2
Aritmética Intervalar

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos de aritmética intervalar utilizados para a realização do presente trabalho.

A aritmética intervalar é uma técnica que estuda as propriedades de funções definidas em intervalos, ao invés de números reais. Ela foi introduzida de forma moderna por Ramom E. Moore (13) em sua dissertação no ano de 1960, embora já houvessem relatos de sua forma em 1924 e 1931.

2.1
Intervalo

Definição 2.1.1 (Intervalo) *Um intervalo real, ou apenas intervalo, é um subconjunto não-vazio, fechado e limitado de números reais da forma*

$$[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}] := \{x \in \mathbb{R};\ \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}, \tag{2-1}$$

onde $\underline{x}$ é o limite inferior e $\overline{x}$ é o limite superior do intervalo. O conjunto de todos os intervalos reais é denotado por $\mathbb{IR}$.

O limite inferior também é chamado de *ínfimo* e denotado por $\inf([x])$ e o limite superior também é chamado de *supremo* e denotado por $\sup([x])$.

Os intervalos podem ser submetidos a operações aritméticas elementares, como soma, subtração, multiplicação e divisão.

Definição 2.1.2 *Dados os intervalos $[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}]$ e $[y] \equiv [\underline{y}, \overline{y}]$, então as quatro operações elementares sobre os intervalos são dadas por*

$$[x] \circ [y] := \{x \circ y \mid x \in [x],\ y \in [y]\}, \quad \text{para} \circ \in \{+, -, \times, \div\}.$$

De forma prática, dados dois intervalos, $[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}]$ e $[y] \equiv [\underline{y}, \overline{y}]$, as operações sobre intervalos são calculadas da seguinte forma:

1. Adição: $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$.

2. Subtração: $[x] - [y] = [\underline{x} - \underline{y}, \overline{x} - \overline{y}]$.

3. Produto: $[x] \times [y] = [min\{\underline{xy}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy}\}, max\{\underline{xy}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy}\}]$.
4. Divisão: $[x] \div [y] = [x, y] \times [1/\underline{y}, 1/\overline{y}]$, $0 \notin [y]$.

Os conceitos de diâmetro e ponto médio de intervalos estão descritos a seguir:

Definição 2.1.3 (Diâmetro) *Dado um intervalos $[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}]$, então o diâmetro de $[x]$ é definido por*

$$diam([x]) := \overline{x} - \underline{x}. \tag{2-2}$$

Definição 2.1.4 (Ponto médio) *O ponto médio de um intervalos $[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}]$ é definido da seguinte forma:*

$$mid([x]) := \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}. \tag{2-3}$$

Definição 2.1.5 *O menor valor absoluto de um intervalos $[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}]$ é definido da seguinte forma:*

$$\langle [x] \rangle \equiv mig([x]) := min\{|x|; x \in [x]\} = \begin{cases} \min\{\underline{x}, \overline{x}\}, & se\ 0 \notin [x], \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

O número real $\langle [x] \rangle$ também é chamado mignitude do intervalo $[x]$.

Definição 2.1.6 *O maior valor absoluto de um intervalos $[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}]$ é definido da seguinte forma:*

$$|[x]| \equiv mag([x]) := \max\{|x|; x \in [x]\} = \max\{\underline{x}, \overline{x}\}.$$

O número real $|[x]|$ também é chamado magnitude do intervalo $[x]$.

2.2 Funções definidas em intervalos

Podemos definir funções elementares sobre intervalos, como as funções exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc..

Definição 2.2.1 (Função intervalar) *Considere uma função real de uma variável real $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo intervalo fechado em seu domínio D. A função intervalar de f sobre o intervalo $[x]$ é definida da seguinte forma:*

$$\mathbf{f}([x]) := \{f(x) \mid x \in [x]\}, \tag{2-4}$$

ou seja, $\mathbf{f}([x])$ significa a imagem da função real f sobre o intervalo $[x]$.

Observe que $\mathbf{f}([x])$ também é um intervalo, pois f é contínua.

As imagens de funções intervalares podem ser escritas utilizando propriedades de monotonicidade das funções reais elementares correspondentes. Vamos nos restringir apenas à algumas que utilizamos nesse estudo, as quais veremos a seguir:

$$[x]^2 = \operatorname{sqr}([x]) = [\langle [x] \rangle^2, |[x]|^2], \tag{2-5}$$

$$e^{[x]} = \exp([x]) = [e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}]. \tag{2-6}$$

Utilizamos também as funções trigonométricas regulares, seno e cosseno. A função $\cos([x])$ é monotonicamente crescente no intervalo $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ e monotonicamente decrescente no intervalo $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Portanto temos que

$$\cos([x]) = \begin{cases} [-1, 1], & \text{se } 1 + \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi}, \\ [-1, \max(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x}))], & \text{se } \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi} \text{ e } \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \bmod 2 = 1, \\ [\min(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x})), 1], & \text{se } \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi} \text{ e } \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \bmod 2 = 0, \\ [\min(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x})), \max(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x}))], & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função $\operatorname{sen}([x])$ é construída de forma análoga.

Utilizamos ainda as funções trigonométricas hiperbólicas, seno e cosseno hiperbólicos. O algoritmo utilizado não possui funções que calculam o seno e o cosseno hiperbólicos diretamente, mas sabemos que podemos escrevê-las utilizando a função exponencial, o que nos dá as seguintes equações:

$$\cosh([x]) = \frac{\exp^{[x]} + \exp^{[-x]}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh}([x]) = \frac{\exp^{[x]} - \exp^{[-x]}}{2}.$$

Substituindo a equação (2-6) nas duas equações acima, obtemos:

$$\cosh([x]) = \frac{[e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}] + [e^{-\underline{x}}, e^{-\overline{x}}]}{2} = \frac{[e^{\underline{x}} + e^{-\underline{x}}, e^{\overline{x}} + e^{-\overline{x}}]}{2}$$

e

$$\operatorname{senh}([x]) = \frac{[e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}] - [e^{-\underline{x}}, e^{-\overline{x}}]}{2} = \frac{[e^{\underline{x}} - e^{-\underline{x}}, e^{\overline{x}} - e^{-\overline{x}}]}{2}.$$

Para obter uma estimativa de $\mathbf{f}([x])$, substituimos x por $[x]$ na expressão que define f e avaliamos f usando a aritmética intervalar. Assumindo que todas as operações de aritmética intervalar são bem definidas, esse tipo de avaliação é chamada uma *avaliação intervalar* ou uma *extensão natural* de f e é denotada por $\mathbf{f}_{[]}([x])$.

Teorema 2.2.1 *Considere uma função real contínua f de variável real x e $\mathbf{f}_{[]}([x])$ a sua respectiva extensão natural. Então,*

$$\mathbf{f}([x]) \subseteq \mathbf{f}_{[]}([x]), \qquad \textit{para todo } x \subseteq Dom(f),$$

onde igualdade acontece somente em casos raros.

Dem.: Ver (14).

Esse teorema é muito útil para o objetivo dessa dissertação. Ele permite construir um oráculo para descartar regiões onde não tem a presença de pontos silhueta, isso será detalhado no capítulo 4.