença fundamental: seu preço de exercício é atrelado a um índice de mercado ou setorial. Para Johnson e Tian (2000), esta ESO é eficiente na medida em que retira o componente sistemático dos pacotes de remuneração, premiando o administrador cuja empresa apresentar desempenho superior ao do mercado ou do setor. Por outro lado, quando o mercado está em baixa, o administrador capaz de amortecer os impactos negativos em sua empresa seguirá tendo ESOs *in the money.*

6.2.1
Prós e Contras

Uma opção com preço de exercício fixo é função da volatilidade sistemática e da idiossincrática. Uma opção indexada, por outro lado, elimina o componente sistemático da volatilidade, mantendo a parte idiossincrática. Para Johnson e Tian (2000), os incentivos mais fortes proporcionados pela ESO indexada estimulariam executivos avessos ao risco a adotar projetos mais arriscados e lucrativos. Ainda, um executivo decidindo entre dois projetos que diferem apenas em relação à correlação com o índice irá escolher o que possui menor correlação. Isso porque nesse caso a volatilidade idiossincrática será maior. Se o mercado remunera apenas o risco sistemático, então a escolha de projetos de baixa correlação com o índice terá efeitos positivos no valor da firma. Alternativamente, a escolha de projetos de investimento altamente correlacionados com o índice tenderá a diminuir o valor da empresa.

Dadas as vantagens deste modelo, porque então opções indexadas quase não são verificadas na prática? Algumas razões explicam este fenômeno. Primeiro, o valor de uma ESO indexada é inferior ao de uma ESO tradicional. Segundo, até 2004 nos EUA e na Europa e até 2008 no Brasil as ESOs outorgadas *at the money* com preço de exercício fixo não tinham custo contábil. As empresas, portanto, não tinham incentivo algum a emitir planos de opções com outros termos. Em terceiro lugar, a outorga de opções com preço de exercício fixo se alastrou tão amplamente no competitivo mercado de trabalho americano, que ficou difícil para uma empresa que deseja atrair os melhores talentos desviar desta tendência, tendo em vista o valor reduzido de uma ESO indexada. A alternativa para este problema seria outorgar um número maior de opções, de modo a manter o valor monetário total do pacote de remuneração constante. Surge aí, no entanto outro problema: o efeito diluição da participação acionária, pois neste caso os acionistas antigos provavelmente não estariam satisfeitos em ceder uma fatia maior de seu patrimônio aos administradores. Por fim, um dos principais motivos para a pouca utilização de ESOs indexadas pode ser a dificuldade de entendimento por parte das pessoas quanto ao valor deste instrumento financeiro, já que sua complexidade torna mais difícil o cálculo do valor justo para as empresas.

Johnson e Tian (2000) mencionam que o maior incentivo à adoção de projetos arriscados tenderia a aumentar os custos de agência dos credores com a empresa. Contudo, há que se lembrar que a estrutura de remuneração atual pode ter sido um dos fatores por levar o sistema financeiro norte-americano a tomar níveis de alavancagem recordes nos últimos anos. O altíssimo nível de risco culminou com a crise de inadimplência dos mutuários norte-americanos e por conseqüência levou as instituições financeiras daquele país à bancarrota. Neste sentido, ESOs indexadas introduziriam uma melhora, pois tal sistema incentiva a adoção de projetos arriscados (pois o executivo seria remunerado apenas pelo risco específico da empresa) e também lucrativos, maximizando o valor da empresa.

Por fim, o argumento de que os executivos vêm sendo remunerados de forma excessiva pode estar correto. Neste sentido, no objetivo de reduzir os valores dos pacotes de remuneração, as ESOs indexadas são uma alternativa interessante. E, ainda que o objetivo não seja reduzir os valores totais dos pacotes, esta modalidade de opção pode servir como complemento na composição mais eficiente de tais pacotes (i.e. na distribuição entre salário fixo, bônus, ações ou opções).

6.2.2
Metodologia de apreçamento – Margrabe (1978)

Todos os modelos a serem apresentados neste capítulo têm como ponto de partida o argumento utilizado por Margrabe (1978). Em seu artigo o autor buscou uma solução analítica para apreçar a opção européia de troca de um ativo por outro.

