

5

Desigualdade de Minkowski e a terceira desigualdade isoperimétrica afim

5.1

Áreas Mistas

O conceito área mista decorre da interação entre duas curvas convexas e fechadas. Assim, vejamos:

Sejam as funções vetoriais $X_0 = X_0(\theta)$ e $X_1 = X_1(\theta)$, associadas às curvas \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 . Ambas são parametrizadas em função de um mesmo θ . Automaticamente, verificamos a existência de uma correspondência biunívoca entre elas — pontos correspondentes entre às duas curvas têm o vetor normal $N_i = N_i(\theta)$; ($i = 0, 1$), com a mesma direção (fig. 5.1).

Seja a função de suporte $p_i = p_i(\theta)$; ($i = 0, 1$), que retorna a distância entre a origem do plano cartesiano, interior à \mathcal{C}_0 , e a reta tangente no ponto X_i ; ($i = 0, 1$). Assim, teremos para \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , respectivamente,

$$p_0 = -X_0 N, \quad (5-1)$$

$$p_1 = -X_1 N, \quad (5-2)$$

Tanto p_0 quanto p_1 apresentam período 2π , obviamente.

Desse modo, passamos a estudar agora uma nova curva convexa \mathcal{C} obtida a partir da translação de \mathcal{C}_1 por todos os pontos de \mathcal{C}_0 , como se estes fossem os pontos de origem de \mathcal{C}_1 . Assim sendo, podemos pensar \mathcal{C}_1 como sendo a fronteira de uma superfície rígida, uma lâmina, que tem liberdade para deslizar, somente por translações, sobre o plano no qual \mathcal{C}_0 está fixado. Isto é, deslizamos a origem de \mathcal{C}_1 ao longo de \mathcal{C}_0 , sem rotações em cima de seu próprio eixo (fig. 5.2).

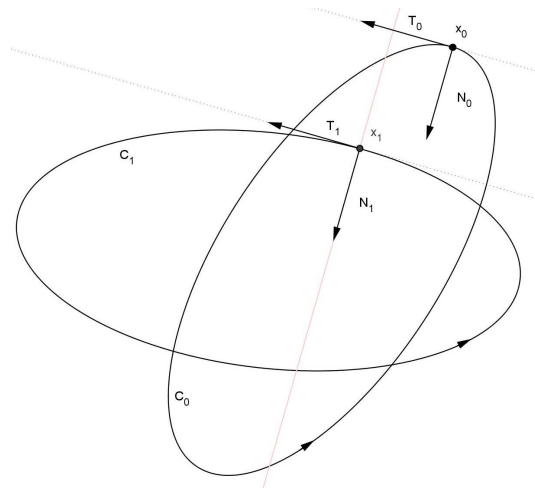


Figura 5.1: Curvas convexas e fechadas.

Portanto, C_1 , ao transladar por sobre C_0 , faz com que o ponto de contato da nova curva C tenha a mesma direção do movimento que a origem em C_0 possui. Consequentemente, podemos concluir que a função suporte de C seja

$$p = p_0 + p_1$$

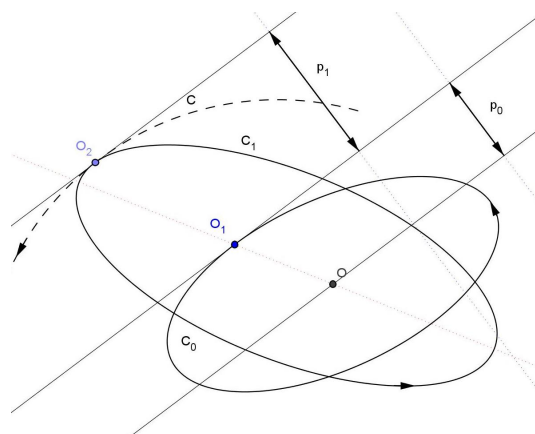


Figura 5.2:

Lema 5.1.1 *O comprimento e a área da curva C são calculadas, respectivamente, por*

$$L = L_0 + L_1$$

e

$$S = S_0 + 2S_{01} + S_1,$$

onde L_i e S_i são o comprimento e a área de \mathcal{C}_i , ($i = 0, 1$) e

$$S_{01} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p_0 p_1 - p_0' p_1'] d\theta$$

é a área mista de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 .

