3
A Construção das carteiras de investimento

3.1
A teoria das carteiras

Segundo Samanez (2006), a Carteira é uma combinação de ativos, como investimentos, ações, obrigações, commodities, imóveis, derivativos, títulos com liquidez, entre outros ativos nas quais uma pessoa física ou jurídica possam investir. A sua finalidade é reduzir o risco com a diversificação. Markowitz (1952) formalizou a idéia de diversificação e a aplicou a instrumentos financeiros, que posteriormente serviram de base para o desenvolvimento de modernas técnicas de quantificação do risco.

A idéia central da sua teoria consistia na premissa de que a decisão sobre a composição de uma carteira de investimentos está fundamentada no valor esperado e no desvio padrão dos retornos da carteira, e que deveria, portanto, contemplar um processo de minimização de risco. Desse modo, entende-se que um investimento ou ativo com risco domina outro quando, para um mesmo nível de risco, apresenta retorno esperado maior. De forma análoga, um investimento ou ativo de risco domina outro quando, para um mesmo nível de retorno esperado, apresente um risco inferior.

As carteiras que atendem a esse requisito foram denominadas por Markowitz de carteiras eficientes, e estas se situam na chamada *fronteira eficiente*. Ou seja, considere A, B e C ativos mutuamente exclusivos. Para um mesmo nível de risco, os ativos B e C apresentam retornos diferenciados, com r_B > r_C. Logo, o investidor racional irá escolher o ativo B. Quanto à escolha do ativo A em detrimento do ativo B, esta dependerá do nível de tolerância ao risco do investidor e retorno r_A, ficando apenas claro que, para riscos maiores, o investidor irá exigir ganhos maiores.

3.2
Retorno e variância de uma carteira

Em uma carteira com N ativos, podemos expressar o seu retorno através de uma média ponderada dos retornos de cada ativo individualmente. Atribuímos um peso Xi a cada ativo. Matematicamente, a expressão do retorno observado e do retorno esperado da carteira são dadas por:

$$Rc = \sum_{i=1}^{N} Xi\,.Ri \qquad (13)$$

$$\bar{R}c = \sum_{i=1}^{N} Xi.\bar{R}i \qquad (14)$$

Com base nestas duas equações, podemos calcular a variância para dois ativos:

$$\sigma^2 = E[Rc - \bar{R}c]^2 = X_1{}^2\sigma_1{}^2 + X_2{}^2\,\sigma_2{}^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} \qquad (15)$$

Onde:

σ_{12} é a covariância entre os ativos 1 e 2

σ_1 é a variância do ativo 1.

σ_2 é a variância do ativo 2

X_1 é a fração investida no ativo 1.

X_2 é a fração investida no ativo 2.

Para o caso geral de N ativos, a expressão ficaria:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} Xi^2\,\sigma i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{J=1;j\neq i}^{N} XiXj\,\sigma i,j \qquad (16)$$

3.3
A seleção da carteira ótima

Como vimos anteriormente que um investidor procura minimizar o risco para um dado retorno (ou maximizar o retorno para um dado risco), o processo de construção de uma carteira eficiente torna-se um problema de otimização matemática. Ou seja, queremos minimizar a variância da carteira, dado determinado nível de retorno. O problema pode assim ser expresso:

$$\text{Minimizar } \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} Xi^2\, \sigma i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{J=1;j\neq i}^{N} XiXj\, \sigma i,j \qquad (17)$$

Sujeito a:

$$\bar{R}c = \sum_{i=1}^{N} Xi\,.\bar{R}i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} Xi\ \right)Rf \qquad (18)$$

Onde $(1 - \sum_{i=1}^{N} Xi\ )Rf$ representa a fração não investida em ativos com risco, sendo Rf o retorno sem risco.

Este problema de otimização pode ser resolvido como um problema de otimização usando-se o operador Lagrangeano.

3.4 O modelo de índice único

Conforme visto anteriormente, o modelo de Markowitz para análise de carteiras envolve as correlações entre os pares de ativos. Este processo iria resultar em uma matriz de variâncias-covariâncias que iria demandar um razoável trabalho computacional.