6.2.2.1
Formulação da equação diferencial parcial

Seja $C(S,H,t)$ uma opção para trocar o ativo *H* pelo ativo *S*. Seja ainda uma carteira composta por m_1 unidades de *S*, m_2 unidades de *H* e uma unidade da opção. Esta carteira π pode ser expressa como:

$$\pi = m_1 \cdot S + m_2 \cdot H + C \text{ ... (9)}$$

A variação no valor desta carteira em um instante de tempo infinitesimal é:

$$d\pi = m_1 \cdot dS + m_2 \cdot dH + dC \text{ ... (10)}$$

Suponha que as quantidades de *S* e *H* são escolhidas de tal forma a eliminar o risco desta carteira. Com isso, seu retorno é determinado pela taxa livre de risco, *r*:

$$d\pi = r \cdot \pi \cdot dt = m_1 \cdot dS + m_2 \cdot dH + dC \text{ ... (11)}$$

Os processos estocásticos que definem *S* e *H* são movimentos geométricos brownianos correlacionados.

Ativo *S*: $$\frac{dS}{S} = (\mu_S - q_S)dt + \sigma_S dz_S \text{ ... (12)}$$

Ativo *H*: $$\frac{dH}{H} = (\mu_H - q_H)dt + \sigma_H dz_H \text{ ... (13)}$$

Correlação entre *S* e *H*: $dz_S dz_H = \rho dt$

Onde:

S = valor da ação a ser obtida;

H = valor da ação a ser trocada (análogo ao preço de exercício);

dz_S = processo de Wiener para *S*;

dz_H = processo de Wiener para *H*;

ρ = coeficiente de correlação entre os processos de Wiener;

q_S = *dividend yield* de *S*;

q_H = *dividend yield* de *H*;

μ_S = retorno esperado de *S*;

μ_H = retorno esperado de *H*;

σ_S = volatilidade instantânea de *S*;

σ_H = volatilidade instantânea de *H*.

Apenas para fins de simplificação, suponha que o *dividend yield* de *S* e *H* sejam iguais a zero, i.e., $q_S = q_H = 0$. Pelo lema de Itô o diferencial do valor da opção de troca é:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial C}{\partial H} \cdot dH + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot dS^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial H^2} \cdot dH^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial H} dSdH \ldots \tag{14}$$

Encontrando os valores de dS, $(dS)^2$, dH, $(dH)^2$ e $dS \cdot dH$ e substituindo na equação 14, chega-se à seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial C}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial C}{\partial H} \cdot dH + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot dS^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial H^2} \cdot dH^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial H} \cdot dSdH \right] = \ldots$$
$$= m_1 \cdot dS + m_2 \cdot dH \tag{15}$$

Para Margrabe, a carteira π pode ser totalmente *hedgeada*, de modo que seu retorno no instante de tempo infinitesimal de tempo seja zero. Este *hedge* é feito da seguinte forma:

- Vendendo: m_1 unidades de S;
- Comprando: $-m_2$ unidades de H.

Isso é:

$$dC - m_1 \cdot dS - m_2 \cdot dH = 0 \ldots (16)$$

Voltando à equação (15):

$$\underbrace{\left[\frac{\partial C}{\partial S} - m_1\right] \cdot dS + \left[\frac{\partial C}{\partial H} - m_2\right] \cdot dH}_{Estocástico} + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \\ \underbrace{+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot S^2 \cdot \sigma_S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial H^2} \cdot H^2 \cdot \sigma_H^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial H} \cdot S \cdot H \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H \cdot \rho\right] \cdot dt}_{Determinístico} \ldots (17)$$

De modo a eliminar a parte estocástica desta equação diferencial (e, por conseguinte eliminar o risco), basta escolher $m_1 = \frac{\partial C}{\partial S}$ e $m_2 = \frac{\partial C}{\partial H}$. Este é o delta *hedge* e sua interpretação é análoga ao caso mais simples do modelo Black e Scholes (1973). Para que a carteira seja mantida sem risco a cada período, m_1 e m_2 devem ser re-balanceados com os novos valores para os processos estocásticos observados. Com isso, chega-se à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot S^2 \cdot \sigma_S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial H^2} \cdot H^2 \cdot \sigma_H^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial H} \cdot S \cdot H \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H \cdot \rho\right] = 0 \ldots (18)$$

Esta equação está sujeita às seguintes condições de contorno:

$C(S, H, T) = máx\{S_T - H_T, 0\}$, política de exercício na maturidade.

$0 \le C(S, H, t) \le S$, o valor da opção não pode valer mais que o ativo a ser trocado.

