10
Anexo

Este anexo apresenta a demonstração matemática completa desde o modelo de Johnson e Tian (2000) até o binomial indexado estendido.

10.1
Definição dos processos estocásticos

Defina os processos estocásticos para *S* e *I*:

Preço da ação: $$\frac{dS}{S} = (\mu_S - q_S)dt + \sigma_S dz_S \ldots (66)$$

Índice: $$\frac{dI}{I} = (\mu_I - q_I)dt + \sigma_I dz_I \ldots (67)$$

Correlação entre S e I: $$dz_S dz_I = \rho dt$$

Defina os retornos como: $Y_t = \ln\left(I_t / I_0 \right)$ e $X_t = \ln\left(S_t / S_0 \right)$, onde tanto X como Y têm distribuição normal com os seguintes parâmetros:

$X_t \sim N(b_I \cdot t, \sigma_I^2 \cdot t)$ e $Y_t \sim N(b_S \cdot t, \sigma_S^2 \cdot t)$,

Onde: $b_i = \mu_i - q_i - 1/2 \cdot \sigma_i^2$, para i = I, S.

10.2
Excesso de retorno

O excesso de retorno da ação S é dado por:

$$\mu_S = \alpha + r + \beta \cdot (\mu_I - r) \Rightarrow \alpha = \mu_S - r - \beta \cdot (\mu_I - r) \ldots (68)$$

$$\beta = \rho(\sigma_S / \sigma_I) \ldots (69)$$

Para remunerar o executivo apenas pelo desempenho específico da firma, temos que o retorno esperado da ação deve ser dado por $E[S_t | I_t, \alpha = 0]$. Ou seja, não há retorno em excesso.

10.3
Processo estocástico do derivativo (F)

Da estatística, o resultado para distribuições normais conjuntas é também uma distribuição normal com média igual a $m_S \cdot t + \beta(X_t - m_I \cdot t)$ e variância de $\sigma_S^2 \cdot (1-\rho^2) \cdot t$. Sendo assim, a variável condicional $S_t | I_t$ segue uma distribuição lognormal com média igual a:

$$E(S_t | I_t, \alpha = 0) = S_0 \cdot \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^{\beta} \cdot e^{\eta \cdot t} = H_t \ldots (70)$$

Onde: $\eta = (r - q_S) - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta) \ldots (71)$

Proposição: A variável η pode ser interpretada como sendo o termo de tendência (*drift*) do processo estocástico $F = \frac{S_t}{I_t^{\beta}}$.

Demonstração: No mundo neutro ao risco os processos estocásticos de S e I passam a ser representados pelas equações (30) e (31):

Preço da ação: $$\frac{dS}{S} = (r - q_S)dt + \sigma_S dz_S \text{ ... (34)}$$

Índice: $$\frac{dI}{I} = (r - q_I)dt + \sigma_I dz_I \text{ ... (35)}$$

Correlação entre S e I: $$dz_S dz_I = \rho dt$$

Defina o processo estocástico $F = \frac{S_t}{I_t^{\beta}}$. Pelo lema de Itô:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial F}{\partial I} \cdot dI + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \cdot dS^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} \cdot dI^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial I^2} \cdot dSdI \text{ ... (72)}$$

Temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{I^{\beta}}, \ \frac{\partial F}{\partial I} = -\frac{\beta \cdot S}{I^{\beta+1}}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} = \frac{\beta \cdot (\beta+1) \cdot S}{I^{\beta+2}} \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial I} = -\frac{\beta}{I^{\beta+1}}$$

Onde $dS^2 = S^2 \cdot \sigma_S^2 \cdot dz_S^2 = S^2 \cdot \sigma_S^2 \cdot dt$, $dI^2 = I^2 \cdot \sigma_I^2 \cdot dt$ e
$dSdI = S \cdot I \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho \cdot dt$

Substituindo as derivadas acima em (72):

$$dF = \frac{1}{I^{\beta}} \cdot \left[S(r - q_S)dt + S \cdot \sigma_S dz_S \right] - \frac{\beta \cdot S}{I^{\beta+1}} \cdot \left[I(r - q_I)dt + I \cdot \sigma_I dz_I \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta+1)}{I^{\beta+2}} \cdot S \cdot I^2 \cdot \sigma_I^2 \cdot dt - \frac{\beta}{I^{\beta+1}} \cdot S \cdot I \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho \cdot dt =$$
$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = (r - q_S)dt + \sigma_S \cdot dz_S - \beta(r - q_I)dt - \beta \cdot \sigma_I \cdot dz_I +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot \sigma_I^2 \cdot dt - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho \cdot dt$$

