

2

Conceitos Básicos da Geometria Diferencial Afim

Antes de iniciarmos o estudo das desigualdades isoperimétricas para curvas convexas, vamos rever alguns conceitos e resultados da Geometria Diferencial (ver [4]) e, em seguida, o conceito de transformação, distância e comprimento afim.

2.1

Revisão de Cálculo - Curvas parametrizadas

Em relação a uma curva convexa e fechada \mathcal{C} , do plano \mathbb{R}^2 , com curvatura positiva (fig.2.1),

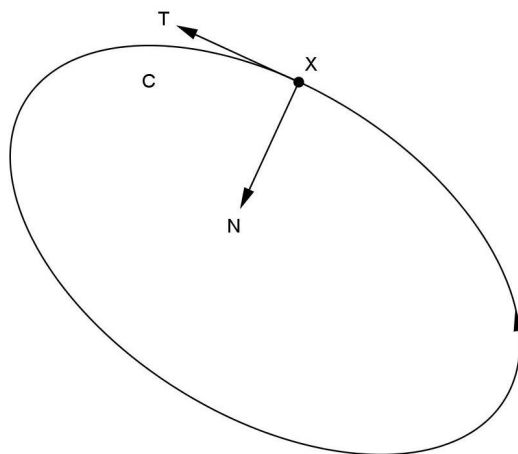


Figura 2.1: Curva convexa e fechada.

sejam

- s , o comprimento de um arco de \mathcal{C} ;
- A função $X = X(s)$, representando um ponto qualquer da curva \mathcal{C} ;
- A função $T = T(s)$, o vetor tangente unitário de um ponto qualquer X de \mathcal{C} ;
- A função $N = N(s)$, o vetor normal unitário de um ponto qualquer X de \mathcal{C} .

Destacamos as fórmulas de Frenet:

$$\frac{dX}{ds} = T; \quad \frac{dT}{ds} = kN; \quad \frac{dN}{ds} = -kT, \quad (2-1)$$

onde $k = k(s)$ é a curvatura de \mathcal{C} . que assumimos ser sempre positiva.

Se atribuímos ao comprimento total da curva \mathcal{C} a medida L , então X é uma função vetorial periódica de s e de período L . Consequentemente, $T(s)$, $N(s)$ e $k(s)$ têm também o mesmo período L . Temos

$$L = \oint_{\mathcal{C}} ds \quad (2-2)$$

Podemos calcular também a área do domínio limitado por \mathcal{C} . Sabendo que

$$dX = (dx, dy) = T ds,$$

a rotação de T por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ (fig. 2.2), nos leva a

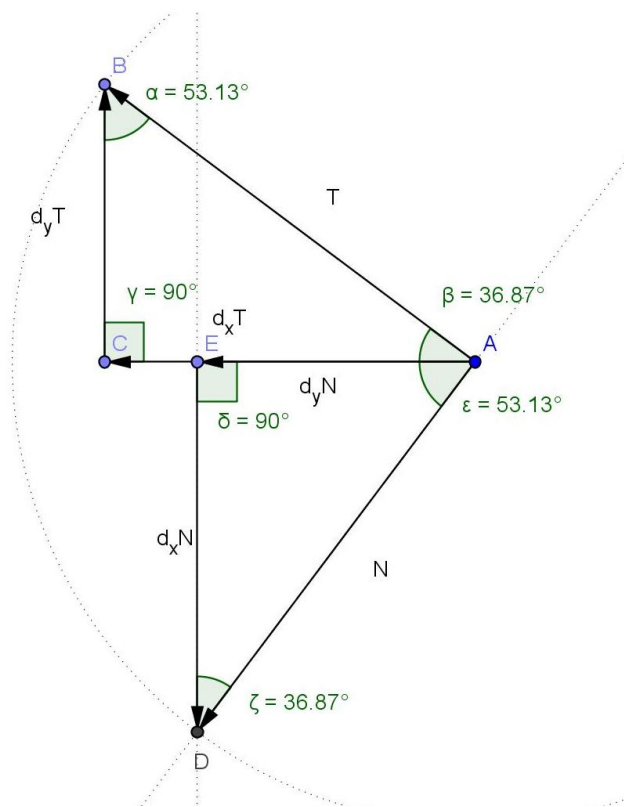


Figura 2.2: Componentes tangente e normal

$$\begin{aligned}(-dy, dx) &= Nds \\(x, y).(-dy, dx) &= X.Nds \\ydx - xdy &= -X.Nds.\end{aligned}$$

O teorema de Green nos diz que

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (ydx - xdy)$$

e portanto

$$S_{\mathcal{C}} = -\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} X.Nds. \quad (2-3)$$

A equação (2-3) é válida para qualquer curva fechada simples e não se restringe a curvas convexas. Assim, cabe explorar o fato de a curva \mathcal{C} ser convexa e introduzir o parâmetro θ — ângulo que o vetor normal $-N$ forma com o eixo horizontal de um sistema de coordenadas cartesianas que, por conveniência, tem sua origem fixada no interior de \mathcal{C} .