6.2.2.2
Solução encontrada

Um dos *insights* mais importantes de Margrabe em seu artigo é a definição de um novo ativo, x, um numerário, definido como $x \equiv \frac{S}{H}$. O valor da opção de troca passa a ser função de $C\left(\frac{S}{H}, 1, t\right)$. Intuitivamente, este truque define um novo processo estocástico para o valor da ação, normalizando-o pelo ativo H. Com isso, o preço de exercício normalizado é igual a 1.

Essa transformação faz com que o problema volte a ter apenas uma dimensão. Assim, é possível utilizar a fórmula de Black e Scholes (1973). Tendo em vista que a taxa de juros em unidades de H é nula em um mercado perfeito, o valor normalizado da opção é representado por:

$$\frac{C(S,H,t)}{H} = x \cdot N(d_1^{MAR}) - 1 \cdot N(d_2^{MAR}) \ldots (19)$$

O valor final é:

$$C^{MAR}(S,H,t) = S_t \cdot N(d_1^{MAR}) - H_t \cdot N(d_2^{MAR}) \ldots (20)$$

Onde:

$$d_1^{MAR} = \frac{\ln\left(S/H\right) + 1/2 \cdot \sigma_{S,H}^2 \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}};$$

$$d_2^{MAR} = d_1^{MAR} - \sigma_{S,H}\sqrt{T-t};$$

$$\sigma_{S,H}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_H^2 - 2 \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H \cdot \rho \ \ldots (21)$$

6.2.3
ESO indexada européia – Johnson e Tian (2000)

Neste modelo, tanto a ação quanto o índice seguem movimentos geométricos brownianos:

Preço da ação: $$\frac{dS}{S} = (\mu_S - q_S)dt + \sigma_S dz_S \text{ ... (22)}$$

Índice: $$\frac{dI}{I} = (\mu_I - q_I)dt + \sigma_I dz_I \text{ ... (23)}$$

Correlação entre *S* e *I*: $dz_S dz_I = \rho dt$

Onde:

S = valor da ação;

I = valor do índice;

dz_S = processo de Wiener para a ação;

dz_I = processo de Wiener para o índice;

ρ = coeficiente de correlação entre os processos de Wiener;

q_S = *dividend yield* da ação;

q_I = *dividend yield* do índice;

σ_S = volatilidade instantânea da ação;

σ_I = volatilidade instantânea do índice;

μ_S = retorno esperado da ação;

μ_I = retorno esperado do índice.

O objetivo desta opção é remunerar o executivo apenas pelo retorno específico da firma. Neste contexto, seja o excesso de retorno da firma definido por:

$$\alpha = \mu_S - r - \beta(\mu_I - r) \ldots (\ 24\ )$$

$$\text{Onde } \beta = \rho(\sigma_S / \sigma_I) \ldots (\ 25\ )$$

De acordo com os autores, ainda que a definição do β seja idêntica à do *Capital Assets Pricing Model* (“CAPM”), o modelo aqui proposto é baseado na teoria de incentivos. Contudo, se o índice escolhido for o de mercado, a intuição através do CAPM é útil, contanto que se perceba que enquanto no CAPM os investidores são remunerados apenas pelo risco sistemático, no modelo aqui proposto este risco está sendo filtrado completamente – os investidores são remunerados apenas pelo risco idiossincrático. Neste sentido, o excesso de retorno deve ser nulo.

$$E(S_t | I_t, \alpha = 0) \ldots (\ 26\ )$$

O *payoff* a ser recebido pelo executivo no momento do exercício é dado pela diferença entre o valor a vista da ação e o valor esperado da ação condicional ao desempenho do índice, conforme apresentado a seguir:

$$Payoff = máx\{S_t - E(S_t | I_t), 0\} \ldots (\ 27\ )$$

Ou seja, o *payoff* é filtrado pelo desempenho do mercado, e refere-se apenas ao desempenho específico da firma.