Por fim:

$$\frac{dF}{F} = \underbrace{\left[r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho \right]}_{\alpha_F} \cdot dt + \quad \text{... (73)}$$

$$+ \underbrace{\sigma_S \cdot dz_S - \beta \cdot \sigma_I \cdot dz_I}_{\sigma_F \cdot dz_F}$$

Onde:

$$\alpha_F = r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho =$$
$$= r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_I} \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho =$$
$$= r - q_S - \beta(r - q_I) + \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \beta \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_F = r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta) = \eta \quad \text{... (74)}$$

10.4
Definição do processo estocástico do preço de exercício

Qual processo estocástico segue o preço de exercício, *H*?

Temos que:

$$H_t = S_0 \cdot \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^{\beta} \cdot e^{\eta \cdot t}$$

Novamente, pelo lema de Itô:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial S} \cdot dH + \frac{\partial H}{\partial I} \cdot dI + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} \cdot dH^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} \cdot dH^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial I} \cdot dSdI \quad \text{... (75)}$$

Onde:

$\frac{\partial H}{\partial S} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\beta \cdot S_0}{I_0^{\beta}} \cdot I^{\beta-1} \cdot e^{\eta \cdot t}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} = 0$, $\frac{\partial^2 H}{\partial I^2} = \frac{\beta \cdot (\beta - 1) \cdot S_0}{I_0^{\beta}} \cdot I^{\beta-2} \cdot e^{\eta \cdot t}$ e

$\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial I} = 0$

Substituindo:

$$dH = \frac{\beta \cdot S_0}{I_0^{\beta}} \cdot I^{\beta-1} \cdot e^{\eta \cdot t}\left[I(r - q_I)dt + I \cdot \sigma_I \cdot dz_I\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta - 1) \cdot S_0}{I_0^{\beta}} \cdot I^{\beta-2} \cdot e^{\eta \cdot t}\left[I^2 \cdot \sigma_I^2 \cdot dt\right]$$

Simplificando esta expressão, chega-se à:

$$\frac{dH}{H} = \left[\beta \cdot (r - q_I) - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta)\right] \cdot dt + \rho \cdot \sigma_S \cdot dz_I \ldots (\ 76\ )$$

Neste ponto, é importante lembrar que:

$$\alpha_F = \eta = r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta)$$

Se $\alpha_F = 0$ (o que faz sentido, pois o termo de tendência deste derivativo é igual a zero, i.e., só há remuneração na medida em que o desempenho das ações da empresa superior ao do índice, então: $r - q_S = \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta)$.

Substituindo em (76), chega-se finalmente ao processo estocástico do preço de exercício:

$$\frac{dH}{H} = (r - q_S)dt + \rho\sigma_S dz_I \ldots (77\ )$$

Sendo assim, é possível ver que tanto *S* como *H* possuem o termo de tendência e *dividend yield* idênticos.

10.5
Volatilidade total

Esta seção demostra a volatilidade ajustada pela correlação.

Proposição: A volatilidade total é dada por $\sigma_a^2 = \sigma_S^2 \cdot (1-\rho^2)$

Demonstração: A variância conjunta de duas variáveis aleatórias S e H é dada por:

$$\sigma_a^2 = \sigma_S^2 + \sigma_H^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H$$

De (77) temos que $\sigma_H^2 = \rho^2 \cdot \sigma_S^2$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sigma_S^2 + \sigma_H^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H = \\ &= \sigma_S^2 + \rho^2 \cdot \sigma_S^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \rho \cdot \sigma_S = \\ &= \sigma_S^2 + \rho^2 \cdot \sigma_S^2 - 2 \cdot \rho^2 \cdot \sigma_S^2 = \\ &= \sigma_S^2 - \rho^2 \cdot \sigma_S^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_a^2 = \sigma_S^2 \cdot (1-\rho^2) \ldots (\ 78\ )$$

10.6
Modelo binomial para ESO indexada americana

Por simplicidade, seja $q_S = q$. Ainda, defina u como sendo o movimento de subida e d como o movimento de queda no preço do ativo base. O valor intrínseco da opção no momento do exercício é dado por:

$$
\begin{aligned}
C_u &= H_u \cdot máx\left(u \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)\\
C_d &= H_d \cdot máx\left(d \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots (\ 79\ )\\
C_{uu} &= H_{uu} \cdot máx\left(uu \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)\\
C_{dd} &= H_{dd} \cdot máx\left(dd \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)
\end{aligned}
$$