Em vez disso, pode-se observar que a maioria das ações está de alguma forma ligada ao desempenho do mercado. Este fenômeno sugere que um dos motivos pelos quais os retornos das ações possam estar correlacionados seria uma resposta comum a movimentos de mercado. Poderíamos medir essa relação de cada ativo com o mercado através de uma equação linear, relacionando o desempenho da ação com um *Proxy* de mercado, um índice representativo das ações em uma Bolsa de Valores de mercado.

Este índice, no mercado de ações brasileiro, é dado pelo Ibovespa. Esta medotologia reduz drasticamente o número de parâmetros necessários e o tempo de execução computacional no processo de seleção da carteira ótima. Desse modo, o retorno de um ativo i pode ser colocado na forma de uma série temporal e descrito pela seguinte equação de regressão linear:

$$Ri,t = \alpha i + \beta i\, Rm,t + ei,t \tag{19}$$

Onde as seguintes premissas são acatadas:

I. O processo gerador de retornos de um ativo é descrito por uma equação de regressão linear que relaciona o retorno do título ao retorno de um índice de mercado.
II. O erro aleatório, ou seja, a componente da equação que independe do mercado, possui distribuição normal com média zero.
III. O erro aleatório de cada ativo não é correlacionado com o mercado.
IV. Os retornos dos ativos são correlacionados apenas com os retornos do mercado, expresso por um índice de mercado. Estatisticamente, significa que a covariância entre os erros aleatórios de qualquer par de ativos é zero, expresso no item (III).

Assim, considerando as premissas e o processo gerador de retornos de um ativo, a expressão para o retorno esperado de um ativo e sua variância, no contexto do Modelo de Índice Único seriam expressos por:

$$E[Ri] = \bar{R}i = E[\alpha i + \beta i\, Rm + ei] = \alpha i + \beta i\, \bar{R}m \tag{20}$$

$$\sigma^2 = E[(Ri - \bar{R}i)^2] = \beta i^2 \sigma i^2 + \sigma e,i^2 \tag{21}$$

$$\sigma i,j^2 = \beta i \beta j \sigma m^2 \tag{22}$$

Para uma carteira com N ativos, podemos expressar o retorno da carteira e a variância como:

$$\bar{R}c = \sum_{i=1}^{N} Xi\,.\bar{R}i \tag{23}$$

$$\sigma c^2 = \beta c^2 \sigma m^2 + \sigma ec^2 \tag{24}$$

Onde:

$\beta c = \sum_{i=1}^{N} Xi\beta i$, é o beta da carteira

$\sigma ec^2 = \sum_{i=1}^{N} Xi^2\,\sigma ei^2$ é o risco diversificável da carteira.

Para estimação do beta para cada ativo individualmente, usamos os dados históricos, pois há suposições de que os betas históricos contêm informações dos betas futuros. Para estima-lo, faremos uso de ferramental estatístico. Dada a seguinte expressão para o retorno de um ativo:

$$Ri,t = \alpha i + \beta i\, Rm,t + ei,t \qquad (25)$$

O beta é o coeficiente angular da regressão, mas estatisticamente é a covariância entre os retornos da carteira e do mercado, dividido pela variância da carteira de mercado:

$$\beta i = \frac{Cov[Ri,t\ ,Rm,t]}{\sigma m^2} = \frac{\sigma i,m}{\sigma m^2} \qquad (26)$$

E, para o cálculo do αi, usamos:

$$\alpha i = \bar{R}i,t - \beta i\, \bar{R}m,t \qquad (27)$$

Onde $\bar{R}i,t$ é o retorno médio do ativo i e $\bar{R}m,t$ é o retorno médio do mercado no período t.

Obs: O Modelo de Índice Único simplifica os cálculos e reduz o número de parâmetros necessários. Contudo, esta simplificação supõe que os retornos dos títulos subam ou desçam exclusivamente pela sua relação com o mercado, e que o erro aleatório da regressão independe dos retornos da carteira de mercado.

