

3 Uma desigualdade de Blaschke

Neste capítulo, descreveremos uma desigualdade de Blaschke que data de 1917. A exposição que se segue está baseada em [3].

Considerações iniciais:

- a Seja um domínio convexo \mathcal{M} , limitado por uma oval \mathcal{C} desprovida de segmentos, bem como pontos de inflexão ou vértices;
- b Seja $\Delta > 0$ a notação para área do maior triângulo inscrito em \mathcal{C} ;
- c Seja S a área do domínio \mathcal{M} limitado por \mathcal{C} .

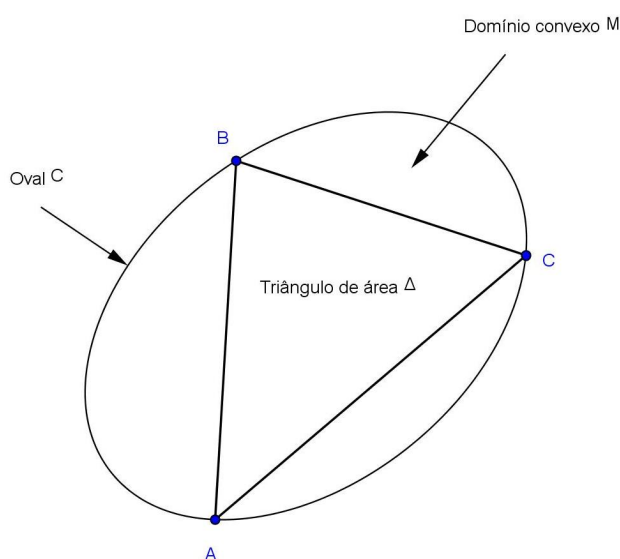


Figura 3.1: Domínio convexo fechado.

Teorema 3.1 *A área S do domínio \mathcal{M} limitado por \mathcal{C} e a área Δ do maior triângulo inscrito em \mathcal{C} satisfazem a desigualdade*

$$4\pi\Delta - 3\sqrt{3}S \geq 0, \quad (3-1)$$

com igualdade se, e somente se, a oval for uma elipse.

A demonstração do teorema requer, antes de iniciarmos, o conhecimento das técnicas de simetria desenvolvidas por Steiner. Vejamos, então:

Na oval \mathcal{C} , consideramos cordas paralelas ao eixo vertical x_2 . Em seguida, deslocamos cada uma dessas cordas, paralelamente ao eixo x_2 , até que seus pontos médios coincidam com o eixo horizontal x_1 . Assim, construímos uma nova oval \mathcal{C}^* , simétrica por construção em relação ao eixo x_1 , limitando um domínio convexo \mathcal{M}^* , com área S , igual a de \mathcal{M} (fig. 3.2).

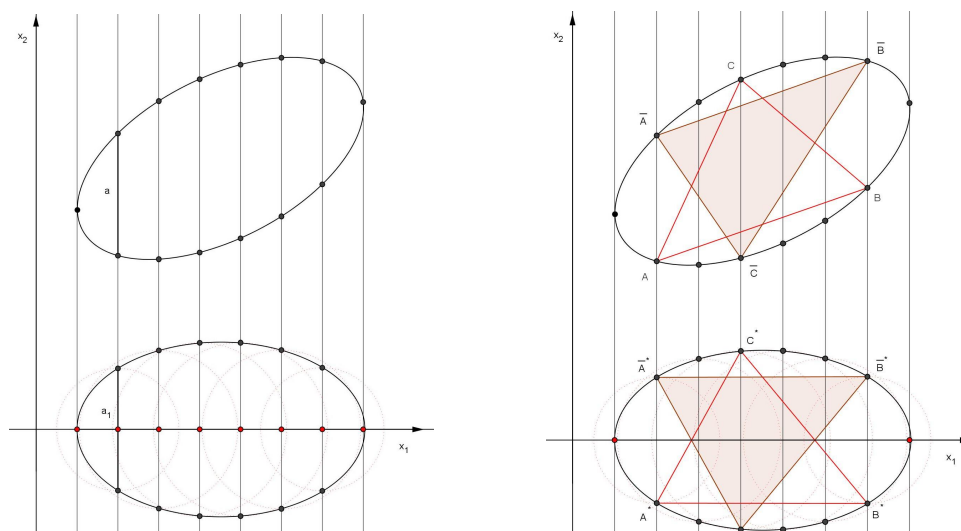


Figura 3.2: Simetrização de Steiner

Em seguida, nesta nova oval \mathcal{C}^* , são inscritos os triângulos $A^*B^*C^*$ e $\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*$, congruentes entre si e de maior área possível Δ^* (fig. 3.2). Desse modo, podemos mostrar que:

Lema 3.0.5 *A área Δ^* do maior triângulo inscrito em \mathcal{M}^* é menor ou igual à área Δ do maior triângulo inscrito em \mathcal{M} ($\Delta \geq \Delta^*$).*

Prova. Seja $A^*B^*C^*$ um dos maiores triângulos inscritos em \mathcal{M}^* e Δ^* sua área. Sejam as coordenadas dos vértices $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$ do triângulo ABC , correspondente a $A^*B^*C^*$ e $\bar{A}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $\bar{B}(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ e $\bar{C}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$, as coordenadas do triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, correspondente a $\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*$. Então, observando \mathcal{M} , podemos escrever

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ 1 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ 1 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \bar{a}_2 \\ 1 & b_1 & \bar{b}_2 \\ 1 & c_1 & \bar{c}_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 - \bar{a}_2 \\ 1 & b_1 & b_2 - \bar{b}_2 \\ 1 & c_1 & c_2 - \bar{c}_2 \end{vmatrix} \quad (3-2)$$

Mais ainda, em \mathcal{M}^* ,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^* & a_2^* \\ 1 & b_1^* & b_2^* \\ 1 & c_1^* & c_2^* \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \bar{a}_1^* & \bar{a}_2^* \\ 1 & \bar{b}_1^* & \bar{b}_2^* \\ 1 & \bar{c}_1^* & \bar{c}_2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2^* \\ 1 & b_1 & b_2^* \\ 1 & c_1 & c_2^* \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \bar{a}_2^* \\ 1 & b_1 & \bar{b}_2^* \\ 1 & c_1 & \bar{c}_2^* \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2^* - \bar{a}_2^* \\ 1 & b_1 & b_2^* - \bar{b}_2^* \\ 1 & c_1 & c_2^* - \bar{c}_2^* \end{vmatrix} \quad (3-3)$$

Algumas observações são necessárias.

- A orientação de leitura é horária;
- As coordenadas horizontais dos vértices dos triângulos $A^*B^*C^*$, $\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*$, ABC e $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ são as mesmas, por construção,
- A soma das áreas dos triângulos ABC e $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ só depende da diferença entre as coordenadas verticais. O mesmo se dá com os triângulos $A^*B^*C^*$ e $\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*$.

Logo, vemos que não há variação entre os resultados apresentados em (3-2) e (3-3), uma vez que

$$\begin{aligned} a_2 - \bar{a}_2 &= a_2^* - \bar{a}_2^*; \\ b_2 - \bar{b}_2 &= b_2^* - \bar{b}_2^*; \\ c_2 - \bar{c}_2 &= c_2^* - \bar{c}_2^*. \end{aligned}$$

(cordas verticais). Assim, podemos obter relações entre os valores absolutos das áreas dos triângulos, conforme descrito a seguir:

$$|ABC| + |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = |A^*B^*C^*| + |\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*| = 2\Delta^*. \quad (3-4)$$

Contudo, já que

$$|ABC| \leq \Delta$$

e

$$|\bar{A}\bar{B}\bar{C}| \leq \Delta$$

temos

$$|ABC| + |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| \leq 2\Delta \Rightarrow 2\Delta^* \leq 2\Delta \Rightarrow \Delta^* \leq \Delta.$$



Por outro lado, a simetria de Steiner pode ser repetida em \mathcal{M} até um número n de vezes, isto é, após uma simetria concluída, uma nova simetria é feita utilizando-se novos eixos coordenados. Esses novos eixos, em relação aos anteriores, apresentam direções alteradas por uma mesma rotação.

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{M}_n.$$

Assim, podemos aplicar a simetria de Steiner em \mathcal{M} , repetidamente, até que, para um dado $\varepsilon > 0$, exista um n grande suficiente, tal que \mathcal{M}_n fique muito próximo de um círculo de mesma área. Em outras palavras, isso significa dizer que \mathcal{M}_n pode ser aproximada por um círculo de área $S + \varepsilon$.

Contudo, para um círculo, temos que o triângulo maximal é o equilátero, logo,

$$4\pi\Delta = 3\sqrt{3}S. \quad (3-5)$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}S. \quad (3-6)$$

Mais ainda, como

$$\Delta \geq \Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \cdots \geq \Delta_n \geq \cdots$$

Então

$$\Rightarrow \Delta \geq \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}S,$$

o que prova a desigualdade de Blaschke.

A partir deste ponto e até o final desta seção, demonstraremos que as únicas curvas que satisfazem a igualdade em (3-1) são as elipses.

Denominamos domínios *extremais* aqueles que satisfazem a igualdade em (3-1). A referida igualdade, $4\pi\Delta - 3\sqrt{3}S = 0$, é válida no caso de círculos, bem como no caso de elipses, fato esse decorrente de que a igualdade não se altera após uma transformação afim. Desse modo, basta demonstrar que esta é a única possibilidade de haver a igualdade. Mais precisamente, devemos demonstrar que, se \mathcal{M} for um domínio extremal, então \mathcal{M} é uma elipse.