Prova. Sabemos de (2-12) que

$$L = \int_0^{2\pi} p d\theta.$$

Assim

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} p d\theta = \int_0^{2\pi} (p_0 + p_1) d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow L &= \int_0^{2\pi} p_0 d\theta + \int_0^{2\pi} p_1 d\theta = L_0 + L_1. \end{aligned}$$

E, de(2-13),

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - (p')^2) d\theta.$$

Assim

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(p_0 + p_1)^2 - (p_0' + p_1')^2] d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(p_0^2 + 2p_0 p_1 + p_1^2) - (p_0'^2 + 2p_0' p_1' + p_1'^2)] d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} (p_0^2 - p_0'^2) d\theta + 2 \int_0^{2\pi} (p_0 p_1 - p_0' p_1') d\theta + \int_0^{2\pi} (p_1^2 - p_1'^2) d\theta \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= S_0 + 2S_{01} + S_1, \end{aligned}$$

■

Nosso estudo considera a formação da curva \mathcal{C} a partir da translação de \mathcal{C}_1 ao longo de \mathcal{C}_0 . Entretanto, devido à simetria da construção, podemos transladar \mathcal{C}_0 ao longo de \mathcal{C}_1 e, mesmo assim, obteríamos a mesma curva \mathcal{C} . Comprovamos a afirmação, posto que $p_0 + p_1 = p_1 + p_0$. Da mesma forma, podemos afirmar que $S_{01} = S_{10}$.

Podemos também obter uma fórmula para calcular a área mista decorrente da integração do diferencial exato de

$$d(p_0 p_1') = (p_0' p_1' + p_0 p_1'') d\theta,$$

o que nos leva à seguinte igualdade:

$$\oint p'_0 p'_1 d\theta = - \oint p_0 p''_1 d\theta.$$

Então, utilizando (2-10) e (2-11), podemos escrever

$$\begin{aligned} \oint p_0 p_1 d\theta - \oint p'_0 p'_1 d\theta &= \oint p_0 p_1 d\theta + \oint p_0 p''_1 d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_0 p_1 - p'_0 p'_1) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_0 (p_1 + p''_1) d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{01} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_0 \rho_1 d\theta = \oint p_0 ds_1. \end{aligned}$$

Analogamente, poderíamos escrever

$$S_{10} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_1 \rho_0 d\theta = \oint p_1 ds_0. \tag{5-3}$$

Outrossim, poderíamos pensar na translação de \mathcal{C}_1 de modo que esta estivesse em contato com \mathcal{C}_0 externamente. Assim, a translação de \mathcal{C}_1 originaria uma nova curva \mathcal{C}_2 (fig. 5.3) e, desse modo, \mathcal{C}_2 apresentaria uma nova função suporte

$$p_2(\theta) = p_0(\theta) + p_1(\pi + \theta).$$

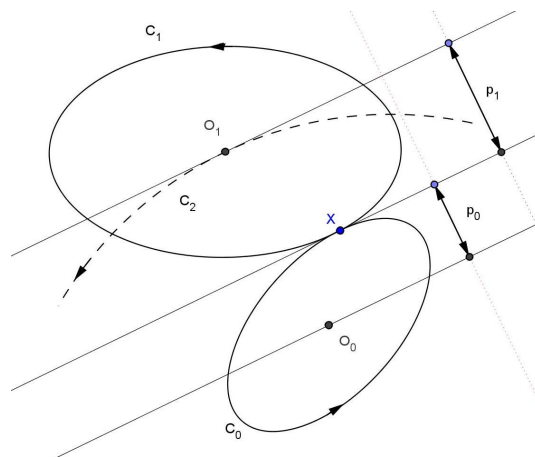


Figura 5.3:

Observamos agora que $p_1(\pi + \theta)$ é a função suporte da curva \mathcal{C}_1^* obtida pela reflexão de \mathcal{C}_1 , tendo como referencial a origem ou, de forma equivalente, pela rotação de \mathcal{C}_1 de um ângulo π . Assim, a curva \mathcal{C}_2 é obtida a partir da mesma construção descrita anteriormente e, portanto, o lema 2.6.3 se aplica.