3.5
A seleção da carteira ótima no contexto do modelo de índice único

Conforme mencionamos anteriormente, otimizar a carteira significa minimizar o risco para um dado retorno proposto. Mencionamos também que o portfólio seria composto de uma combinação de ativos com risco, ponderando-se o risco individual de cada ativo com a proporção que cada um ocupa na carteira, adicionando-se os ativos sem risco e a sua ponderação de forma análoga. Adicionalmente, estamos incluindo mais uma restrição, que proíbe a venda a descoberto. Formalizando-se o problema, temos:

$$\text{Minimizar } \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} Xi^2\, \sigma i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{J=1;\, j\neq i}^{N} XiXj\, \sigma i,j \qquad (28)$$

Sujeito a:

$$\bar{R}c = \sum_{i=1}^{N} Xi\,.\bar{R}i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} Xi\right)Rf \qquad (29)$$

$$Xi \geq 0 \text{ , para } i = 1,2,\dots N$$

A resolução deste problema foi proposta por Elton, Gruber & Padberg (1976), resultando nas seguintes frações ótimas:

$$yi = \frac{\beta i}{\sigma e,i^2}\left[\left(\frac{R}{V}\right)i - Ci\right] \qquad (30)$$

onde

$$Ci = \frac{\sigma m^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{(\bar{R}j - Rf)\beta j}{\sigma e,j^2}}{1 + \sigma m^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{\beta j^2}{\sigma e,j^2}} \qquad (31)$$

$$\left(\frac{R}{V}\right)i = \frac{\bar{R}i - Rf}{\beta i} \qquad (32)$$

O processo de otimização consiste nas seguintes etapas:

I. Ordenar os títulos em ordem decrescente de $\left(\frac{R}{V}\right)i$

II. Para cada título i, calcula-se o valor Ci, onde o cálculo de C_1 inclui unicamente o título com mais alto $\left(\frac{R}{V}\right)$, o cálculo de C_2 inclui unicamente os dois títulos com mais alto $\left(\frac{R}{V}\right)$, e assim por diante.

III. Comparar todos os $\left(\frac{R}{V}\right) i$ com os respectivos Ci, identificando-se um Ci tal que os títulos inclusos em seu cálculo tenham $\left(\frac{R}{V}\right) i > Ci$, e todos os não inclusos tenham $\left(\frac{R}{V}\right) i < Ci$. O Ci com essa propriedade denominaremos de taxa de corte $C*$.

IV. Todos os títulos com $\left(\frac{R}{V}\right) i < C*$ terão frações zero.

V. A fração ótima dos títulos que não tiverem fração zero será calculada da seguinte forma:

$$yi = \frac{\beta i}{\sigma i^2} \left[\frac{\bar{R}i - Rf}{\beta i} - C* \right], \text{ para } i = 1, 2, \ldots N \quad (33)$$

VI. Para satisfazer $\sum_{i=1}^{N} Xi = 1$, as frações ótimas serão calculadas como se segue:

$$Xi = \frac{yi}{\sum_{i=1}^{N} yi}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots N \quad (34)$$

3.6
Uso da medida ômega para montar uma carteira otimizada de ativos

Conforme mostrado no capítulo anterior, o investidor racional sempre busca otimizar o seu retorno para determinado nível de risco, ou minimizar o seu risco para um dado retorno. A fronteira eficiente, descrita por Markowitz, seria descrito como um conjunto possível de carteiras, sendo cada ponto da curva uma relação otimizada entre risco e retorno.

Contudo, embora a teoria clássica de investimentos seja considerada de fácil aplicação e matematicamente eficiente na composição das carteiras, as premissas consideradas na teoria não correspondem à realidade. Os retornos dos ativos apresentam distribuições não normais, conforme veremos nos capítulos posteriores de elaboração e análise das carteiras.

Em face disso, alguns autores vêem propondo o uso de medidas de risco-retorno com mais consistência em relação à distribuição observada. Keating e Shadwick (2002) propuseram uma medida de performance que considerasse o formato da distribuição de retornos dos ativos na composição da carteira para avaliar seu risco.