Se definirmos um novo processo estocástico $F = S_t / I_t^{\beta}$, seu movimento será dado por:

$$\frac{dF}{F} = \alpha_F \cdot dt + \sigma_F \cdot dz_F \ldots (\ 28\ )$$

O valor esperado de S_t dado I_t segue uma distribuição lognormal com a seguinte média:

$$E(F_t) = F_0 \cdot e^{\alpha_F \cdot t} \Rightarrow E\left(S_t \big/ I_t^{\beta} \right) = \left(S_0 \big/ I_0^{\beta} \right) \cdot e^{\alpha_F \cdot t} \text{ ... (29)}$$

$$\Rightarrow E(S_t | I_t, \alpha = 0) = S_0 \cdot \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^{\beta} \cdot e^{\eta \cdot t} \equiv H_t \text{ ... (30)}$$

$$\text{Onde: } \eta = \alpha_F = (r - q_S) - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2}\rho\sigma_S\sigma_I(1-\beta) \text{ ... (31)}$$

A variável H_t é definida como uma ação “referência” (*benchmark*) cujo valor acompanha a evolução do índice. O resultado para η sai do lema de Itô para o processo estocástico $F = S_t \big/ I_t^{\beta}$.

O autor incluiu ainda um parâmetro λ que define o *moneyness* da opção, isso é:

- $\lambda > 1$: a opção é inicialmente outorgada *out of the money*;
- $\lambda < 1$: a opção é inicialmente outorgada *in the money;*
- $\lambda = 1$: a opção é inicialmente outorgada *at the money.*

Sendo assim:

$$E(S_t | I_t, \alpha = 0) = \lambda \cdot S_0 \cdot \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^{\beta} \cdot e^{\eta \cdot t} \equiv H_t \text{ ... (32)}$$

Como na maior parte das vezes as empresas outorgam opções com preço de exercício igual ao valor cotado em bolsa da ação na data-base, normalmente $\lambda = 1$. O modelo, no entanto, permite flexibilidade para outras políticas de outorga.

Uma opção de compra indexada só estará passível de exercício na medida em que o preço da ação (S_t) for superior ao da ação referência (H_t). Sendo assim, seu valor na maturidade é representado por:

$$C_T = máx\{S_T - H_T, 0\} \text{ ... (33)}$$

A avaliação desta opção está sendo feita em um mundo neutro ao risco. Os processos estocásticos de S e I passam a ser:

Preço da ação: $$\frac{dS}{S} = (r - q_S)dt + \sigma_S dz_S \text{ ... (34)}$$

Índice: $$\frac{dI}{I} = (r - q_I)dt + \sigma_I dz_I \text{ ... (35)}$$

Em ambos os casos, os retornos esperados μ_S e μ_I são substituídos pela remuneração da taxa livre de risco, *r*. Uma hipótese deste modelo é que o índice *I* é um ativo diretamente transacionado no mercado ou perfeitamente correlacionado com um ativo transacionado. De acordo com os autores, esta hipótese é razoável uma vez que o candidato a ser escolhido é um índice de ações, como por exemplo, o S&P 500 ou o Ibovespa.

Para utilizar a fórmula de Margrabe, é necessário antes determinar o processo estocástico de H_t. Pelo lema de Itô vê-se que:

$$\frac{dH}{H} = (r - q_S)dt + \rho\sigma_S dz_I \text{ ... (36)}$$

O ativo referência H_t possui retorno esperado igual ao de S_t $(r - q_S)$, mas sua volatilidade é ajustada para a correlação entre *S* e *I*. Por fim, aplicando a fórmula de Margrabe, o valor da opção no período t é:

$$C_t^{JT} = e^{-q_S\tau} \cdot [S_t N(d_1^{JT}) - H_t N(d_2^{JT})] \text{ ... (37)}$$

Onde:

$$d_1^{JT} = \frac{\ln(S_t / H_t) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_a^2 \cdot \tau}{\sigma_a \cdot \sqrt{\tau}};$$

$d_2^{JT} \quad = d_1^{JT} - \sigma_a \cdot \sqrt{\tau}$;

$\sigma_a^2 \quad = \sigma_S^2 \cdot (1-\rho^2)$... (38) (volatilidade conjunta de S e H, demonstrada no Anexo)

Para os autores, o modelo desenvolvido apresenta três diferenças principais em relação ao modelo de Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Primeiro, o preço de exercício dinâmico H_t filtra fatores que normalmente estão fora do controle do executivo, possibilitando a essa opção ter maior eficiência (apud Holmstrom (1982)). Em segundo lugar, nos termos d_1 e d_2 não há a presença dos parâmetros $(r-q)$, pois o valor da opção depende da diferença entre o valor da ação e do ativo referência. Como ambos crescem à mesma taxa livre de risco e *dividend yields*, a opção não possui valor simplesmente se o preço da ação está subindo no mercado. É necessário que o preço cresça mais que o índice. A terceira diferença refere-se à volatilidade σ_a que apresenta valores menores que a volatilidade da ação (σ_S) se a correlação for diferente de zero. Isso se deve à filtragem que este modelo faz do risco sistemático que o executivo é incapaz de impactar com suas ações. Quanto maior a correlação (ρ), maior a porção do risco sistemático e menor a porção do risco específico de firma, de modo que o valor da opção decrescerá. Sendo assim, a opção atinge valor máximo quando $\rho = 0$.

