1
Introdução

1.1
Motivação

Estamos habituados com a visualização de objetos em três dimensões, pois o mundo em que vivemos é tridimensional, porém a visualização computacional de objetos em espaços de dimensões maiores que três é mais complexa. Tais objetos não existem no mundo físico, embora matematicamente eles sejam estudados.

Objetos geométricos em $\mathbb{R}^4$ podem ter 0, 1, 2, 3 ou 4 dimensões. Um exemplo de um objeto geométrico de 4 dimensões em $\mathbb{R}^4$ é o hipercubo. Podemos construí-lo começando com um ponto, ou seja, um objeto de dimensão 0 (ver figura 1.1) e movendo esse ponto na direção do eixo x obtemos um segmento de reta, que possui dimensão 1. Passamos para um objeto de dimensão 2 movendo o segmento na direção do eixo y e obtemos um quadrado. Movendo o quadrado na direção do eixo z obtemos um cubo. Finalmente, movendo o cubo na direção do eixo w (a quarta dimensão) obtemos o hipercubo.

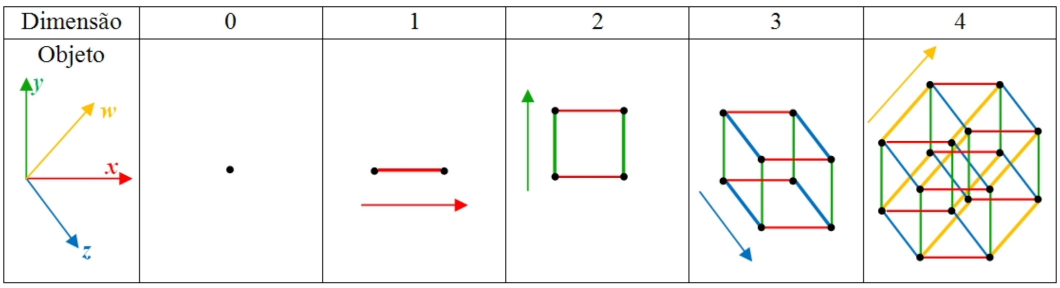

Figura 1.1: Hipercubo.

Para visualizar tais objetos podemos projetá-los em um subespaço de dimensão 3 no $\mathbb{R}^4$ e depois escolher um segundo subespaço bidimensional do primeiro subespaço para ser o plano de tela. Essas projeções são definidas pela visão de dois observadores distintos, que chamamos de observador 1 e observador 2; a primeira projeção é controlada pelo observador 1 e a segunda por ambos, observador 1 e observador 2.

As imagens de objetos em $\mathbb{R}^4$ quando projetadas na tela do computador, geralmente, são muito complexas e difíceis de interpretar. Uma forma de melhorar a visualização de tais imagens é mudar a direção da projeção; que pode ser feito através dos ângulos de *Euler*[1]. Isso também se aplica quando se trata de curvas, especialmente curvas silhuetas de superfícies em $\mathbb{R}^4$. A curva silhueta é um instrumento importante para auxiliar a interpretação de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Mas que curva é essa?

Hoffmann e Zhou (10) definem pontos silhuetas de uma superfície no $\mathbb{R}^4$ com relação a uma projeção, como os pontos não-singulares[2] tais que o plano tangente é projetado em uma reta ou um ponto. A curva silhueta é o conjunto de todos esses pontos.

Os pontos silhueta de superfícies em $\mathbb{R}^3$ relacionados a uma projeção, de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, são controladas por um observador. Em $\mathbb{R}^4$ temos dois tipos de pontos silhuetas: um com relação a primeira projeção, de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$, controlados pelo observador 1, outro com relação a projeção combinada de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$, controlados pelos dois observadores, 1 e 2.

Uma curva silhueta relacionada a duas projeções é mais complexa do que em relação a uma, pois quando a projetamos de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$ muitas informações geométricas são perdidas. Essas informações são aquelas que o observador 1 consegue enxergar e que não são vistas pelo observador 2. Um exemplo são os pontos silhueta na direção do observador 1 nos quais o plano tangente ao objeto tem direção ortogonal ao plano de projeção.

1.2 Trabalhos Correlatos

Alguns trabalhos (12, 18) apresentam métodos para a visualização de superfícies em $\mathbb{R}^4$ como o gráfico de funções complexas. Tais gráficos são primeiro projetados para o espaço tridimensional e em seguida a imagem é renderizada na tela do computador.

Outros trabalhos apresentam métodos para visualizar objetos em $\mathbb{R}^4$ utilizando iluminação. Uma família de técnicas para criar intuitivamente imagens iluminadas de objetos matemáticos quadridimensionais é proposta em (9). Técnicas para visualizar objetos matemáticos em $\mathbb{R}^4$ que exploram efeitos de iluminação em quatro dimensões são mostradas em (8). Um sistema interativo utilizando GPU para visualizar superfícies e variedades tridimensionais

[1] *Leonhard Paul Euler* (1707 - 1783): matemático e físico suíço.
[2] $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4$ é um ponto singular se não possui um plano tangente.

imersas em $\mathbb{R}^4$ e iluminadas por fontes de luz quadridimensionais é descrito em (3).

Hoffmann e Zhou (10) discutem técnicas de visualizar superfícies em $\mathbb{R}^4$ incluindo métodos para especificar a orientação de objetos e dos centros de projeção e para determinar pontos silhueta de uma superfície em relação às projeções. Eles descrevem métodos para determinar explicitamente a curva silhueta de superfícies implícitas aproximadas por uma malha poligonal, sem a necessidade de deduzí-la de uma imagem projetada.

Nessa dissertação apresentamos métodos para gerar e visualizar silhuetas de superfícies em $\mathbb{R}^4$ definidas implicitamente sem a malha e parametricamente através de uma subdivisão robusta do domínio adaptada por uma quadtree utilizando aritmética intervalar.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira:

No capítulo 2 introduzimos conceitos básicos de aritmética intervalar.

No capítulo 3 descrevemos as técnicas para rotacionar e especificar a orientação de objetos em $\mathbb{R}^4$ utilizando os ângulos de *Euler* e apresentamos as definições de silhueta de uma superfície em $\mathbb{R}^4$.

No capítulo 4 apresentamos métodos para gerar e visualizar a curva silhueta de uma superfície em $\mathbb{R}^4$ definida na forma implícita e também na forma paramétrica, bem como a implementação de tais métodos.

O capítulo 5 é dedicado à visualização da curva silhueta e de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Apresentamos os resultados e discussões através de exemplos. No final do capítulo incluímos duas aplicações para esses algoritmos: na geração de curvas *offset* e no estudo de colisões de modelos geométricos.

No capítulo 6 concluímos o trabalho e apresentamos sugestões de trabalhos futuros.