Lema 5.1.2 *O comprimento e a área da curva \mathcal{C}_2 são calculadas, respectivamente, por*

$$L_2 = L_0 + L_1$$

e

$$S_2 = S_0 + 2S_{01}^* + S_1,$$

onde

$$S_{01}^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p_0(\theta)p_1(\pi + \theta) - p_0'(\theta)p_1'(\pi + \theta)]d\theta.$$

Ou simplesmente

$$S_{01}^* = \frac{1}{2} \oint p_1(\pi + \theta)d_{s_0}(\theta).$$

Prova. Geométrica e analiticamente, verificamos de forma clara que \mathcal{C}_1^* e \mathcal{C}_1 têm o mesmo comprimento e a mesma área, logo, os resultados apresentados nesse lema são consequência direta do lema 5. Cabe observarmos também que S_{01}^* decorre da aplicação direta de (5-3), onde $p_1^*(\theta) = p_1(\pi + \theta)$. ■

Observação: Sabemos que a área mista S_{10} pode ser calculada utilizando a equação (5-3). Entretanto, podemos utilizar uma outra notação

$$S_{01} = \frac{1}{2} \oint [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1]ds$$

onde o parâmetro s seja tal que as tangentes à \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 no ponto s sejam paralelas. Para maiores detalhes ver [2].

5.2

A Desigualdade de Minkowski

Nesta seção, o principal resultado que buscamos é entender e demonstrar a versão bidimensional da desigualdade de Brunn-Mikowski. A exposição é baseada em [1].

Entretanto, para um bom entendimento da demonstração do teorema em questão, os conceitos de raios relativos interiores, *inradius*, e exteriores, *circunradius*, serão necessários.

Deste modo, sejam as curvas \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 onde,

$$\mathcal{C}_0 = \partial K_0$$

e

$$\mathcal{C}_1 = \partial K_1$$

Então, o *inradius* de \mathcal{C}_0 relativo a \mathcal{C}_1 é o maior número real r_0 , tal que, após uma translação de r_0K_1 , este se encontra contido em K_0 . O *circunradius* de \mathcal{C}_0 relativo a \mathcal{C}_1 é o menor número real R_0 , tal que, após uma translação de R_0K_1 , este contém K_0 (fig. 5.4). Obviamente, $R_0 \geq r_0$ com igualdade se, e somente se, K_0 for uma translação de r_0K_1 ou, em outras palavras, K_0 e K_1 forem homotéticos.

Observação: se \mathcal{C}_1 for um círculo de raio unitário, então r_0 e R_0 serão os raios dos círculos inscritos e circunscritos a \mathcal{C}_0 , respectivamente.

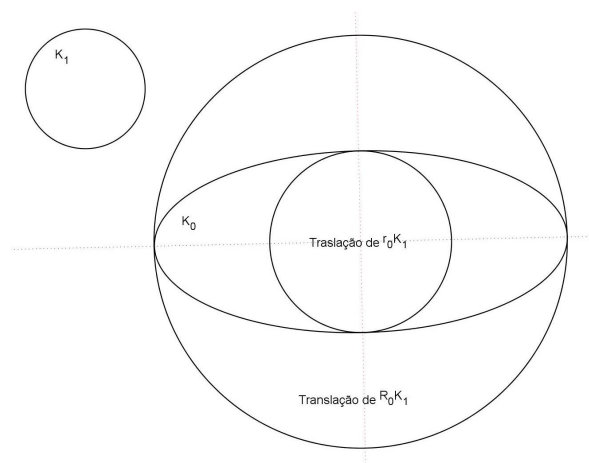


Figura 5.4: Raios interior e exterior

Teorema 5.1 *Desigualdade de Minkowski*

Seja \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 curvas convexas e fechadas, com áreas S_0 e S_1 , respectivamente, e área mista S_{01} , então

$$S_{01}^2 \geq S_0S_1,$$

com igualdade se, e somente se, \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 forem homotéticas.

A demonstração do teorema 5.1 será desenvolvida a partir de um formato mais sólido e robusto, em que os conceitos de *inradius* e *circunradius* serão utilizados. Assim, apresentamos um outro teorema que, quando particularizado, se transforma no formato mais simples apresentado no teorema 5.1.