6.2.4
ESO indexada americana – Modelo binomial indexado

A seção anterior apresentou um modelo de apreçamento cujo resultado é uma solução analítica para uma opção indexada européia. Ocorre que, conforme visto no início deste trabalho, a maior parte das opções outorgadas a executivos possuem um prazo de carência a partir do qual esta se torna exercível. Após o fim da carência a ESO passa a ser americana.

Pelo fato de não haver solução analítica para avaliar uma opção americana que pague dividendos, é necessário aplicar um método numérico. Devido a sua fácil implementação, o método escolhido foi o da árvore binomial. Azevedo e

Barbachan (2004) apresentam em seu artigo um método para avaliação de opções com preço de exercício estocástico em uma árvore binomial. Este modelo, com algumas modificações efetuadas neste trabalho, serviu como base para apreçar ESOs indexadas americanas.

Pelo fato de haver dois processos estocásticos (um para a ação e outro para o índice), a condição na maturidade é a mesma da opção européia:

$$C_T = máx\{S_T - H_T, 0\}$$

Este problema apresenta uma importante questão a ser resolvida: a dimensionalidade. A figura abaixo apresenta a dinâmica dos preços de S_t e H_t:

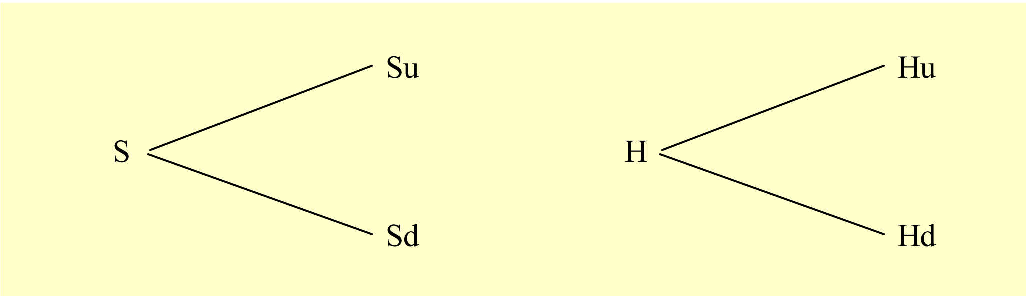

Figura 10 - Dinâmica do preço da ação (S) e do ativo referência (H)
Observação: Fator de subida = u, fator de descida = d.

Ao final do primeiro período há quatro combinações possíveis: SuHu, SuHd, SdHu, SdHd. Para calcular corretamente o valor da opção seria necessário construir quatro árvores distintas. De modo a contornar este empecilho, Azevedo e Barbachan (2004) utilizaram a técnica do numerário, também empregada por Margrabe (1978). O problema passa a ser representado da seguinte forma.

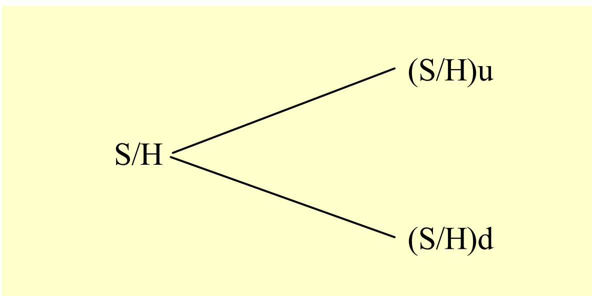

Figura 11 - Dinâmica do numerário

A condição de contorno passa a ser:

$$C_T = H_T \cdot máx\left\{\left(\frac{S}{H}\right)_T - 1{,}0\right\} \ldots (39)$$

Fazendo isso, é possível tratar o problema de modo semelhante ao de Cox, Ross e Rubinstein (1979). A seguinte igualdade mostra que a probabilidade, p^*, é uma medida equivalente de martingale:

$$\begin{aligned} &\frac{S_t}{H_t} = p^* \cdot u \cdot \frac{S_t}{H_t} + (1-p^*) \cdot d \cdot \frac{S_t}{H_t} \Rightarrow x_t = p^* \cdot x^u_{t+\Delta t} + (1-p^*) \cdot x^d_{t+\Delta t} \\ &\Rightarrow x_t = E^{p^*}\left[x_{t+\Delta}\middle|\Omega_t\right] \end{aligned} \ldots (40)$$

Onde:

Ω_t = Conjunto de informações disponíveis até o instante *t*.