Defina ainda o retorno normalizado da opção como:

$$
\begin{aligned}
R_u &= máx\left(u \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)\\
R_d &= máx\left(d \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots (\ 80\ )\\
R_{uu} &= máx\left(uu \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)\\
R_{dd} &= máx\left(dd \cdot \frac{S}{H} - 1{,}0\right)
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
C_u &= H_u \cdot R_u\\
C_d &= H_d \cdot R_d\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \ldots (\ 81\ )\\
C_{uu} &= H_{uu} \cdot R_{uu}\\
C_{dd} &= H_{dd} \cdot R_{dd}
\end{aligned}
$$

Apenas por simplicidade, suponha que a opção tenha apenas dois períodos, onde o tempo *t=2* é a maturidade. Ainda, é fácil notar que $\frac{S_{uu}}{H_{uu}} = uu \cdot \left(\frac{S}{H}\right)$.

- *Em t=2:*

- movimento ascendente de S/H:

$$C_{uu} = m_S \cdot S_{uu} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{uu} \cdot (1+q) = \\ = m_S \cdot H_{uu} \cdot uu \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{uu} \cdot (1+q) \quad \text{... (82)}$$

Analogamente:

$$C_{du} = m_S \cdot S_{du} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{du} \cdot (1+q) = \\ = m_S \cdot H_{du} \cdot du \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{du} \cdot (1+q) \quad \text{... (83)}$$

Igualando (81) e (82):

$$C_{uu} = H_{uu} \cdot \left[m_S \cdot uu \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \right] = H_{uu} \cdot R_{uu}$$

$$\Rightarrow R_{uu} = m_S \cdot uu \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \text{... (84)}$$

$$C_{du} = H_{du} \cdot \left[m_S \cdot du \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \right] = H_{du} \cdot R_{du}$$

$$\Rightarrow R_{du} = m_S \cdot du \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \text{... (85)}$$

- movimento descendente de S/H:

Pensando de maneira análoga, chega-se às seguintes expressões:

$$\Rightarrow R_{ud} = m_S \cdot ud \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \text{... (86)}$$

$$\Rightarrow R_{dd} = m_S \cdot dd \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \text{... (87)}$$

Resolvendo (84) e (85):

$$R_{uu} - R_{ud} = m_S \cdot (1+q) \cdot \frac{S}{H} \cdot u \cdot (u-d) \Rightarrow m_S = \frac{R_{uu} - R_{ud}}{(1+q) \cdot \frac{S}{H} \cdot u \cdot (u-d)} \text{... (88)}$$

Este é o delta *hedge* da opção para o ativo básico S. Analogamente resolvendo (86) e (87), chega-se ao delta *hedge* do ativo referência:

$$m_H = \frac{u \cdot R_{ud} - d \cdot Ruu}{(1+q) \cdot (u-d)} \text{... (89)}$$

- *Em t=1:*

Conforme mencionado ao longo deste trabalho, o modelo binomial trabalha *backwards*, i.e., de trás para frente. Neste período o titular da opção pode escolher exercê-la imediatamente ou mantê-la por mais um período.

\- movimento ascendente de S/H:

$$C_u = máx\left[S_u - H_u, m_S \cdot S_u \cdot (1+q) + m_H \cdot H_u \cdot (1+q)\right] \text{... (90)}$$

\- movimento descendente de S/H:

$$C_d = máx\left[S_d - H_d, m_S \cdot S_d \cdot (1+q) + m_H \cdot H_d \cdot (1+q)\right] \text{... (91)}$$

Substituindo (88) e (89) em (90) e a opção não for exercida, chega-se a:

$$C_u = \frac{R_{uu} - R_{ud}}{(1+q) \cdot \frac{S}{H} \cdot u \cdot (u-d)} \cdot S_u \cdot (1+q) + \frac{u \cdot R_{ud} - d \cdot Ruu}{(1+q) \cdot (u-d)} \cdot H_u \cdot (1+q)$$

Manipulando esta expressão, o valor final da opção é:

$$C_u = H_u \cdot \left[\frac{R_{uu} \cdot \frac{1-d}{u-d} + R_{ud} \cdot \left(1 - \frac{1-d}{u-d}\right)}{1+q} \right] = H_u \cdot \left[\frac{R_{uu} \cdot p^* + R_{ud} \cdot (1-p^*)}{1+q} \right]$$

Analogamente:

$$C_d = H_d \cdot \left[\frac{R_{du} \cdot p^* + R_{dd} \cdot (1 - p^*)}{1 + q} \right].$$