Face a continuidade de \mathcal{C} , percebemos que cada um dos pontos da curva encontra-se associado a um único θ . Consequentemente, um circuito completo de θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ corresponde a uma volta no entorno de \mathcal{C} , $0 \leq s \leq L$.

Introduzimos, agora, uma função de suporte p que retorna a distância da origem dos eixos cartesianos à reta tangente à curva \mathcal{C} , em um ponto X qualquer da curva (fig. 2.3).

Assim, podemos escrever a função $p = p(\theta)$, de período 2π , como

$$p = -X.N \quad (2-4)$$

Analicamente, teremos

$$T = (-sen\theta, cos\theta) \quad (2-5)$$

$$N = (-cos\theta, -sen\theta) = \frac{dT}{d\theta} \quad (2-6)$$

É fato que a equação (2-6) é uma consequência direta da definição de θ , e que a equação (2-5) decorre desta por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$. Mais ainda, derivando (2-6) em função de θ obtemos

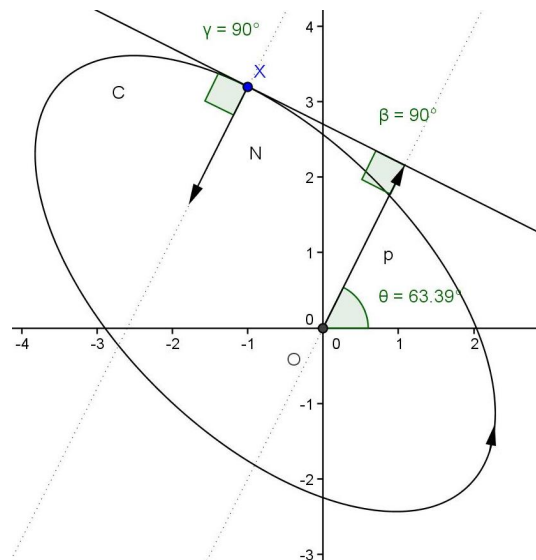


Figura 2.3: Componente normal a curva \mathcal{C}

$$\frac{dN}{d\theta} = (\text{sen}\theta, -\text{cos}\theta) = -T. \tag{2-7}$$

Sabemos de (2-6) que $dT = N d\theta$, mas de (2-1) temos $dT = k N ds$. Então,

$$d\theta = k ds \tag{2-8}$$

Naturalmente, (2-8) retrata a interpretação básica para curvatura, conforme a variação do vetor tangente ao longo de uma curva, ponto a ponto. Continuando, derivamos (2-4) em função de θ e aplicamos (2-7),

$$\begin{aligned} p' &= -X'.N - X.N' \Rightarrow \\ \Rightarrow p' &= -X'.N + X.T \Rightarrow \\ &\Rightarrow p' = X.T \end{aligned} \tag{2-9}$$

Vale observar que X' é paralelo à T , logo $X'.N = 0$. Derivando (2-9) e aplicando (2-1) e (2-4),

$$\begin{aligned} p'' &= X'.T + X.T' \Rightarrow \\ \Rightarrow p'' &= (s'.T).T + X.N \Rightarrow \\ \Rightarrow p'' &= s' - p \Rightarrow \\ &\Rightarrow s' = p'' + p \end{aligned} \tag{2-10}$$

Assim, associando (2-8) e (2-10), temos

$$\frac{1}{k} = \rho = p + p'' \tag{2-11}$$

Aplicando (2-11) em (2-2), chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} L &= \oint ds = \int_0^{2\pi} \rho d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow L &= \int_0^{2\pi} (p + p'') d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow L &= \int_0^{2\pi} p d\theta + \int_0^{2\pi} p'' d\theta \end{aligned}$$