Primeiramente, observamos que, quando um domínio convexo extremal \mathcal{M} é simetrizado, tanto sua área S quanto a área Δ do maior triângulo inscrito são preservados. Em outras palavras, se vale $4\pi\Delta - 3\sqrt{3}S = 0$ para \mathcal{M} , a mesma

continua valendo após a simetrização. De fato, do lema 3.0.5 sabemos que

$$\Delta^* \leq \Delta,$$

e da desigualdade de Blaschke, sabemos que

$$\Delta^* \geq \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}S = \Delta.$$

Portanto

$$\Delta^* = \Delta.$$

Lema 3.0.6 *Qualquer ponto A da fronteira de um domínio extremal \mathcal{M} é um vértice de um triângulo maximal.*

Prova. Assumimos, por contradição, que a área de qualquer triângulo inscrito em \mathcal{M} , que tenha A como um de seus vértices, seja menor ou igual a $\Delta - 2\varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$. Assim, podemos desenhar um círculo, com centro em A , tal que qualquer triângulo que tenha um de seus vértices na circunferência desse círculo e os outros dois no contorno de \mathcal{M} tenha área menor ou igual a $\Delta - \varepsilon$. Não havendo segmentos de reta no contorno de \mathcal{M} , podemos expandir \mathcal{M} no interior desse círculo, de tal forma que o domínio \mathcal{M}^* permaneça convexo e que $\Delta = \Delta^*$. Então, somos levados ao seguinte resultado

$$0 = 4\pi\Delta - 3\sqrt{3}S > 4\pi\Delta^* - 3\sqrt{3}S^*$$

o que contradiz $\Delta^* = \Delta$ ■

Lema 3.0.7 *Qualquer ponto A da fronteira de um domínio extremal \mathcal{M} é um vértice de um único triângulo maximal.*

Prova. Seja ABC um dos maiores triângulos de vértice A , inscritos em \mathcal{M} . Iniciamos a prova deste lema simetrizando o domínio \mathcal{M} , tendo como referencial o lado BC do triângulo (fig. 3.3).

Devido à propriedade maximal deste triângulo, a reta que intercepta A , paralela à BC , não intercepta \mathcal{M} em outro ponto, isto é, essa linha é tangente a \mathcal{M} em A . Após a simetrização, os triângulos ABC e $A^*B^*C^*$ apresentam a mesma área. Portanto, podemos concluir que $A^*B^*C^*$ é também o triângulo de maior área inscrito em \mathcal{M}^* . Se admitirmos a tangente comum a \mathcal{C} e \mathcal{C}^* , nos pontos A e A^* , respectivamente, como eixo vertical x_2 , então a afirmação

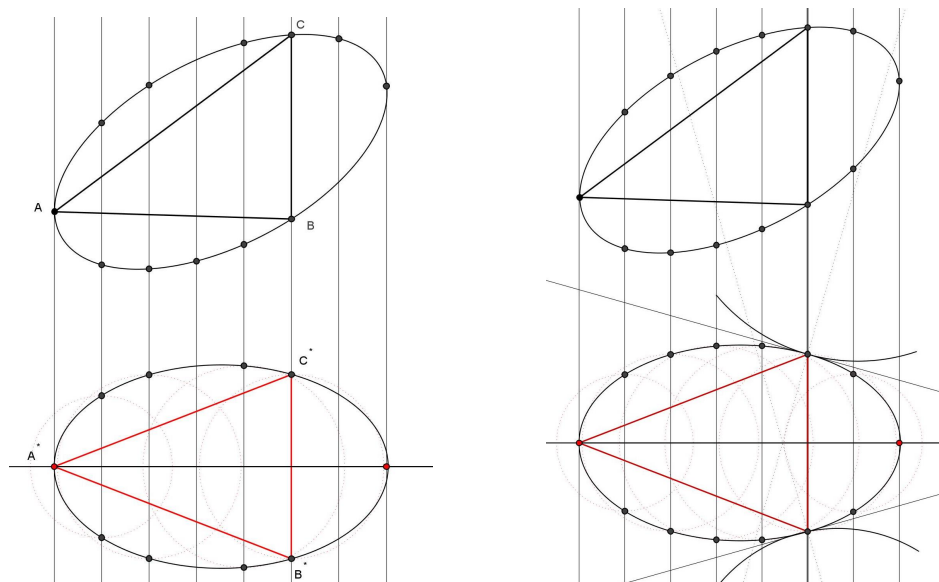


Figura 3.3:

deste lema é equivalente a: B^* e C^* formam o único par de pontos simétricos, pertencentes à fronteira C^* de \mathcal{M}^* , que satisfaz a condição

$$|x_1.x_2| = \Delta.$$

De fato, cada ramo de uma hipérbole $|x_1.x_2| = \Delta$ sempre se encontra em um dos lados das tangentes à C^* em B^* ou C^* . Portanto, esses dois ramos e C^* não apresentam outros pontos em comum. ■