Teorema 5.2 *Desigualdade de Minkowski*

Sejam \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 curvas convexas e fechadas, com áreas S_0 e S_1 , respectivamente, e área mista S_{01} . Sejam ainda r_0 e R_0 o *inradius* e o *circunradius* de

\mathcal{C}_0 relativo a \mathcal{C}_1 , respectivamente. Então

$$S_{01}^2 - S_0 S_1 \geq \frac{S_1^2}{4} (R_0 - r_0)^2.$$

Prova. Primeiramente, escolhemos um número fixo r , tal que $r_0 \leq r \leq R_0$. Em seguida, para cada ponto $X = (x, y)$ do plano, consideramos a translação $X + r\mathcal{C}_1$ de \mathcal{C}_1 . Consequentemente, \mathcal{C}_0 e $X + r\mathcal{C}_1$ passam a apresentar pontos de intersecção (fig. 5.5). Atribuímos, então, a $N(X)$ essa quantidade de pontos, isto é,

$$N(X) = | (x + r\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{C}_0 | \tag{5-4}$$

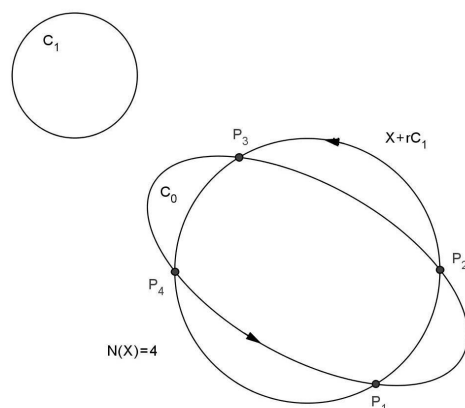


Figura 5.5: Expansão e a translação de uma curva convexa

Isto posto, passamos a utilizar esse número $N(X)$ como um parâmetro de análise da conjunção das curvas \mathcal{C}_0 e $X + r\mathcal{C}_1$. Assim, para sermos mais precisos, construímos a integral dupla,

$$I = \int \int_{E^2} N(x) dx dy \tag{5-5}$$

É importante observarmos que a função $N(X)$ pode ser igual a infinito, para certos valores de X , decorrente de as curvas \mathcal{C}_0 e $X + r\mathcal{C}_1$ apresentarem um ponto de tangência. Desse modo, a intersecção entre \mathcal{C}_0 e $X + r\mathcal{C}_1$ recairia em uma superposição, por exemplo, de parte destas curvas, o que acarretaria em uma região de área zero (figura 5.6). Consequentemente, o valor de $N(X)$ não fará diferença para a integral I .

Pensando ainda nas situações de intersecção, podemos utilizar como referência de análise a curva exterior \mathcal{C}_2 , já estudada no item 5.1, Áreas mistas,

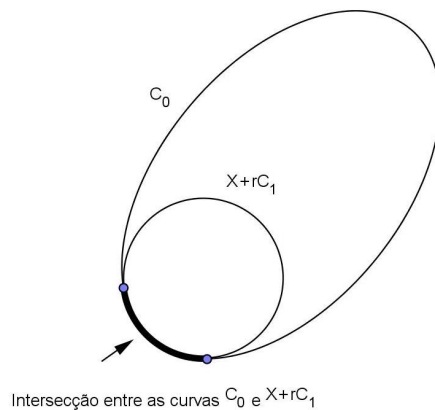


Figura 5.6:

página 41, mas com \mathcal{C}_1 substituída por $X+r\mathcal{C}_1$. Assim, caso X esteja no exterior de \mathcal{C}_2 , então $N(X) = 0$. Entretanto, caso X esteja no interior de \mathcal{C}_2 , $N(X) \geq 0$ (fig. 5.7).