Uma vez que $p'' d\theta = d(p')$ é exato e, como p' tem período 2π , decorre, então

$$\int_0^{2\pi} p'' d\theta = 0.$$

Assim,

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} p d\theta. \quad (2-12)$$

Aplicando (2-11) em (2-3), teremos

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \oint X \cdot N ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\theta \Rightarrow \\ S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} pp'' d\theta. \end{aligned}$$

E, já que $d(pp') = pp'' d\theta + p'^2 d\theta$, podemos escrever

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} pp'' d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d(pp') - p'^2 d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p'^2 d\theta.$$

Assim,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - (p')^2) d\theta. \quad (2-13)$$

É de se notar que p determina \mathcal{C} completamente. De fato, associando (2-4), (2-5), (2-6) e (2-9), decorre

$$X = p'T - pN = (-p' \operatorname{sen} \theta + p \cos \theta, p' \cos \theta + p \operatorname{sen} \theta).$$

Geometricamente, podemos dizer que as tangentes à \mathcal{C} envolvem-na completamente. Poderíamos dizer também que o conjunto convexo K , cuja fronteira é \mathcal{C} , consiste na intersecção de semi-planos, incluindo K , determinados

pelas retas suportes das tangentes à \mathcal{C} , isto é,

$$K = \{v \in E^2 \mid -v \cdot N(\theta) \leq p(\theta); \forall \theta\}.$$

2.2

Transformação afim

Uma transformação afim $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida no plano como

$$\mathcal{T} = \mathcal{A}X + \mathcal{B},$$

onde $X \in \mathbb{R}^2$ é um vetor, \mathcal{A} é uma matriz quadrada de ordem 2, invertível, com determinante positivo, e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^2$ é um vetor de translação. Assim, escrevemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É fácil mostrar que as transformações obtidas por \mathcal{T} fazem parte de um grupo algébrico, chamado de grupo unimodular afim. Para o nosso estudo, ficaremos restritos a um subgrupo deste, onde o determinante da matriz \mathcal{A} seja sempre igual a 1.

Mas, por que restringir a 1 o valor do determinante da matriz \mathcal{A} ? Vale a pena recordar, brevemente, o conceito de invariante afim.

Uma quantidade Q , pertencente a um grupo G , é chamada de invariante, sempre que Q se transformar em \tilde{Q} , decorrente de uma transformação $g \in G$, e obtivermos $\tilde{Q} = \psi Q$, onde ψ é uma função de g . Quando $\psi = 1$, para todo $g \in G$, Q é chamada de invariante absoluta.

2.3

Interpretação geométrica do comprimento afim de um arco de parábola

Primeiramente, introduziremos o conceito de distância afim.

Seja uma curva plana contida no plano afim e representada parametricamente pela equação

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)),$$

e suficientemente suave, tal que a função vetorial $\mathcal{C}(t)$ seja de classe \mathcal{C}^3 em t .

Sejam um ponto e uma direção relativa a este ponto. A conjunção destes forma o que chamamos de elemento linear. Assim, dois elementos lineares - $x, x'; y, y'$ - determinam uma única parábola que intercepta x e y e é tangente a x', y' em x, y , respectivamente (fig. 2.4). De fato, uma parábola é perfeitamente determinada por quatro pontos e a construção em questão corresponde, exatamente, ao caso de um par de pontos coincidentes. Desse modo, sejam as equações paramétricas da parábola

$$x(t) = x_0 + x'_0 t + \frac{1}{2} x''_0 t^2 \tag{2-14}$$

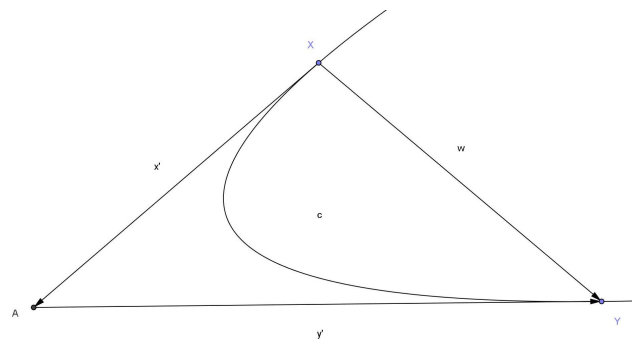


Figura 2.4: Parábola definida por um ponto e uma direção.

onde

$$x_0 = x(0) = x; \frac{dx(t_0)}{dt} = \text{constante} \cdot x' \tag{2-15}$$

$$x_1 = x(t_1) = y; \frac{dx(t_1)}{dt} = \text{constante} \cdot y' \tag{2-16}$$

Portanto, os dois elementos lineares $x, x'; y, y'$ determinam o triângulo de área f dada por

$$f = \frac{1}{2} \frac{[x', y - x][y - x, y']}{[x', y']} \tag{2-17}$$

Substituindo (2-15) e (2-16) em (2-17), obtemos...

$$f = \frac{1}{2} \frac{[x'_0, x_1 - x_0][x_1 - x_0, x'_1]}{[x'_0, x'_1]} \tag{2-18}$$

OBS: Acima e em todo o texto, a notação $[X, Y]$ significa $\det|X, Y|$.