Seguindo o mesmo argumento da seção anterior, tanto S_t quanto H_t seguem movimentos geométricos brownianos com tendência igual a $(r - q_s)$. O modelo de Avevedo e Barbachan (2004) foi desenvolvido para ativos com *dividend yields* diferentes. Como nesse caso tais taxas são idênticas, seja $q = q_S$ para simplificar a notação. Essa é a primeira modificação efetuada neste trabalho em relação ao modelo apresentado pelos autores. O valor da opção no estado de subida e descida é de:

$$C_u = H_u \cdot máx\left\{u\left(\frac{S}{H}\right) - 1{,}0\right\} = H_u \cdot R_u \ldots (41)$$

$$C_d = H_d \cdot máx\left\{d\left(\frac{S}{H}\right) - 1{,}0\right\} = H_d \cdot R_d \ldots (42)$$

O fator *R* pode ser interpretado como o retorno normalizado da opção. Os passos subseqüentes, apresentados no Anexo, resultam na seguinte expressão para o valor da opção:

Européia: $$C_t^{BI} = \begin{cases} H_t \cdot e^{-q\cdot\Delta t} \cdot \left[R_u \cdot p^* + R_d \cdot (1-p^*)\right]; t < T \\ H_t \cdot máx\left\{\left(\dfrac{S}{H}\right)_t - 1{,}0\right\}; t = T \end{cases} \quad \ldots (43)$$

Americana: $$C_t^{BI} = \begin{cases} H_t \cdot máx\left\{\dfrac{S}{H} - 1, e^{-q\cdot\Delta t} \cdot \left[R_u \cdot p^* + R_d \cdot (1-p^*)\right]\right\}; t < T \\ H_t \cdot máx\left\{\left(\dfrac{S}{H}\right)_t - 1{,}0\right\}; t = T \end{cases} \quad \ldots (44)$$

A segunda modificação encontra-se na medida equivalente de martingale. Da equação (40):

$$\frac{S_t}{H_t} = p^* \cdot u \cdot \frac{S_t}{H_t} + (1-p^*) \cdot d \cdot \frac{S_t}{H_t} \Rightarrow 1 = p^* \cdot u + (1-p^*) \cdot d \Rightarrow p^* = \frac{1-d}{u-d} \quad \ldots (45)$$

A intuição desta probabilidade é simples: como ambos os processos estocásticos apresentam termo de tendência idêntico, a opção não é remunerada pelo risco sistemático. Sendo assim, a probabilidade também não deve considerar tais riscos (para maiores detalhes, vide demonstração no Anexo)

Por fim, de maneira que a árvore recombine, os fatores de subida (u) e descida (d) são calculados da seguinte maneira:

$$u = e^{\sigma_a \cdot \sqrt{\Delta t}}, \text{ onde } d = 1/u.$$

A volatilidade do ativo numerário leva em consideração a correlação entre os processos estocásticos de S e I de forma análoga à apresentada na equação (38) isso é:

$$\sigma_a^2 = \sigma_S^2 \cdot (1-\rho^2)$$

No presente trabalho, o modelo apresentado por Azevedo e Barbachan (2004) sofreu ainda duas modificações adicionais de modo a considerar as seguintes particularidades dos planos de opções: período de carência e cancelamento. Estas modificações foram feitas com base no artigo de Hull e White (2004). O modelo final será apresentado a seguir.

