4
A segunda desigualdade isoperimétrica afim

Teorema 4.1 *Dentre todas as ovais com área constante, a elipse e, somente a elipse, tem o maior perímetro afim. Em outras palavras, para uma oval com área S e perímetro afim L_a, vale a seguinte desigualdade*

$$\frac{L_a^3}{S} \leq 8\pi^2,$$

com igualdade válida somente para elipses.

A prova deste teorema, baseada em [3], é dependente de uma simetrização da oval. Entretanto, nos defrontamos com o fato de o perímetro afim L_a não ter uma relação de continuidade com a oval. Mesmo assim, existe uma outra continuidade presente neste caso — a semi-continuidade. Desse modo, nossa demonstração se fará com a conjunção de dois lemas que se seguem.

Winternitz(1922) enunciou o seguinte lema:

Lema 4.0.9 *Considere uma sequência de ovais $(\mathcal{C}_n)$ convergindo para um círculo $\mathcal{C}_o$. Para todo $\varepsilon > 0$, podemos determinar um m_ε, tal que se $n > m_\varepsilon$,*

$$L_a(\mathcal{C}_n) < L_a(\mathcal{C}_o) + \varepsilon, \tag{4-1}$$

Prova. Denotemos por σ o comprimento de arco e por ρ o raio de curvatura euclideanos. Assim, podemos escrever

$$L_a(\mathcal{C}_n) = \oint_{\mathcal{C}_n} \rho^{-\frac{1}{3}} d\sigma.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(L_a(\mathcal{C}_n))^3 &= \left(\oint_{\mathcal{C}_n} \rho^{-\frac{1}{3}} d\sigma \right)^3 \Rightarrow \\
\Rightarrow (L_a(\mathcal{C}_n))^3 &= \oint \oint \oint \rho^{-\frac{1}{3}}(\sigma_1).\rho^{-\frac{1}{3}}(\sigma_2).\rho^{-\frac{1}{3}}(\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \Rightarrow \\
\Rightarrow (L_a(\mathcal{C}_n))^3 &\leq \frac{1}{3} \oint \oint \oint \left(\rho^{-1}(\sigma_1) + \rho^{-1}(\sigma_2) + \rho^{-1}(\sigma_3) \right) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3
\end{aligned}$$

Lembrando que $\oint_{\mathcal{C}_n} d\sigma = \Sigma_n$ e $\oint_{\mathcal{C}_n} \rho^{-1} d\sigma = 2\pi$, concluímos que

$$(L_a(\mathcal{C}_n))^3 \leq 2\pi(\Sigma_n)^2 \tag{4-2}$$

Sabemos que o círculo $\mathcal{C}_o$ tem raio r. Assim, supomos que a oval $\mathcal{C}_n$ seja inscritível em um círculo de raio $r+\delta$. Então, teremos

$$\Sigma_n < 2\pi(r+\delta)$$

Consequentemente,

$$L_a(\mathcal{C}_n) < 2\pi(r+\delta)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow L_a(\mathcal{C}_n) < L_a(\mathcal{C}_o) + \varepsilon,$$

■

Lema 4.0.10 *Durante o processo de simetrização, o perímetro afim de uma oval normalmente aumenta e permanece invariáve,l quando, e somente quando, a curva central da oval, na direção da simetrização, corresponde a uma linha reta.*

Prova. Dividimos a oval $\mathcal{C}$ em duas metades — metade superior $\bar{\mathcal{C}}$ e metade inferior $\underline{\mathcal{C}}$ — e utilizamos as seguintes parametrizações:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathcal{C}} : x_1 = x_1(p),\ x_2 = \bar{x}_2(p);\ 0 \leq p \leq 1;\ x_1'\bar{x}_2'' - \bar{x}_2' x_1'' < 0, \\ \underline{\mathcal{C}} : x_1 = x_1(p),\ x_2 = \underline{x}_2(p);\ 0 \leq p \leq 1;\ x_1'\underline{x}_2'' - \underline{x}_2' x_1'' > 0, \\ x_1' \geq 0. \end{array} \right\} \tag{4-3}$$

Definimos

$$x_2(p,t) = \frac{1+t}{2}\bar{x}_2(p) - \frac{1-t}{2}\underline{x}_2(p) \tag{4-4}$$

e consideramos

$$\Phi(t) = \int_0^t \left[\frac{dx_2}{dp}.\frac{d^2x_1}{dp^2} - \frac{dx_1}{dp}.\frac{d^2x_2}{dp^2}\right]^{\frac{1}{3}} dp = \int_0^t \left[x_2' x_1'' - x_1' x_2''\right]^{\frac{1}{3}} dp. \tag{4-5}$$

O comprimento afim original da oval é igual a

$$L_a = \Phi(+1) + \Phi(-1).$$

Considerando a oval simetrizada

$$L_a^* = 2\Phi(0).$$

Devemos, então, provar que

$$\Phi(+1) + \Phi(-1) - 2\Phi(0) \leq 0$$

Esta desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} = \ddot{\Phi}(t) \leq 0, \text{ para } |t| < 1,$$

Substituindo (4-4) em (4-5), somos levados ao seguinte resultado:

$$\ddot{\Phi}(t) = \frac{1}{18}\int_0^1 \frac{[x_1'(\bar{x}_2'' - \underline{x}_2'') - (\bar{x}_2' - \underline{x}_2')x_1'']^2}{(x_1'x_2'' - x_2'x_1'')^{\frac{5}{3}}} dp \tag{4-6}$$

De (4-4), temos

$$x_1'x_2'' - x_2'x_1'' > 0 \tag{4-7}$$

e, portanto, $\ddot{\Phi} \leq 0$, como queríamos demonstrar.

No caso de $\ddot{\Phi} = 0$, então

$$x_1'(\bar{x}_2'' - \underline{x}_2'') - (\bar{x}_2' - \underline{x}_2')x_1'' = 0 \tag{4-8}$$

Após a integração da equação diferencial (4-8) em $\bar{x}_2 - \underline{x}_2$, teremos

$$\bar{x}_2 - \underline{x}_2 = a + bx_1 \text{ (equação de uma reta)} \tag{4-9}$$

A equação (4-9) nos mostra que os pontos médios das cordas paralelas (simetrização) encontram-se em uma linha reta.

■

Assim, conjungando os lemas 4.0.9 e 4.0.10, concluímos a demonstração da primeira desigualdade isoperimétrica afim, o teorema 4.1.

No caso de igualdade, o lema 4.0.10 nos diz que as curvas centrais da oval devem ser retas. Como a elipse é a única oval com curvas centrais retas, não importando a direção, concluímos que a igualdade na desigualdade isoperimétrica vale somente para elipses.