Assim, a partir de (2-14), obtemos

$$x_1 - x_0 = x'_0 t_1 + \frac{1}{2} x''_0 t_1^2. \quad (2-19)$$

E, derivando (2-14) temos

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'_0 + x''_0 t \\ x'(t_1) &= x'_0 + x''_0 t_1 \end{aligned}$$

$$x'_1 = x'_0 + x''_0 t_1 \quad (2-20)$$

Finalmente, substituindo (2-19) e (2-20) em (2-18), obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} [x'_0, x_1 - x_0] &= [x'_0, x'_0 t_1 + \frac{1}{2} x''_0 t_1^2] = \frac{1}{2} x'_0 x''_0 t_1^2; \\ [x_1 - x_0, x'_1] &= [x'_0 t_1 + \frac{1}{2} x''_0 t_1^2, x'_0 + x''_0 t_1] = x'_0 x''_0 t_1^2 - \frac{1}{2} x'_0 x''_0 t_1^2 = \frac{1}{2} x'_0 x''_0 t_1^2; \\ [x'_0, x'_1] &= [x'_0, x'_0 + x''_0 t_1] = x'_0 x''_0 t_1 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2} x'_0 x''_0 t_1^2)(\frac{1}{2} x'_0 x''_0 t_1^2)}{(x'_0 x''_0 t_1)} \\ f &= \frac{1}{8} t_1^3 (x'_0 x''_0) \end{aligned} \quad (2-21)$$

Da mesma forma, podemos obter uma expressão para a área de um triângulo formado a partir de dois pontos t_1 e t_2 dessa mesma parábola,

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{8} (t_2 - t_1)^3 [x'_0 x''_0] \quad (2-22)$$

Decorre, então, que a função $f^{\frac{1}{3}}$ é conceitualmente análoga ao teorema da distância euclideana. Sejam três pontos t_1, t_2, t_3 , pontos de uma parábola, então, podemos dizer que

$$f^{\frac{1}{3}}(t_1, t_2) + f^{\frac{1}{3}}(t_2, t_3) = f^{\frac{1}{3}}(t_1 t_3).$$

Assim, a distância afim r entre dois elementos lineares - $x, x'; y, y'$ - é definida como

$$r = 2.f^{\frac{1}{3}}$$

De (2-22) podemos também determinar um novo parâmetro s tal que,

$$\left[\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \right] = 1$$

Evidentemente, este parâmetro é invariante pelo grupo de transformações afins. Assim, o parâmetro s pode ser determinado por

$$s = [x'_0, x''_0]^{\frac{1}{3}} t + \text{const.}$$

Consequentemente,

$$f(s_1, s_2) = \frac{1}{8}(s_2 - s_1)^3 \quad (2-23)$$

Portanto, podemos concluir que a distância afim entre dois pontos s_1 e s_2 de uma parábola é igual a $s_2 - s_1$.

A seguir definiremos o comprimento de arco afim s de uma curva suave qualquer, a partir da generalização do comprimento de arco afim de uma parábola.

2.4

Comprimento afim de uma curva qualquer sem pontos de inflexão

Suponha que para qualquer ponto de uma dada curva suave

$$\left[\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right] = [x', x''] = [C_t, C_{tt}] \neq 0 \quad (2-24)$$

isto é, a curva não apresenta pontos de inflexão. Definimos, então

$$s = \int_0^t [x'_0, x''_0]^{\frac{1}{3}} dt$$

Então, o parâmetro s satisfaz

$$\left[\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \right] = [C_s, C_{ss}] = 1 \quad (2-25)$$

A determinação de s não é somente invariante pelo grupo de transformações afins, mas é também única, excetuando-se os pontos onde $s = 0$.