6.2.4.1
Algoritmo do modelo binomial indexado

Sendo $R_t = \dfrac{C_t^{BI}}{H_t}$ o valor normalizado da opção:

- Se a opção ainda se encontra no período de carência ($t < v$):

$$R_t = \underbrace{(1-\omega\cdot\Delta t)\cdot e^{-q\cdot\Delta t}\cdot\left[R_{t+1,u}\cdot p^* + R_{t+1,d}\cdot(1-p^*)\right]}_{\text{FUNCIONÁRIOS QUE PERMANECEM NÃO EXERCEM}} \ldots (46)$$

- Se o período de carência terminou ($t > v$):

$$R_t = máx\left\{\begin{array}{l}\underbrace{\left(\dfrac{S}{H}\right)_t - 1}_{\text{TODOS EXERCEM}} \;;\underbrace{(1-\omega\cdot\Delta t)\cdot e^{-q\cdot\Delta t}\cdot\left[R_{t+1,u}\cdot p^* + R_{t+1,d}\cdot(1-p^*)\right]}_{\text{FUNCIONÁRIOS QUE PERMANECEM NÃO EXERCEM}} + \\ + \quad \underbrace{\omega\cdot\Delta t\cdot máx\left\{\left(\dfrac{S}{H}\right)_t - 1{,}0\right\}}_{\text{FUNCIONÁRIOS DESLIGADOS EXERCEM}}\end{array}\right\} \ldots (47)$$

O primeiro argumento da função define o exercício imediato da opção pelo valor intrínseco do numerário. A primeira parcela do segundo argumento refere-se à proporção dos funcionários que permanece na empresa $(1-\omega\cdot\Delta t)$; para estes indivíduos ainda não é ótimo exercer suas opções. Por outro lado, a segunda parcela define a proporção dos que exerceram suas opções por conta de demissões, abandono ou falecimento $(\omega\cdot\Delta t)$.

- Por fim, na maturidade ($t=T$):

$$R_T = máx\left\{\left(\frac{S}{H}\right)_T - 1{,}0\right\} \ldots (48)$$

O modelo funciona de modo idêntico ao de Cox, Ross e Rubinstein (1979), i.e. utiliza o método de *backwardation*, iniciando do passo final e voltando pela árvore até atingir o passo inicial. Sendo assim, o valor final da opção em t é representado por:

$$C_t^{BI} = H_t \cdot R_t \ldots (49)$$

Esta expressão representa a volta do numerário de modo que o valor da opção seja expresso em unidades monetárias.

6.2.5
Modelo binomial indexado estendido

A seção 0 apresentou o modelo de Johnson e Tian (2000) para apreçamento de opções indexadas européias. Subseqüentemente, em 0, foi utilizado o argumento destes autores no modelo binomial de Azevedo e Barbachan (2004) para chegar ao modelo de apreçamento de ESOs indexadas americanas. Esta seção é uma continuação onde será apresentada outra contribuição deste trabalho para a literatura acerca do tema: será feita uma extensão do modelo binomial indexado, ao considerar a política de exercício sub-ótima dos funcionários e executivos. Esta extensão é também feita com base no modelo de Hull e White (2004) apresentado na seção 5.3.

6.2.5.1
Política de exercício

Um dos pontos mais controversos na literatura relativa à ESOs é a política de exercício ótima. Isso porque a impossibilidade de *hedge* ou necessidades individuais de liquidez podem levar o titular a exercer a ESO antes do ótimo.

Os modelos de apreçamento atualmente utilizados pelas empresas não levam esta característica em consideração e, portanto estimativas imprecisas podem estar sendo feitas. Hull e White (2004) apresentaram uma alternativa de fácil implementação para este problema: a introdução de um múltiplo M que define a política de exercício. Este múltiplo pode ser interpretado como sendo um gatilho sub-ótimo e subjetivo que define o exercício. Este ponto é inclusive reconhecido na deliberação CVM N° 562 de 17 de dezembro de 2008:

> (...) A experiência pode indicar que os empregados tendem a exercer as opções quando o preço das ações atinge um nível específico acima do preço de exercício.[9]

A citação anterior mostra que a CVM reconhece a existência de um múltiplo que define a política de exercício. A deliberação prevê ainda que este múltiplo varie de acordo com o nível hierárquico do indivíduo:

> (...) Por exemplo, a experiência pode indicar que os empregados de nível mais elevado tendem a exercer as opções mais tarde em relação aos de níveis mais baixos (...)[10]

As passagens apresentadas anteriormente indicam que o modelo binomial indexado estendido encontra-se em linha com os entendimentos e recomendações descritos na norma contábil brasileira.

6.2.5.2
Algoritmo do modelo binomial indexado estendido

Será apresentado agora o algoritmo que define o modelo binomial estendido, proposto nesse trabalho. A notação utilizada aqui é igual a da seção anterior.