Como na prática a opção é americana, a regra de decisão é a seguinte:

$$C^{BI}(S,H,t) = H_t \cdot máx \left[\frac{S_t}{H_t} - 1, \frac{R_u \cdot p^* + R_d \cdot (1 - p^*)}{1 + q} \right] \ldots (\ 92\ )$$

Utilizando retornos contínuos:

$$C^{BI}(S,H,t) = H_t \cdot máx \left\{ \frac{S_t}{H_t} - 1, e^{-q \cdot \Delta t} \left[R_u \cdot p^* + R_d \cdot (1 - p^*) \right] \right\} \ldots (\ 93\ )$$

A condição na maturidade é: $C^{BI}(S,H,T) = H_T \cdot máx \left[\frac{S_T}{H_T} - 1{,}0 \right] \ldots (\ 94\ )$

10.7
Modelo binomial para ESO indexada com múltiplo de exercício (modelo estendido)

Por fim, incorporando ao modelo da seção anterior o múltiplo M que define o exercício antecipado e uma taxa de cancelamentos e, é preciso apenas estender o algoritmo desenvolvido, conforme apresentado na seção 0.

10.8
Demonstração das equações da simulação de Monte Carlo

10.8.1
Simulação do preço da ação

Aplicando o lema de Itô para encontrar $d\ln(S_t)$:

$$d\ln(S_t) = \frac{1}{S_t}\left[S_t \cdot (r - q_S)\cdot dt + S_t \cdot \sigma_S \cdot dz_S\right] - \frac{1}{2\cdot S_t^2}(S_t^2\sigma_S^2 \cdot dt)$$
$$\Rightarrow d\ln(S_t) = \left(r - q_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\cdot dt + \sigma_S \cdot dz_S$$

Integrando ambos os lados:

$$\int_t^T d\ln(S_t) = \left(r - q_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\cdot \int_t^T dt + \sigma_S \cdot \int_t^T dz_S$$
$$\Rightarrow \ln(S_T) - \ln(S_t) = \left(r - q_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\cdot (T - t) + \sigma_S \cdot (z_{S,T} - z_{S,t})$$
$$\Rightarrow \ln(S_T) = \ln(S_t) + \left(r - q_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\cdot (T - t) + \sigma_S \cdot (z_{S,T} - z_{S,t})$$

Por fim:

$$\Rightarrow S_T = S_t \cdot e^{\left(r - q_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\cdot(T-t) + \sigma_S \cdot (z_{S,T} - z_{S,t})} \Rightarrow S_T = S_0 \cdot e^{\left(r - q_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\cdot T + \sigma_S \cdot z_{S,T}\cdot\sqrt{T}} \quad \ldots (95)$$

10.8.2
Simulação do ativo referência

Aplicando o lema de Itô para encontrar $d\ln(H_t)$:

$$d\ln(H_t) = \frac{1}{H_t}\left[H_t \cdot (r - q_S)\cdot dt + H_t \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot dz_I\right] - \frac{1}{2\cdot H_t^2}\left[H_t^2 \cdot (\rho\cdot\sigma_S)^2 \cdot dt\right]$$
$$\Rightarrow d\ln(H_t) = \left(r - q_S - \frac{(\rho\cdot\sigma_S)^2}{2}\right)\cdot dt + \rho\cdot\sigma_S \cdot dz_I$$

Integrando ambos os lados:

$$\int_t^T d\ln(H_t) = \left(r - q_S - \frac{(\rho \cdot \sigma_S)^2}{2}\right) \cdot \int_t^T dt + \rho \cdot \sigma_S \cdot \int_t^T dz_I$$

$$\Rightarrow \ln(H_T) - \ln(H_t) = \left(r - q_S - \frac{(\rho \cdot \sigma_S)^2}{2}\right) \cdot (T - t) + \rho \cdot \sigma_S \cdot (z_{I,T} - z_{I,t})$$

$$\Rightarrow \ln(H_T) = \ln(H_t) + \left(r - q_S - \frac{(\rho \cdot \sigma_S)^2}{2}\right) \cdot (T - t) + \rho \cdot \sigma_S \cdot (z_{I,T} - z_{I,t})$$

Por fim:

$$\Rightarrow H_T = H_t \cdot e^{\left(r - q_S - \frac{(\rho \cdot \sigma_S)^2}{2}\right) \cdot (T - t) + \rho \cdot \sigma_S \cdot (z_{I,T} - z_{I,t})}$$

$$\Rightarrow H_T = H_0 \cdot e^{\left(r - q_S - \frac{(\rho \cdot \sigma_S)^2}{2}\right) \cdot T + \rho \cdot \sigma_S \cdot z_{I,T} \cdot \sqrt{T}} \quad \text{... (96)}$$