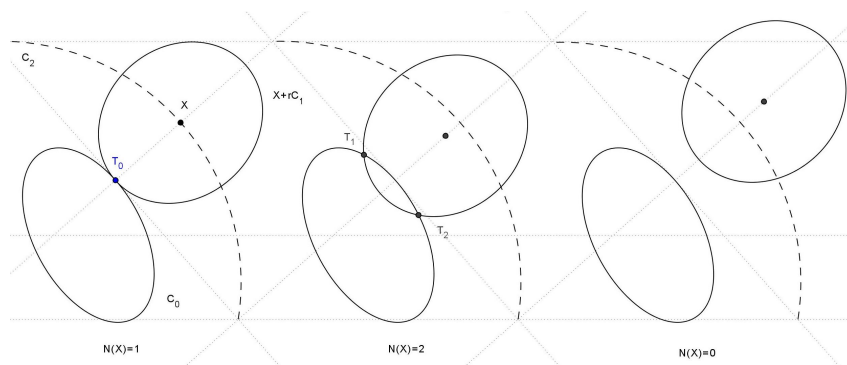


Figura 5.7:

Por outro lado, pensar em $X+r\mathcal{C}_1$ envolvendo inteiramente \mathcal{C}_0 , contradiz ser $r \leq R_0$, ou \mathcal{C}_0 envolvendo inteiramente $X+r\mathcal{C}_1$, o que contradiz ser $r_0 \leq r$.

Assim sendo, se ignorarmos o contorno de \mathcal{C}_2 como fronteira e a situação \mathcal{C}_0 e $X+r\mathcal{C}_1$ tangentes internamente, onde $N(X)$ possa apresentar valores que não servirão como parâmetros confiáveis, podemos dirimir que $N(X) \geq 2$.

Deste modo, quando duas curvas se interceptarem e realmente se cruzarem, não havendo tangentes entre estas, então a intersecção entre as curvas será maior ou igual a 2.

De acordo com o lema 5.1.2, aplicado a \mathcal{C}_0 e a $r\mathcal{C}_1$, teremos para a área de K_2 , onde $\mathcal{C}_2 = \partial K_2$, o seguinte resultado:

$$S_2 = S_0 + 2rS_{01}^* + r^2S_1.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{E^2} N(X) dx dy = \\ I &= \int \int_{K^2} N(X) dx dy \geq \int \int_{K^2} 2 dx dy \geq 2S_2 \end{aligned}$$

Logo,

$$I \geq 2(S_0 + 2rS_{01}^* + r^2S_1) \quad (5-6)$$

A inequação (5-6) nos fornece o menor resultado para o parâmetro I . O que precisamos agora é encontrar como precisar o valor de I e isso será feito em uma sequência de três etapas:

1. Encontraremos todas as translações de $r\mathcal{C}_1$ que passam por um ponto fixo X_0 ;
2. Encontraremos todas as translações de $r\mathcal{C}_1$ que interceptam um pequeno segmento, também fixo e;
3. Inscreveremos em C_0 um polígono, isto é, uma aproximação discreta da própria curva C_0 .

Vamos aos detalhes: Sendo X_0 um ponto fixo, o deslocamento da origem de $r\mathcal{C}_1$ produz a oval $X_0 - r\mathcal{C}_1$, conforme $r\mathcal{C}_1$ é transladada a todas as posições que passem através de X_0 , isto é,

$$X_0 \in (X + r\mathcal{C}_1).$$

Então,

$$\begin{aligned} X_0 &= X + r\mathcal{C}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= X_0 - r\mathcal{C}_1. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$X \in (X_0 - r\mathcal{C}_1).$$

Na figura 5.8, podemos observar a construção — curva expandida, homotetia, translação.

$$r\mathcal{C}_1 \rightarrow -r\mathcal{C}_1 \rightarrow X_0 - r\mathcal{C}_1$$

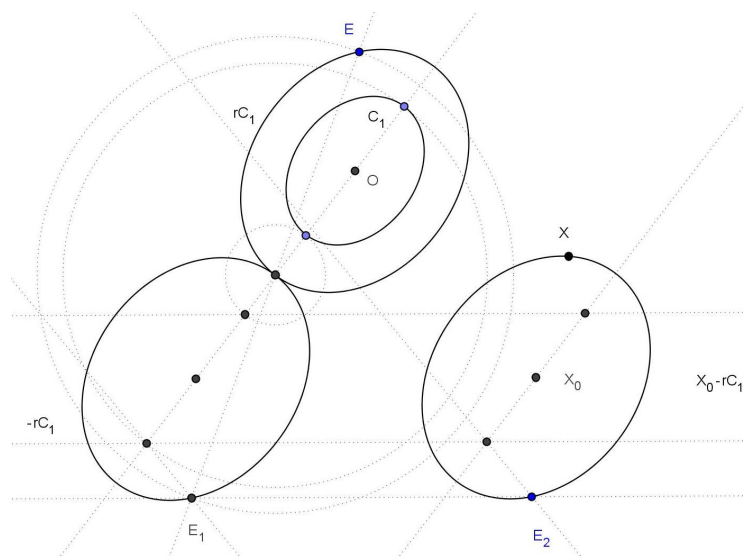


Figura 5.8:

Agora, consideramos um segmento de comprimento ds_0 , admitindo ser este uma parte fixa da curva \mathcal{C}_0 . Quais translações de $r\mathcal{C}_1$ interceptam este segmento? Todas cujo centro de translação se encontra em algum ponto da extensão de $X_0 - r\mathcal{C}_1$, conforme X_0 se desloca ds_0 (fig. 5.9).

Ignorando a pequena área no final da curva, por ser desprezível em magnitude, a área de cada metade dessas pequenas regiões é calculada multiplicando-se sua base, $r[p_1(\theta) + p_1(\theta + \pi)]$ pela sua altura, ds_0 . Exceto pelas pequenas áreas desprezadas, cada ponto dessa região vem a ser o centro de uma translação de $r\mathcal{C}_1$, a qual intercepta o segmento uma vez.

Assim, a contribuição deste segmento para a integral I é

$$2r[p_1(\theta) + p_1(\theta + \pi)]ds_0 + Ods_0.$$

Conseqüentemente,

$$I = 2r \int_0^{2\pi} [p_1(\theta) + p_1(\theta + \pi)]ds_0. \tag{5-7}$$

Aplicando a equação (5-3) e o lema 5.1.2, podemos escrever

$$I = 4r(S_{01} + S_{01}^*). \tag{5-8}$$

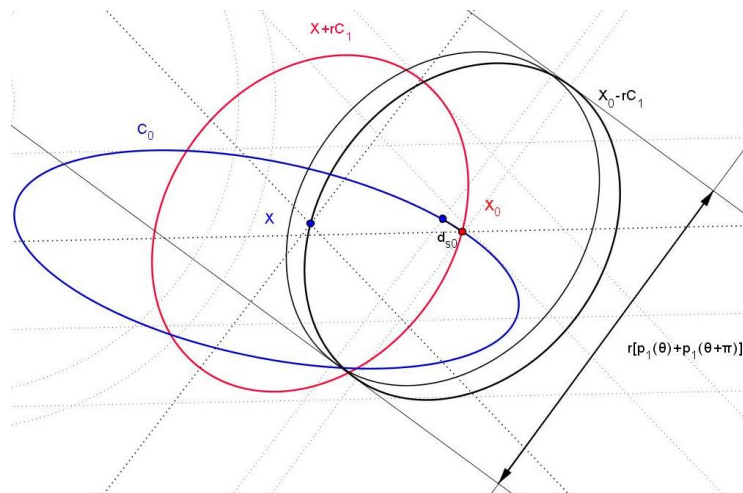


Figura 5.9:

Logo, (5-8) nos retorna o valor exato da integral I .

Da inequação (5-6) e da equação (5-8), teremos

$$2rS_{01} \geq S_{01} + r^2S_1, \tag{5-9}$$

para todo e qualquer r tal que, $r_0 \leq r \leq R_0$.

Um pouco de reflexão,

A existência de um número real r , tal que o polinômio $x^2S_1 - 2xS_{01} + S_0$ é menor que ou igual à zero, em $x = r$, implica dizer que este polinômio tem raízes reais e, conseqüentemente, discriminante positivo,

$$S_{01}^2 - S_0S_1 \geq 0.$$

Este resultado nos apresenta a Desigualdade de Minkowski em seu formato mais simples. Entretanto, o fato de que o polinômio é não positivo, no intervalo $r_0 \leq r \leq R_0$, torna mais completa nossa análise. Assim, completando os quadrados da inequação (5-9), teremos

$$S_{01}^2 - S_0S_1 \geq (rS_1 - S_{01})^2.$$

Substituindo r pelos valores extremos do intervalo, $r_0 \leq r \leq R_0$ e reorganizando o sinal no interior do termo elevado ao quadrado,

$$\begin{aligned} S_{01}^2 - S_0S_1 &\geq (R_0S_1 - S_{01})^2 \\ S_{01}^2 - S_0S_1 &\geq (S_{01} - r_0S_1)^2. \end{aligned}$$