De acordo com a teoria apresentada anteriormente, o risco da carteira é considerado como o desvio padrão de uma série de resultados esperados, sejam eles ganhos ou perdas, para um determinado nível de confiança. Para uma avaliação da performance de uma carteira, são conhecidas algumas estatísticas para avaliação do desempenho, como os indicadores de Sharpe (IS), Treynor (IT), Jensen (IJ) e Sortino (ISor).

Os índices de Treynor e Jensen avaliam a performance com base no desempenho da carteira em relação ao desempenho do mercado. Já o Índice de Sharpe utiliza-se apenas do comportamento da carteira para avaliar sua performance. Por fim, o Índice de Sortino usa o conceito de *Downside Risk* para avaliar os riscos.

No entanto, outra medida de avaliação foi proposta, contemplando momentos de ordem superiores da distribuição. Como exemplo, faço uso de um gráfico ilustrativo retirado do artigo de Keating e Shadwick (2002), que demonstra a importância de se avaliar momentos de ordem superior. Ambas as distribuições apresentam a mesma média (10) e desvio padrão (152), contudo, em termos de terceiro momento (assimetria) e quarto momento (curtose), elas são distintas, indicando que medidas tradicionais como média e desvio padrão não seriam suficientes para a análise dos ativos e formação da carteira.

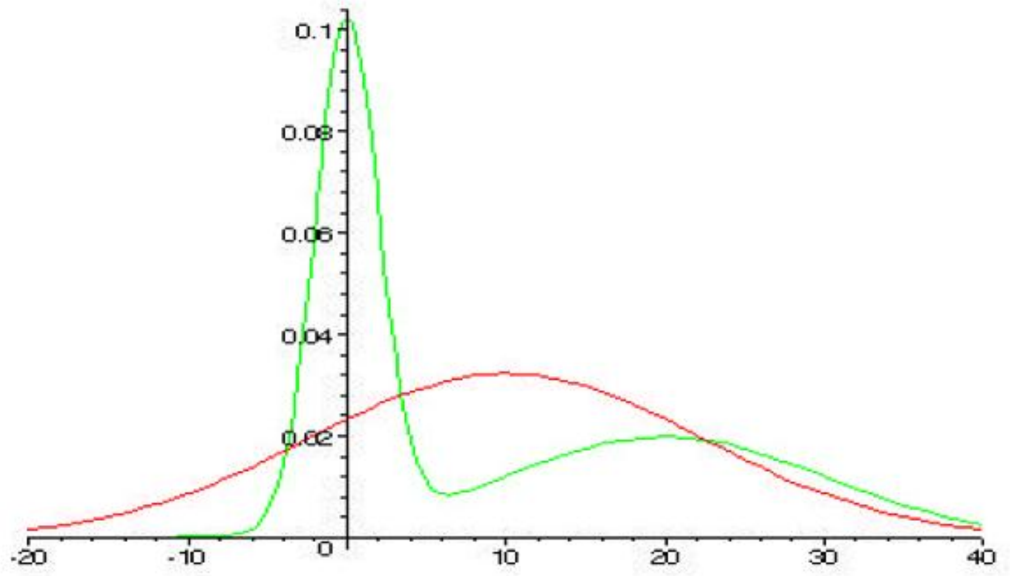

Figura 1: Análise da parformance de 2 carteiras

Índice de Sharpe

Bastante utilizado para avaliar a performance de fundos de investimentos, o Índice de Sharpe, formulado por Willian Sharpe (1966), baseia-se na Teoria de Seleção de Carteira, apontando pontos na Linha de Mercado de Capitais que correspondam à carteira ótima. Pode ser assim definido:

$$IS = \frac{E[r_p] - r_f}{\sigma_p} \tag{35}$$

Onde:

$E[r_p]$: Retorno esperado do portfólio.

σ_p: Desvio-padrão do portfólio.

r_f: Taxa de juros sem risco.