- Se a opção ainda se encontra no período de carência ($t < v$):

$$R_t = (1 - \omega \cdot \Delta t) \cdot e^{-q \cdot \Delta t} \cdot \left[R_{t+1,u} \cdot p^* + R_{t+1,d} \cdot (1 - p^*) \right] \ldots \; (50)$$

Note que esta expressão é equivalente à equação (46). No período de carência os modelos se comportam da mesma maneira, por não ser permitido o exercício.

9 Deliberação CVM N° 562, página 24.
10 Deliberação CVM N° 562, página 24.

- Se o período de carência terminou, mas o múltiplo ainda não foi alcançado ($t > v$ e $\left(S/H\right)_t < M$):

$$R_t = \underbrace{(1-\omega\cdot\Delta t)\cdot e^{-q\cdot\Delta t}\cdot\left[R_{t+1,u}\cdot p^* + R_{t+1,d}\cdot(1-p^*)\right]}_{\text{FUNCIONÁRIOS QUE PERMANECEM NÃO EXERCEM}} + \underbrace{\omega\cdot\Delta t\cdot máx\left\{\left(\frac{S}{H}\right)_t - 1{,}0\right\}}_{\text{FUNCIONÁRIOS DESLIGADOS EXERCEM}} \;\ldots$$

(51)

Repare que esta expressão é idêntica ao segundo argumento da equação (47). De maneira semelhante, a primeira parcela define a proporção dos indivíduos que permanecerá na empresa $(1-\omega\cdot\Delta t)$: estes não exercerão suas opções até que o múltiplo seja alcançado. Por outro lado, a segunda parcela captura a proporção dos que exercerão suas opções por conta de demissões, abandono ou falecimento $(\omega\cdot\Delta t)$.

- Se o período de carência terminou e o múltiplo foi alcançado ($t > v$ e $\left(S/H\right)_t > M$):

$$R_t = \left(\frac{S}{H}\right)_t - 1 \;\ldots\; (\ 52\ )$$

Neste caso, a ESO será exercida. Este termo também figura como o primeiro argumento da equação (47).

- Na maturidade (*t=T*), a equação (48) se aplica do mesmo modo:

$$R_T = máx\left\{\left(\frac{S}{H}\right)_T - 1{,}0\right\}$$

O valor da opção em qualquer instante *t* é também dado por:

$$C_t^{BIM} = H_t\cdot R_t \;\ldots\; (\ 53\ )$$

6.2.6
Estimação de parâmetros

Tendo apresentado os modelos foco de estudos deste trabalho, é necessário discutir a estimação dos parâmetros que servirão como *inputs*, já que se as empresas passarem a utilizá-los para apreçar seus planos de ações, será preciso estimar três variáveis: o coeficiente de correlação (ρ), a taxa de cancelamentos (ω) e o múltiplo (M).

6.2.6.1
Coeficiente de correlação (ρ)

Este parâmetro, que serve como base para obter β e σ_a, pode ser calculado tanto para índices de inflação, quanto para índices de mercado, através de séries históricas obtidas no mercado.

6.2.6.2
Taxa de cancelamentos (ω)

Esta taxa, que varia de empresa para empresa, pode ser calculada através de dados históricos mantidos pelo departamento de recursos humanos, por exemplo. Uma expressão simples que defina *e* pode ser:

$$\omega = \frac{\text{cancelamentos líquidos}}{\text{total em aberto}}$$

Importante notar que:

Cancelamentos líquidos = número de novas outorgas – número de ESOs canceladas

O denominador refere-se ao total de ESOs em aberto.

6.2.6.3
Múltiplo (M)

Este parâmetro, igualmente à taxa ω, pode ser estimado com base em dados históricos mantidos pela empresa. Na impossibilidade de dados históricos, uma alternativa seria a utilização de dados setoriais.

Uma importante limitação mencionada na descrição do modelo de Hull e White (2004), na seção 5.3, é o fato de o múltiplo M ser individual, de modo que a estimação com base em uma média histórica poderia ser imprecisa em alguns casos. Por outro lado, a estimação de M para cada funcionário seria uma tarefa grandiosa que certamente as corporações não estariam dispostas a efetuar.

Uma possibilidade não tão custosa e que aumentaria a precisão das estimativas seria a de estimar M para grupos de funcionários, conforme sugerido na deliberação CVM N° 562 de 17 de dezembro de 2008 e apresentado na seção 0. Desta forma a cada cargo seria atribuído um múltiplo. Adicionalmente, tais estimativas devem ser periodicamente atualizadas com os dados observados a fim de mantê-las de forma mais precisa possível.