Assim, somando membro a membro, as duas desigualdades

$$\begin{aligned} 2(S_{01}^2 - S_0S_1) &\geq (R_0S_1 - S_0)^2 + (S_0 - r_0S_1)^2 \\ (S_{01}^2 - S_0S_1) &\geq \frac{1}{2}[(R_0S_1 - S_0)^2 + (S_0 - r_0S_1)^2]. \end{aligned}$$

E, pelo simples fato de a média de quadrados ser maior ou igual ao quadrado da média,

$$(S_{01}^2 - S_0S_1) \geq \frac{1}{2}[(R_0S_1 - S_0) + (S_0 - r_0S_1)]^2.$$

E, finalmente

$$(S_{01}^2 - S_0S_1) \geq \frac{1}{4}S_1^2(R_0 - r_0)^2,$$

■

5.3

Desigualdade isoperimétrica euclideana

Um corolário imediato da desigualdade de Mikowski é a desigualdade isoperimétrica euclideana clássica.

Corolário 5.3 *Para uma curva \mathcal{C} , convexa e fechada de comprimento L_e e área S , vale a seguinte desigualdade:*

$$\frac{L_e^2}{S} \geq 4\pi,$$

com igualdade acontecendo somente quando a curva \mathcal{C} for um círculo.

Prova. De fato, se admitirmos que \mathcal{C}_1 é um círculo de raio unitário e \mathcal{C}_0 uma curva convexa e fechada \mathcal{C} , teremos

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi.r^2 = \pi, \\ S_0 &= S, \\ S_{01} &= \frac{1}{2} \oint p_1 ds_0 = \frac{L_e}{2}. \end{aligned}$$

Então, substituíndo esses valores na desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} S_{01}^2 - S_0S_1 &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{L_e}{2}\right)^2 - S.\pi &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{L_e^2}{4} \geq S.\pi \Rightarrow \frac{L_e^2}{S} &\geq 4\pi. \end{aligned} \tag{5-10}$$

■

5.4

A terceira desigualdade isoperimétrica afim

Um segundo corolário imediato da Desigualdade de Minkowski é a seguinte desigualdade isoperimétrica afim:

Corolário 5.4 *Para curvas convexas e fechadas, necessariamente ovais, vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_{\mathcal{C}} \mu ds \leq \frac{L_a^2}{2S},$$

onde μ é a curvatura afim da curva \mathcal{C} , de comprimento ou perímetro afim L_a e área S . A igualdade acontece somente quando \mathcal{C} for uma elipse.

Prova. Seja \mathcal{C}_0 o espaço convexo fechado determinado pela curva \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 o espaço convexo fechado determinado pela curva $-\mathcal{C}_{ss}$, de acordo como lema 2.5.2 $-\mathcal{C}_{ss}$ é convexa. Então, utilizando a desigualdade de Mikowski, teremos

$$S_{01}^2 - S_0 S_1 \geq 0,$$

onde

$$\begin{aligned} S_0 &= S, \\ S_1 &= \frac{1}{2} \oint [\mathcal{C}_{ss}, \mathcal{C}_{sss}] ds = \frac{1}{2} \oint \mu ds, \\ S_{01} &= -\frac{1}{2} \oint [\mathcal{C}, \mathcal{C}_{sss}] ds \end{aligned}$$

Entretanto, sabendo que o vetor tangente à \mathcal{C} e o tangente à \mathcal{C}_{ss} , em um mesmo ponto, são paralelos e, aplicando o lema 2.5.2, podemos reescrever S_{01} do seguinte modo

$$\begin{aligned} S_{01} &= -\frac{1}{2} \oint [\mathcal{C}, \mathcal{C}_{sss}] ds \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{01} &= -\frac{1}{2} \oint [\mathcal{C}, -\mu \mathcal{C}_s] ds \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{01} &= \frac{1}{2} \oint \mu [\mathcal{C}, \mathcal{C}_s] ds = \frac{1}{2} L. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2} L_a\right)^2 - S \cdot \frac{1}{2} \oint \mu ds \geq 0.$$

Assim,

$$\oint \mu ds \leq \frac{L_a^2}{2S}.$$

■