Índice de Sortino, Alfa, de Jensen e Treynor

Esta metodologia difere da anterior por abordar a idéia *de Downside Risk* (DR), que considera no cálculo da variância apenas as perdas financeiras, que são definidas a partir de um Retorno Mínimo Aceitável (RMA), conforme descrito a seguir:

$$DR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} Min[0;(r_i - RMA)]^2}{m}} \tag{36}$$

Onde:

m: Número de observações feitas em intervalos de tempo iguais para o retorno r do ativo ou carteira em análise.

Ou seja, ela se difere do índice anterior por considerar apenas as perdas. Sortino percebeu que o mais importante seria capturar o risco de não se atingir o ganho em relação à meta (RMA), e para isso desenvolveu a seguinte equação:

$$IS = \frac{E[r_p] - RMA}{DR} \tag{37}$$

O outro indicador mencionado é o Índice de Treynor, que foi extraído do Modelo CAPM e mede o excesso de retorno por unidade de risco sistemático, conforme descrito a seguir:

$$IS = \frac{E[r_p] - r_f}{\beta} \tag{38}$$

A Medida Ômega

Em razão de críticas ao Modelo proposto por Markowitz (1952), que considera a normalidade da distribuição dos ganhos, Keating e Shadwick (2002) apresentaram uma medida denominada Medida ômega (Ω).

A maioria dos indicadores de performance consideram duas simplificações importantes, que são válidas se assumidas uma distribuição normal dos retornos:

I. A média e a variância descrevem a distribuição de retornos.
II. As características do risco-retorno de uma carteira podem ser descritas sem referência a nenhum nível de retorno além da média dos retornos.

Contudo, é aceito o fato empírico de que os retornos não possuem distribuição normal. Para demonstrar este idéia, iremos fazer uso do cálculo de assimetria e curtose de cada carteira, embasado pelo Teste de Jarque – Bera.

A Medida Ômega consegue incorporar todos os momentos da distribuição. Ou seja, ao invés de estimar dois momentos individuais, ela mede o impacto total da distribuição.

Para definição da Medida Ômega, primeiramente devemos definir um retorno limite L, dividindo a distribuição de probabilidades de retornos em duas áreas, de ganhos e perdas. Na figura abaixo, ilustramos um exemplo de um modelo de distribuição de retornos de um ativo.

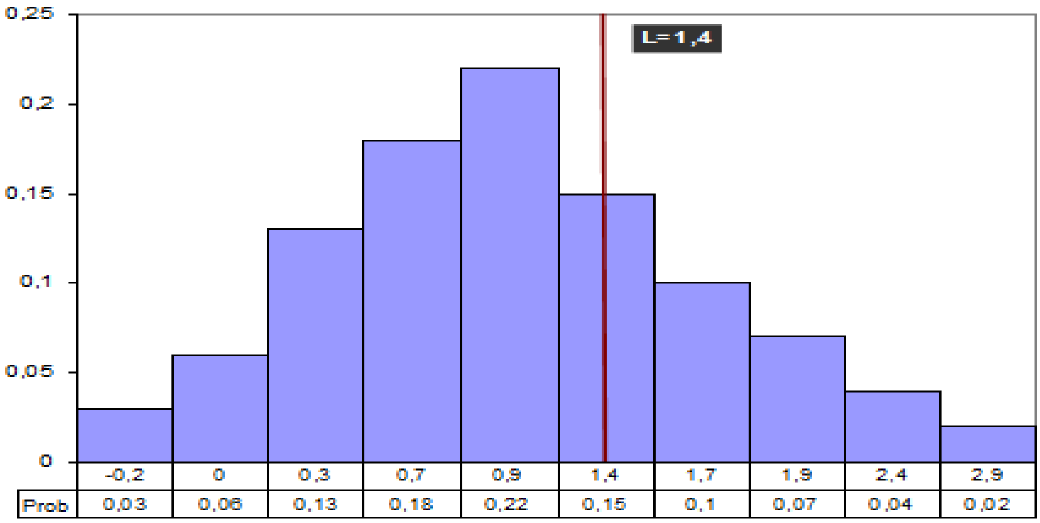

Figura 2 – Distribuição de retornos com L = 1,4

A Medida Ômega é calculada através da distribuição cumulativa. Os ganhos (g_i) e as perdas (l_i) podem ocorrer com alguma probabilidade nas áreas consideradas de ganho (r > L) ou de perda (r < L).