Lema 3.0.8 *Se desenharmos três cordas paralelas entre si, que passem através de cada um dos vértice de um triângulo maximal ABC em um domínio extremal \mathcal{M} , então os três novos vértices $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ também formarão um triângulo maximal.*

Prova. De fato, quando simetizamos \mathcal{M} na direção das cordas, o domínio \mathcal{M}^* é também extremal e, conseqüentemente, A^* deve ser um dos vértices de um triângulo maximal $A^*B_1^*C_1^*$ de \mathcal{M}^* (fig. 3.4). Quando retornamos à \mathcal{M} , notamos que AB_1C_1 é também um triângulo maximal de \mathcal{M} (ora, $\Delta^* = \Delta$) e, portanto, AB_1C_1 coincide com ABC , ($B \equiv B_1$ e $C \equiv C_1$). Pelo lema 3.0.5, isto implica que o triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ é maximal. ■

Podemos, agora, provar que a fronteira \mathcal{C} de qualquer domínio extremal é uma elipse.

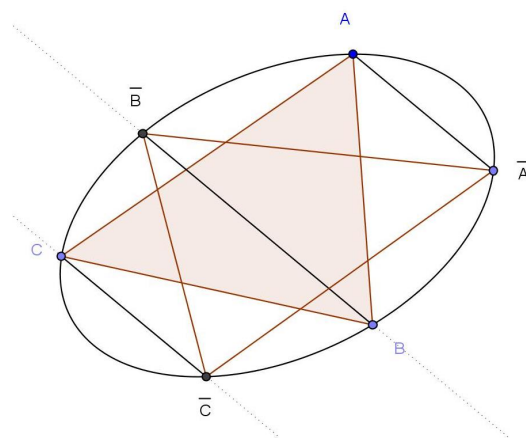


Figura 3.4: Cordas paralelas e o Triângulo Maximal

Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo maximal inscrito em \mathcal{C} . Afirmamos que existe uma elipse que passa por A_1, A_2 e A_3 e cujas tangentes nestes pontos coincidem com as tangentes à oval \mathcal{C} .

Dado qualquer outro ponto B_1 de \mathcal{C} , este deve pertencer a uma elipse que passa pelos vértices A_k do triângulo $A_1A_2A_3$. As respectivas tangentes à \mathcal{C} , nesses vértices, são paralelas aos lados opostos.

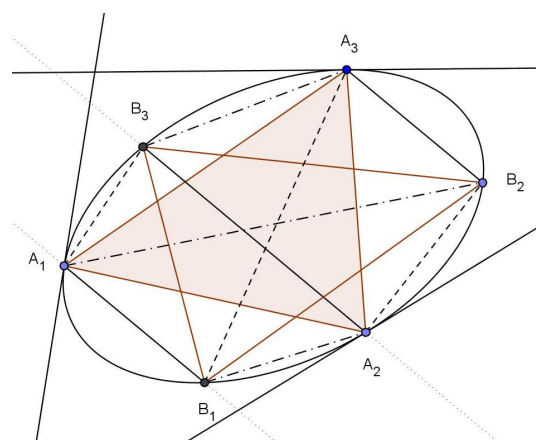


Figura 3.5: Elipse e o Triângulo Maximal

Seja $B_1B_2B_3$ um triângulo maximal onde B_1 é vértice. Dos lemas 3.0.7 e 3.0.8 temos que as cordas A_iB_i são paralelas. Agora, aplicamos o teorema de Pascal no hexágono $A_1A_1B_3A_3B_2A_2B_1$ (fig.3.5). Quando indicamos duas vezes o mesmo vértice, estamos dizendo que a tangente à elipse neste vértice coincide com a tangente à oval. De fato, desde que os três pares de lados opostos $A_1A_1, A_2A_3, A_1B_1, A_3B_2, B_1A_2$ e B_2A_1 são paralelos individualmente, então existe

uma cônica passando através dos vértices A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 e tangente à oval em A_1 .

Se intercambiarmos os índices 2 e 3, no procedimento descrito anteriormente, obteremos, então, uma nova cônica passando através de $A_1, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$. No entanto, essas duas cônicas têm cinco pontos em comum, isto é, as cônicas são coincidentes. Analogamente e pela simetria da construção, podemos afirmar que esta cônica passa através de $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ e é tangente à oval nos pontos A_2 e A_3 .

Concluimos que \mathcal{C} deve ser uma cônica e, por ser fechada, é necessariamente uma elipse.