



Paulo César Alves Araujo

**Algumas Desigualdades Isoperimétricas Afins
para Curvas Planas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Abril de 2011



Paulo César Alves Araujo

**Algumas Desigualdades Isoperimétricas Afins
para Curvas Planas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Ralph Costa Teixeira

Instituto de Matemática – UFF

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Abril de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Paulo César Alves Araujo

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ; Especialista em Avaliação Educacional pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ e Especialista em Instrumentação para o Ensino da Matemática pela Universidade Federal Fluminense – UFF.

Ficha Catalográfica

Araujo, Paulo

Algumas Desigualdades Isoperimétricas Afins para Curvas Planas / Paulo César Alves Araujo; orientador: Marcos Craizer. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 53 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Desigualdades isoperimétricas afins. 3. Curvas planas convexas. 4. Geometria diferencial afim. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Parece que foi ontem...
A inspiração e a coragem de seguir em frente...
Muito simples, talvez...
O mais completo – início. A continuidade, o contínuo. A insatisfação com o
estagnado perfeito. O gênese do conhecimento. O Fênix do olhar, o ver
cristalino. A simplicidade do estar ao lado. A aura que não se destaca, mas
abraça, acalanta... Força sem esforço.
Eu continuo, eu volto...
Mas sempre ao seu lado. Como crescer sem você?
Patrícia, meu amor!

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Marcos Craizer.

Acreditar em um desconhecido é uma demonstração de visão, de sensibilidade, um ato de fé no ser humano. Obrigado pelos ensinamentos, pela paciência e, sobretudo, pela amizade construída ao longo do difícil labor deste trabalho. O título de Professor lhe é perfeito.

Aos meus Professores

Ao longo do Curso, muitas são as dificuldades. Há obstáculos que parecem intransponíveis. Entretanto, existem os Professores – nossos guias, nossos estimulantes, nossos revigorantes. Aqueles que conseguem nos convencer de que as dificuldades existem para serem ultrapassadas e que estas só surgem em nosso caminho para que, ao serem vencidas, nos proporcionem o doce sabor da conquista.

Aos meus amigos e colegas de Curso

Dividir, compartilhar, ceder, doar... Ajudar àquele que está ao lado significa reservar um lugar especial do lado direito do peito.

Ao quadro de funcionários do Departamento de Matemática

A administração, seja pública ou privada, precisa de pessoas dedicadas e competentes e você, Creuza, sintetiza o que há de melhor nessa área.

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Oportunizar a convivência em um espaço de brilhantismo, excelência, idéias e ideais, sem pedir nada mais do que a dedicação aos estudos, é uma das características mais nobres de uma Instituição de Ensino Superior.

Aos meus pais

Educação, atenção, carinho... Um conjunto sinérgico presente em vocês, o tempo todo.

Obrigado a todos.

Resumo

Araujo, Paulo; Craizer, Marcos. **Algumas Desigualdades Isoperimétricas Afins para Curvas Planas**. Rio de Janeiro, 2011. 53p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho, estudamos algumas desigualdades isoperimétricas associadas a curvas convexas fechadas, ou ovais. A primeira desigualdade isoperimétrica, chamada desigualdade de Blaschke, descreve um limite inferior para a razão entre área máxima de um triângulo inscrito na curva e a área da oval. A segunda desigualdade é similar à desigualdade isoperimétrica euclidiana clássica e descreve um limite superior para o comprimento afim da oval em termos da sua área. A terceira e última desigualdade descreve um limite superior para a integral da curvatura em relação ao comprimento de arco afim, em termos do comprimento afim e da área da oval.

Palavras-chave

Desigualdades isoperimétricas afins; Curvas planas convexas; Geometria diferencial afim;

Abstract

Araujo, Paulo; Craizer, Marcos. **Some Affine Isoperimetric Inequalities**. Rio de Janeiro, 2011. 53p. D.Sc. Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, we study some isoperimetric inequalities associated the closed convex curves, or simply ovals. The first isoperimetric inequality, called inequality Blaschke, describes a lower limit for the ratio between maximum area of a triangle inscribed in the curve and the area of that curve, oval. The second inequality is similar isoperimetric euclidean inequality and describes an upper limit to the affine length of the order oval in terms of their area. The third and last inequality describes a upper limit for the integral of curvature with respect to the length of affine arc in terms of affine length and order of area of the oval.

Keywords

Affine isoperimetric inequalities; Convex planar curves; Affine differential geometry;

Sumário

1	Introdução	11
2	Conceitos Básicos da Geometria Diferencial Afim	13
2.1	Revisão de Cálculo - Curvas parametrizadas	13
2.2	Transformação afim	18
2.3	Interpretação geométrica do comprimento afim de um arco de parábola	18
2.4	Comprimento afim de uma curva qualquer sem pontos de inflexão	21
2.5	Vetores tangentes e normais afins, curvatura afim	22
2.6	Invariância afim	24
3	Uma desigualdade de Blaschke	27
4	A segunda desigualdade isoperimétrica afim	35
5	Desigualdade de Minkowski e a terceira desigualdade isoperimétrica afim	38
5.1	Áreas Mistas	38
5.2	A Desigualdade de Minkowski	42
5.3	Desigualdade isoperimétrica euclideana	49
5.4	A terceira desigualdade isoperimétrica afim	50
6	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	51

Lista de figuras

2.1	Curva convexa fechada	13
2.2	Componentes Tangente e Normal	14
2.3	Componente Normal	16
2.4	Parábola definida por um ponto e uma direção	19
3.1	Domínio convexo fechado	27
3.2	Simetriação de Steiner	28
3.3	Simetriação de Steiner 2	32
3.4	Triângulo Maximal	33
3.5	Triângulo Maximal e a elipse	33
5.1	Curvas convexas e fechadas 1	39
5.2	Curvas convexas e fechadas 2	39
5.3	Curvas convexas e fechadas 3	41
5.4	Curvas convexas e fechadas 4 - raios interior e exterior	43
5.5	Curvas convexas e fechadas 5	44
5.6	Curvas convexas e fechadas 6	45
5.7	Curvas convexas e fechadas 7	45
5.8	Curvas convexas e fechadas 8	47
5.9	Curvas convexas e fechadas 9	48

Pois, tendo aprendido algo, jamais neguei, fazendo o conhecimento ser como uma descoberta minha; mas louvo como sábio o que me instruiu, tornando públicas as coisas que aprendi com ele.

Platão, *Hippias Menor*, 372 c5-8 .