2.5

Vetores tangentes e normais afins, curvatura afim

$$\text{vetor tangente afim à curva} \quad \mathcal{C}_s = \mathcal{C}_t \frac{dt}{ds} \quad (2-26)$$

$$\text{vetor normal afim à curva} \quad \mathcal{C}_{ss} = \mathcal{C}_{tt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathcal{C}_t \frac{d^2t}{ds^2} \quad (2-27)$$

Derivando (2-25), temos

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ss}]' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [\mathcal{C}_{ss}, \mathcal{C}_{ss}] + [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{sss}] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{sss}] &= 0 \end{aligned} \quad (2-28)$$

Então, podemos afirmar que os vetores \mathcal{C}_s e \mathcal{C}_{sss} são linearmente dependentes. Consequentemente, já que $\mathcal{C}_s \neq 0$, existe um μ tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{sss} + \mu \mathcal{C}_s &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu \mathcal{C}_s &= -\mathcal{C}_{sss} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ss}] &= -[\mathcal{C}_{sss}, \mathcal{C}_{ss}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= [\mathcal{C}_{ss}, \mathcal{C}_{sss}] \end{aligned}$$

O escalar μ é um invariante diferencial afim da curva $\mathcal{C}(t)$ chamado curvatura afim. Note que de (2-28)

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{sss}]' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [\mathcal{C}_{ss}, \mathcal{C}_{sss}] + [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ssss}] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu + [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ssss}] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= -[\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ssss}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= [\mathcal{C}_{ssss}, \mathcal{C}_s] \end{aligned}$$

Isto é, a curvatura afim pode ser calculada como

$$\mu = [\mathcal{C}_{ss}, \mathcal{C}_{sss}]$$

ou

$$\mu = [\mathcal{C}_{ssss}, \mathcal{C}_s].$$

Lema 2.5.1 *O comprimento afim de uma curva \mathcal{C} pode ser calculado como*

$$L_a = \oint \mu[\mathcal{C}, \mathcal{C}_s] ds$$

Prova.

$$\begin{aligned} \oint \mu[\mathcal{C}, \mathcal{C}_s] ds &= \oint [\mathcal{C}, \mu\mathcal{C}_s] ds = \\ &= - \oint [\mathcal{C}, \mathcal{C}_{ssss}] ds = \\ &= - \oint (xy_{ssss} - yx_{ssss}) ds = \\ &= -(xy_{ss} - yx_{ss})|_0^L + \oint (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) ds = \\ &= \oint [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ss}] ds = \oint ds = L_a \end{aligned}$$

■

O lema a seguir será utilizado no capítulo 5.

Lema 2.5.2 *A curva \mathcal{C}_{ss} é uma curva convexa.*

Prova.

Se \mathcal{C} for uma parábola, \mathcal{C}_{ss} será um ponto, logo \mathcal{C}_{ss} será convexa. Supomos, então, que \mathcal{C} não é uma parábola. Assim, podemos calcular a curvatura Euclideana de \mathcal{C} por,

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{C}_{ss}} &= \frac{[\mathcal{C}_{ssss}, \mathcal{C}_{ssss}]}{\|\mathcal{C}_{ssss}\|^3} = \\ k_{\mathcal{C}_{ss}} &= \frac{[-\mu \cdot \mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ssss}]}{\|\mathcal{C}_{ssss}\|^3} = \\ k_{\mathcal{C}_{ss}} &= \frac{-\mu \cdot [\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{ssss}]}{\|\mathcal{C}_{ssss}\|^3} = \frac{-\mu \cdot (-\mu)}{\|\mathcal{C}_{ssss}\|^3} = \\ k_{\mathcal{C}_{ss}} &= \frac{(\mu)^2}{\|\mathcal{C}_{ssss}\|^3} \geq 0 \end{aligned}$$

■

No caso Euclidiano, a curvatura k constante é obtida somente para arcos de círculo ou para linhas retas. Mais ainda, em um ponto $P(x, y)$, de uma curva \mathcal{C} , temos como figura osculadora um círculo de raio $\frac{1}{k(P)}$, cujo centro encontra-se na direção normal ao ponto P .

Do ponto de vista afim, as cônicas — parábola, elipse e hipérbole — são as únicas curvas com curvatura afim μ constante ; $\mu = 0$; $\mu > 0$; $\mu < 0$, respectivamente, onde a elipse é a única curva fechada com curvatura afim constante. A figura osculadora afim, em um ponto P de uma curva \mathcal{C} , desde que esse ponto não seja de inflexão, será uma destas, dependendo do valor da curvatura afim ser zero, positivo ou negativo.