r>=L	$g_i = r_{i+1}-r_i$	[1-F(r)]	g*[1-F(r)]
1,4	0,3	0,23	0,069
1,7	0,2	0,13	0,026
1,9	0,5	0,06	0,03
2,4	0,5	0,02	0,01
2,9			
Ganho Ponderado = $\sum g_i*F(r_i)$ =			**0,135**

r<L	$l_i = r_{i+1}-r_i$	F(r)	l*F(r)
-0,2	0,2	0,03	0,006
0	0,3	0,09	0,027
0,3	0,4	0,22	0,088
0,7	0,2	0,4	0,08
0,9	0,5	0,62	0,31
1,4			
Perda Ponderada = $\sum l_i *F(r_i)$=			**0,511**

Quando a distribuição de probabilidades passa à ser contínua, a figura acima passa à tomar uma forma onde os intervalos são menores, infinitesimais, e chegamos à figura abaixo:

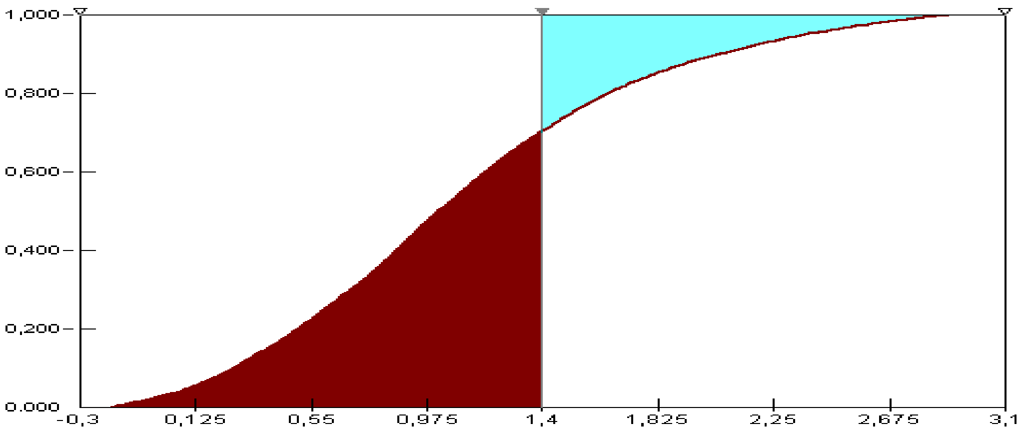

Figura 3 – Distribuição de probabilidades - Contínua

Assim, considerando-se uma função de densidade contínua, a Medida Ômega pode ser definida como:

$$\Omega(L) = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\int_L^b [1-F(x)dx}{\int_a^L F(x)dx} \qquad (39)$$

Onde:

$F(x)$: Função de distribuição cumulativa dos ganhos.

L: Nível mínimo requerido de ganhos.

a: Retorno mínimo

b: Retorno máximo.

A Função Ômega possui a capacidade de comparar retornos de diferentes ativos e classifica-los em relação ao seu Ômega. Posteriormente, Kazemi, Schneeweis e Gupta (2003) apresentaram o cálculo de Ω de um forma simplificada, como uma razão entre valores esperados, sendo o numerador o valor esperado do excesso de ganhos e no denominador o valor esperado do excesso de perdas, como se segue:

$$\Omega(L) = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\int_L^b [1-F(x)dx}{\int_a^L F(x)dx} = \frac{\int_L^b (X-L)dx}{\int_a^L (L-X)dx} = \frac{E[Max(X-L;0)]}{E[Max(L-X;0)} = \frac{EC(L)}{ES(L)} \qquad (40)$$

Para otimizar uma carteira utilizando-se a medida de performance Ω, Ick e Nowak (2006) desenvolveram um programa de otimização, conforme descrito à seguir:

$$max_p \Omega(L) = \frac{EC_p(L)}{ES_p(L)} \qquad (41)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} w_i = 1 \qquad (42)$$

$$0 \leq w_i \leq 1$$