2.6 Invariância afim

Em termos gerais, uma transformação afim é uma transformação do tipo

$$\mathcal{T} = \mathcal{A}X + \mathcal{B} \quad (2-29)$$

Em nosso estudo, como dito anteriormente, consideraremos somente as transformações cujo $[\mathcal{A}] = 1$ e provaremos a invariância absoluta da tangente afim, da normal afim e da curvatura afim. Nesta seção, seguimos [2].

A título de facilitar nosso entendimento, utilizaremos o símbolo \sim acima de uma dada quantidade, significando a transformada de tal quantidade, decorrente da ação de (2-29). Isto posto e, como subsídio às demonstrações que se seguem, considere a curva

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)) \quad (2-30)$$

Aplicando (2-29) em (2-30), temos

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B} \quad (2-31)$$

Como \mathcal{C} é de classe \mathcal{C}_3 , derivando (2-31) em função de t , teremos

$$\tilde{\mathcal{C}}_t = \mathcal{A}\mathcal{C}_t \quad (2-32)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{tt} = \mathcal{A}\mathcal{C}_{tt} \quad (2-33)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{ttt} = \mathcal{A}\mathcal{C}_{ttt} \quad (2-34)$$

Sabendo que

$$ds = [x', x'']^{\frac{1}{3}} dt$$

podemos escrever

$$[x', x'']^{\frac{1}{3}} = [C_t, C_{tt}]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow ds = [C_t, C_{tt}]^{\frac{1}{3}} dt$$

Lema 2.6.1 $d\tilde{s} = ds$

Prova. Sabemos que

$$ds = [C_t, C_{tt}]^{\frac{1}{3}} dt$$

Assim

$$\begin{aligned} d\tilde{s} &= [\tilde{C}_t, \tilde{C}_{tt}]^{\frac{1}{3}} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow d\tilde{s}^3 &= [\tilde{C}_t, \tilde{C}_{tt}] dt^3 \Rightarrow \end{aligned}$$

Aplicando (2-32) e (2-33),

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\tilde{s}^3 &= [\mathcal{A}C_t, \mathcal{A}C_{tt}] dt^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow d\tilde{s}^3 &= [\mathcal{A}][C_t, C_{tt}] dt^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow d\tilde{s}^3 &= ds^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow d\tilde{s} &= ds \end{aligned}$$

■

Lema 2.6.2 *O vetor tangente afim é um invariante afim absoluto*

Prova. Sabemos de (2-26) que

$$C_s ds = C_t dt \Rightarrow C_s = C_t \frac{dt}{ds}$$

Assim, aplicando (2-29) e o lema 2.5.1, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{C}_s &= \tilde{C}_t \frac{dt}{d\tilde{s}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{C}_s &= \mathcal{A}C_t \frac{dt}{d\tilde{s}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{C}_s &= \mathcal{A}C_t \frac{dt}{ds} = \mathcal{A}C_s \end{aligned}$$

■

Lema 2.6.3 *O vetor normal afim é um invariante afim absoluto.*

Prova. Sabemos de (2-27) que

$$C_{ss} = C_{tt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + C_t \frac{d^2t}{ds^2}$$

E, aplicando (2-29) e o lema 2.5.1, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ss} &= \tilde{C}_{tt} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \right)^2 + \tilde{C}_t \frac{d^2t}{d\tilde{s}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{C}_{ss} &= \mathcal{A} C_{tt} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \right)^2 + \mathcal{A} C_t \frac{d^2t}{d\tilde{s}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{C}_{ss} &= \mathcal{A} \left[C_{tt} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \right)^2 + C_t \frac{d^2t}{d\tilde{s}^2} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{C}_{ss} &= \mathcal{A} \left[C_{tt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + C_t \frac{d^2t}{ds^2} \right] = \mathcal{A} C_{ss} \end{aligned}$$

■

Lema 2.6.4 *A curvatura afim é um invariante afim absoluto.*

Prova. A partir dos lemas 2.6.1 e 2.6.2, temos

$$\begin{aligned} \tilde{C}_s &= \mathcal{A} C_s \\ \tilde{C}_{ss} &= \mathcal{A} C_{ss} \end{aligned}$$

E, de maneira análoga, podemos demonstrar

$$\tilde{C}_{sss} = \mathcal{A} C_{sss}$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= [\tilde{C}_{ss}, \tilde{C}_{sss}] = [\mathcal{A} C_{ss}, \mathcal{A} C_{sss}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{\mu} &= [\mathcal{A}][C_{ss}, C_{sss}] = \mu \end{aligned}$$

■